数理解析研究所講究録
第566巻 1985年 36-47

Distance polynomial について

大阪電通大・工　梶岡 肇 (Hajime Kajioka)†

Gを点集合 $V(G)=\{1,\cdots,n\}$ を持つn点連結グラフとする。2点iとjの距離をd_{ij}とし、d_{ij}をi,j要素とするn次行列 $D(G)$ をGの距離行列という。$D(G)$ の固有多項式 $\det(xI-D(G))$ をGの距離多項式 (distance polynomial) と呼び、$\Delta(G;x)$ で表わす。Gの隣接行列 $A(G)$ の固有多項式として定義されるGの固有多項式 $\phi(G;x)$ については多くの研究がある (専門書として[1]、[2]が出版されている) が、距離多項式の一般的な性質はあまり知られていない。ここでは、距離多項式の持ちうる因数、すなわち $D(G)$ の固有値 (これをGの距離固有値という) に関していくつかの結果を述べる。

---

†現在：大阪府立香里丘高等学校勤務

1. グラフの自己同型群と多項式

mを $V(G)\times V(G)$ 上の複素数値関数でGの自己同型群$\Gamma(G)$により不変なもの、つまり任意の i, $j\in V(G)$ と $\sigma\in\Gamma(G)$ に対して $m(i,j)=m(i^\sigma,j^\sigma)$ となるものとする。$m(i,j)$ を m_{ij} と書いて、m_{ij} を i,j 要素とする n 次行列 $M=(m_{ij})$ を定める。$A(G)$ や $D(G)$ の要素も$\Gamma(G)$により不変であるから以下で述べる一般論が適用できる。なお、以下で行列Mに対しMの固有多項式を$\phi(M;x)$で表わす。

$\Gamma(G)$による$V(G)$の軌道を$V_1,\cdots,V_r$とすると、mの性質からわかるように

$$m^*_{k\ell}=\sum_{q\in V_\ell}m_{pq}\quad(p\in V_k)$$

はpの選び方によらない。そこで、r次行列 $M^*=(m^*_{k\ell})$ を定義し、$\phi(M^*;x)$ を $\phi^*(M;x)$ と書く。

<u>定理 1</u>　$\phi^*(M;x)$ は $\phi(M;x)$ の因数である。

<u>証明</u>　本質的に [2] の Th. 4.7 と同じである。Gの点の番号を付けかえてもよいので、まず各軌道から1個ずつ代表を選んで $1,\cdots,r$ とする。次に、V_1の残りの点、……、V_rの残りの点を順に $r+1,\cdots,n$ とする。行列 $xI-M$ の第ℓ列 $(\ell=1,\cdots,r)$ に、第$(r+1)$列以降でV_ℓの点に対応するすべての列を加える。次に第k行$(k=1,\cdots,r)$ を、第$(r+1)$行以降でV_kの点に対応するすべての行から引く。すると

$$\begin{pmatrix} xI-M^* & * \\ 0 & xI-M^c \end{pmatrix}$$

という形になる。ここで $\phi(M^c;x)$ を $\phi^c(M;x)$ と書くと、$\phi(M;x)=\phi^*(M;x)\phi^c(M;x)$ を得る。 □

なお、$\Gamma(G)$ が単位元だけの群ならば M^c は存在しない。

例1 後述のように、$\Delta(K_{1,k};x)=(x^2-2(k-1)x-k)(x+2)^{k-1}$ であるが、$\Gamma(K_{1,k})$ は k 次の対称群に同型で、容易にわかるように $\Delta^*(K_{1,k};x)=x^2-2(k-1)x-k$, $\Delta^c(K_{1,k};x)=(x+2)^{k-1}$ である。ただし $\Delta^*(G;x)$ とは $\phi^*(D(G);x)$ のことである。また $\Delta^c(G;x)$ も同様。

次に、Σ を $\Gamma(G)$ の部分群とし、Σ による $V(G)$ の軌道分解から作った $\phi^*(G;x)$ を $\phi^*_\Sigma(G;x)$ と書き、$\phi^c_\Sigma(G;x)$ も同様に定義する。また、H を G の部分グラフとし、H に属さない点に対応する行と列を M から除去してできる行列を M_H と書く。A_H と $A(H)$ はつねに等しいが、部分グラフ内では距離が変わるかも知れないので D_H と $D(H)$ は一般に異なる。そこで、次の有用な定理を証明する。

定理2 $\Gamma(G)$ の部分群 Σ と G の部分グラフ H が次の条件 (1)、(2) を満たせば、$\phi^c_\Sigma(M(H);x)=\phi^c_\Sigma(M;x)$、すなわち $\phi^c_\Sigma(M(H);x)$ は $\phi(M;x)$ の因数である。

(1) Hに属さない点はすべてΣによって固定され、またΣはV(H)上に置換群として作用する。

(2) $M_H = M(H)$ 。

証明　$xI-M$ と $xI-M(H)$ において、軌道の代表でない点（定理1の証明参照）に対応する行と列からなる部分行列が一致しているので、定理のなりたつことは明らか。　□

定理2はあたりまえの結果のように思われるが、距離多項式（実際には $\Delta^c(G;x)$ ）がどんな因数を持つかについて多くの情報を与える。応用例をいくつかあげる。

例2　C_5（5-閉路）の自己同型群は位数10の2面体群であるから、$\Delta^*(C_5;x)=x-6$, $\Delta^c(C_5;x)=(x^2+3x+1)^2$。一方、$C_5$の1点を固定する部分群$\Sigma$に対して、$\Delta^c_\Sigma(C_5;x)=x^2+3x+1$ となる。よって、図1のグラフの距離多項式はいずれも x^2+3x+1 を因数に持つ。

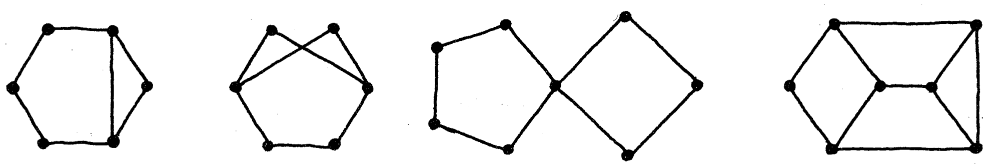


図1

例3　グラフGのk個の点$v_1,\cdots,v_k$が同じ近傍を持つとする。$v_1,\cdots,v_k$ 以外の点をすべて固定する部分群と、$v_1,\cdots,v_k$ およびそれらのすべてと隣接している点から誘導され

る部分グラフを考えると、次のことがわかる。$v_1, \cdots, v_k$ がどの2点も隣接しているか、または隣接していないかによって、$\Delta(G;x)$ は $\Delta^c(K_k;x)=(x+1)^{k-1}$、または $\Delta^c(K_{1,k};x)=(x+2)^{k-1}$ を因数に持つ。このことは、$k=2$ の場合には $D(G)$ をながめるとすぐわかる([5]、Proposition 6)。

例4　図2のようなグラフの距離多項式は、それぞれ下に書いてある因数を持つ。このことは、$D(G)$ をながめただけではわからない。

x^2+6x+4　　x^2+4x+2　　x^2+3x+1　　$x(x+4)$

図2

なお、今のところ $\Delta^*(G;x)$ の一般的な性質はほとんど何もわかっていない。

2. 直径2のグラフの距離多項式

次に、距離多項式独自の性質を考えるが、一般的に調べるのは非常に困難である。ここでは、直径2のグラフに対する距離多項式と固有多項式の関係について述べる。

グラフ G の直径が2ならば、$D=D(G)$ と $A=A(G)$ に対して $D=2J-2I-A$ という関係がなりたつ。ここで J はすべて

の要素が1の行列を表わす。これだけでは距離多項式と固有多項式の関係は一般にはわからないが、正則グラフに対しては次の結果がある。

定理3　Gが直径2のn点d次正則グラフで

$$\phi(G;x) = (x-d)\prod_{i=1}^{n-1}(x-\lambda_i)$$

ならば

$$\Delta(G;x) = (x-2n+d+2)\prod_{i=1}^{n-1}(x+\lambda_i+2) .$$

証明　Aのdに対する固有ベクトルは$\mathbb{j}$（すべての要素が1のベクトル）であることと、d以外の固有値に対する固有ベクトル$\mathbb{x}$は$\mathbb{j}$と直交することに注意して、$D\mathbb{j}$と$D\mathbb{x}$を計算すれば容易に得られる。　□

一般には次のことがなりたつ。

定理4　Gが直径2ならば

$$\Delta^c(G;x) = (-1)^{\varepsilon}\phi^c(G;-x-2) \qquad (\varepsilon = \deg\phi^c(G;x)).$$

証明　定理1の証明において、M^cの要素は$p, p' \in V_k$（$1 \leqq p \leqq r,\ r+1 \leqq p' \leqq n$）、$q' \in V_l$（$r+1 \leqq q' \leqq n$）なる$p, p', q'$により$m_{p'q'} - m_{pq'}$という形をしている。これを$A^c$と$D^c$にあてはめて$a_{p'q'} - a_{pq'}$と$d_{p'q'} - d_{pq'}$を比較すると、非対角要素については$d_{p'q'} - d_{pq'} = -(a_{p'q'} - a_{pq'})$、また対角要素については$-d_{pp'} = a_{pp'} - 2$となることがわかる（$D^c$の要素のとりうる値によって場合分けして考える）。従って、D^c

$= -A^c - 2I$ となるから定理が示される。 □

定理4で、特に G が vertex transitive ならば定理3の式を得るが、定理3自体は G が正則でありさえすれば成立するというわけである。定理4を応用すると、直径が2で自己同型群と固有多項式が既知のグラフに対して、距離多項式が容易に求められることが多い。

例5 $(n+1)$ 点 wheel $W_n = C_n + K_1$ の自己同型群は位数 $2n$ の2面体群に同型で、$V(W_n)$ の軌道は次数3の n 個の点(V_1とする)と次数 n の1個の点(V_2とする)である。また W_n は直径が2である。

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ n & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad D^* = \begin{pmatrix} 2(n-2) & 1 \\ n & 0 \end{pmatrix}$$

で、また

$$\phi(W_n ; x) = (x^2 - 2x - n) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x - 2\cos\frac{2k\pi}{n} \right)$$

である([7])。従って定理4より

$$\Delta(W_n ; x) = (x^2 - 2(n-2)x - n) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x + 2\cos\frac{2k\pi}{n} + 2 \right)$$

を得る。同様に、完全2部グラフ $K_{m,n}$、K_n から辺を1本除去したグラフ $K_n - e$ について

$$\phi(K_{m,n} ; x) = x^{m+n-2}(x^2 - mn)$$

$$\phi(K_n - e ; x) = x(x+1)^{n-3}(x^2 - (n-3)x - 2(n-2))$$

より次を得る。

$$\Delta(K_{m,n};x)=(x+2)^{m+n-2}(x^2-2(m+n-2)x+3mn-4m-4n+4)$$

$$\Delta(K_n-e;x)=(x+2)(x+1)^{n-3}(x^2-(n-1)x-2)$$

$\Delta(K_{m,n})$ は [5] でも計算されている。

なお、蛇足ではあるが閉路の距離多項式を計算したのでここに記しておく。

$$\Delta(C_n;x)=\begin{cases} x^{m-1}(x-m^2)\prod_{l=1}^{m/2}\left(x+2/\left(1-\cos\frac{(2l-1)\pi}{m}\right)\right)^2 \\ x^{m-1}(x-m^2)(x+1)\prod_{l=1}^{(m-1)/2}\left(x+2/\left(1-\cos\frac{(2l-1)\pi}{m}\right)\right)^2 \\ (x-m(m+1))\prod_{k=1}^{2m}\left(x+\left(1-\cos\frac{2km\pi}{2m+1}\right)/\left(1-\cos\frac{2k\pi}{2m+1}\right)\right) \end{cases}$$

3通りに分けてあるが、それぞれ $n=2m$（mは偶数）、$n=2m$（mは奇数）、$n=2m+1$ の場合である。従って $\det D(C_{2m})=0$（[5] でも示されている）、$\det D(C_{2m+1})=m(m+1)$ がわかる。C_n の距離固有値は、巡回行列の固有値に関するよく知られた公式から計算できる。

3. 距離多項式とグラフ同型性

固有多項式が同じなのに同型でないグラフの組を cospectral という。たとえば図3、図4はそれぞれ連結で位数最小、木で位数最小の cospectral なグラフの対である。他にもいろいろな例がある（[2]）。

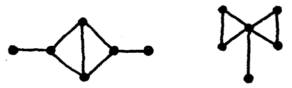


図3

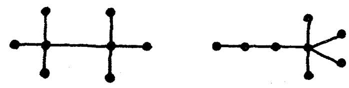


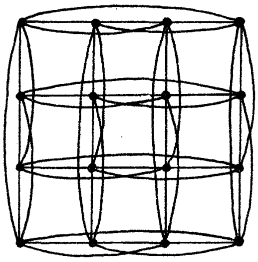
図4

一方、距離多項式が同じなのに同型でないグラフの組を距離 cospectral と呼ぶが、そのような組の具体例はあまり見つかっていない。定義からもわかるように、固有多項式に比べて距離多項式はグラフの構造に関してより詳細な情報を含んでいるはずだが、現在のところ、その情報を解読することが不充分にしかできない。位数最小の距離 cospectral な木の対は図5に示したもので（位数17）、B.D. McKay により発見された（[6]）。

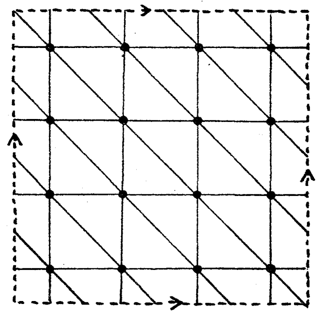
図5

ところが、位数最小の距離 cospectral なグラフの対はまだ知られていない。強正則（strongly regular）グラフ（たとえば [2] の chap. 3）は直径2の正則グラフだから、パラメータが等しくて同型でない（つまり cospectral な）強正則グラフは定理3から距離 cospectral であることがわかる。そのよう

な対で位数最小のものは、図6に示したように$K_{4,4}$の線グラフ$L(K_{4,4})$と Shrikhande グラフSである([8])。



$L(K_{4,4})$



Sのトーラスへの埋め込み

図6

実際、$\Delta(L(K_{4,4});x)=\Delta(S;x)=x^9(x-24)(x+4)^6$ である。講演では、これが現在知られているうちで位数最小の距離 cospectral なグラフの対であると述べたが、その後両者から1点ずつ除いてできるグラフ(それぞれL'、S'とする)も距離 cospectral であることが判明した。実際に計算してみると、$\Delta(L';x)=\Delta(S';x)=x^8(x+4)^5(x^2-20x-54)$ である。L'とS'の非同型性は、次数5の6個の点から誘導される部分グラフが前者では2個のK_3、後者ではC_6であることからわかる。なお、$L(K_{4,4})$とSはどちらも vertex transitive であるから、どの点を除いても同じことである。

4. むすび

距離多項式に関しては未解決の問題が数多くある。ここで

述べたことは主として距離多項式の因数に関するものであったが、距離多項式の係数とグラフの構造との関係はどうかという問題も考えられ、木についてはかなりのことがわかっている（[4]）。また、距離多項式の定数項、つまり det D(G) と G のブロック分解との間に興味深い関係のあることが示されている（[3]）。その他の問題としては、たとえばある対称性をもつグラフの構造決定や非存在の証明などに距離多項式を使うと、普通行われているような固有多項式を使う方法よりも、一層精密な結果の得られることが期待される。

なお、今回の結果は（特に定理２と定理４）、６点までのすべての連結グラフや、その他多くのグラフについて固有多項式と距離多項式の計算およびその有理数体上の因数分解をマイコンにより行い、結果をいろいろながめて帰納的に得たものである。

最後になりましたが、有益な助言をいただいた関西グラフ理論セミナーの方々に感謝致します。

References

[1] N. L. Biggs , "Algebraic Graph Theory" , Cambridge University Press , 1974 .

[2] D. M. Cvetković , M. Doob and H. Sachs , "Spectra of Graphs" , Academic Press , 1980 .

[3] R. L. Graham , A. J. Hoffman and H. Hosoya , On the distance matrix of a directed graph , J. Graph Theory 1 (1977) , 85–88 .

[4] R. L. Graham and L. Lovász , Distance matrix polynomials of trees , Advances in Math. 29 (1978) , 60–88 .

[5] P. Křivka and N. Trinajstić , On the distance polynomial of a graph , Aplikace Matematiky 28 (1983) , 357–363 .

[6] B. D. McKay , On the spectral characterization of trees , Ars Comb. 3 (1977) , 219–232 .

[7] A. J. Schwenk and R. J. Wilson , On the eigenvalues of a graph , in "Selected Topics in Graph Theory (eds. L. W. Beineke and R. J. Wilson)", Academic Press , 1978 .

[8] S. S. Shrikhande , The uniqueness of the L_2 association scheme , Ann. Math. Stat. 30 (1959) , 781–798 .