

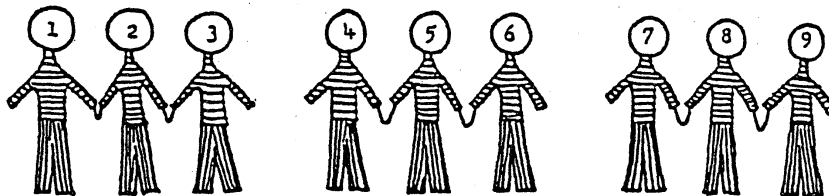
Resolvable Multipartite P_3 Designs

近畿大学 潮 和彦 (Kazuhiko Ushio)

1. はじめに

Resolvable BIB Design の中で, $k=3, \lambda=1$ の Resolvable Steiner Triple System は別名 Kirkman Design の名前で有名である。" The Problem of 15 School-Girls" , " The Problem of 9 School-Boys" は Kirkman Design の代表例である。これに対して, " The Problem of 9 Prisoners" は Resolvable P_3 Design の代表例である。

" The Problem of 9 Prisoners " : In a jail there were 9 prisoners of a particularly dangerous character. Each morning they were allowed to walk handcuffed in the prison yard. Here is how they walked on Monday:



Could you arrange them for Tuesday - Saturday so that no pair of prisoners is handcuffed together twice ? [1,p229-230]

Answer :

Monday	(1) - (2) - (3)	(4) - (5) - (6)	(7) - (8) - (9)
Tuesday	(3) - (7) - (5)	(6) - (1) - (8)	(9) - (4) - (2)
Wednesday	(5) - (9) - (1)	(8) - (3) - (4)	(2) - (6) - (7)

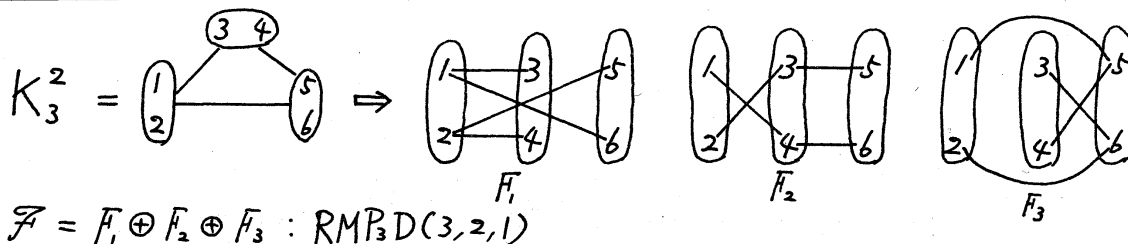
Thursday ⑦-②-⑤ ③-①-④ ⑨-⑥-⑧
 Friday ⑨-⑦-① ⑤-③-⑥ ②-⑧-④
 Saturday ②-⑨-③ ①-⑤-⑧ ⑦-④-⑥

Resolvable P_3 Design は Kirkman Design を用いて比較的簡単に構成することができる。Resolvable Multipartite P_3 Design は Resolvable P_3 Design を拡張したものである。

2. Resolvable Multipartite P_3 Designs (RMP_3D)

Definition P_3 を 3 点を結ぶ パス とする。成分がすべて P_3 であるような全域部分グラフを P_3 因子 とよぶ。完全多組グラフ $\lambda K_m^n = \lambda K_m(n, n, \dots, n)$ を, 互いに辺を共有しないように, P_3 因子の和に分解する P_3 因子分解 を Resolvable Multipartite P_3 Design とよび, $RMP_3D(m, n, \lambda)$ と書く。特に, $n=1$ の場合には, 単に Resolvable P_3 Design とよび, $RP_3D(m, \lambda)$ と書く。
 ($m \geq 2, n \geq 1, \lambda \geq 1$ とする。)

Example 1 $RMP_3D(3, 2, 1)$



Example 2 $RP_3D(9, 1)$

$F_1 = ①-②-③ \cup ④-⑤-⑥ \cup ⑦-⑧-⑨$

$F_2 = ⑦-②-⑤ \cup ③-①-④ \cup ⑨-⑥-⑧$

$\alpha = (279)(513)(846)$ とおく。

$$\mathcal{F} = F_1 \oplus F_1\alpha \oplus F_1\alpha^2 \oplus F_2 \oplus F_2\alpha \oplus F_2\alpha^2 : \text{RMP}_3\text{D}(9, 1)$$

これは "The Problem of 9 Prisoners" の 1 つの解答である。

2.1 RMP₃D の必要条件

λK_m^n の P_3 因子分解において, P_3 因子の数を r , 1 つの P_3 因子のもつ P_3 成分の数を t , P_3 因子分解で得られる P_3 成分の総数を b とすれば

$$t = mn/3, \quad b = rt = \lambda \binom{m}{2} n^2 / 2$$

が成り立つ。これから $\text{RMP}_3\text{D}(m, n, \lambda)$ が存在するための明らかな必要条件

$$(i) \quad mn \equiv 0 \pmod{3}, \quad (ii) \quad \lambda(m-1)n \equiv 0 \pmod{4}$$

が得られる。

Theorem 1 $\text{RMP}_3\text{D}(m, n, \lambda)$ が存在する

$$\iff (i) \quad mn \equiv 0 \pmod{3}, \quad (ii) \quad \lambda(m-1)n \equiv 0 \pmod{4}.$$

必要条件 (i)(ii) をみたす m, n, λ を分類する。

Lemma 1 $mn \equiv 0 \pmod{3}, \quad \lambda(m-1)n \equiv 0 \pmod{4}$

$$\iff \begin{cases} \text{(I)} & mn \equiv 0 \pmod{3}, \quad (m-1)n \equiv 0 \pmod{4}, \quad \lambda: \text{任意} \\ \text{(II)} & mn \equiv 0 \pmod{3}, \quad (m-1)n \equiv 2 \pmod{4}, \quad \lambda \equiv 0 \pmod{2} \\ \text{(III)} & mn \equiv 0 \pmod{3}, \quad (m-1)n \equiv 1, 3 \pmod{4}, \quad \lambda \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

2.2 Kirkman Design と RMP₃D

Kirkman Design を用いてたくさんの RMP_3D を得ることができ
る。Kirkman Design の存在と構成に関しては Ray-Chaudhuri and

Wilson[3] を参照せよ。

Theorem 2 [3] $RBIBD(v, 3, 1)$ が存在する

$$\iff v \equiv 3 \pmod{6}.$$

Example 3 $RBIBD(9, 3, 1)$

A solution of $RBIBD(9, 3, 1)$ is

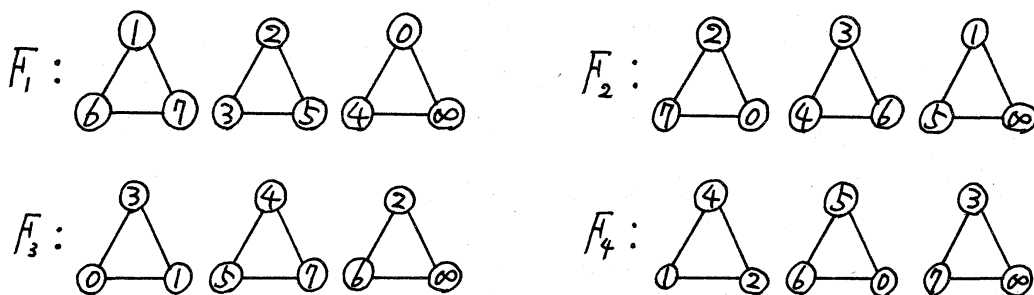
$$PC(4) [(1, 6, 7), (2, 3, 5), (0, 4, \infty)] \pmod{8}$$

where PC means a partial cycle.

これは "The Problem of 9 School-Boys" の1つの解答である。

Lemma 2 $RMP_3D(9, 1, 1)$ が存在する。

(証明) Example 3 より, $RBIBD(9, 3, 1)$ の4個の K_3 因子 F_i が得られる。



F_1 と F_2 の Common Transversal を T_1 とする:

$$\begin{array}{l} F_1 : \{ \cancel{1, 6, 7} \} \{ \cancel{2, 3, 5} \} \{ \cancel{0, 4, \infty} \} \\ F_2 : \{ \cancel{2, 7, 0} \} \{ \cancel{3, 4, 6} \} \{ \cancel{1, 5, \infty} \} \end{array} \Rightarrow T_1 = \{ 7, 3, \infty \}$$

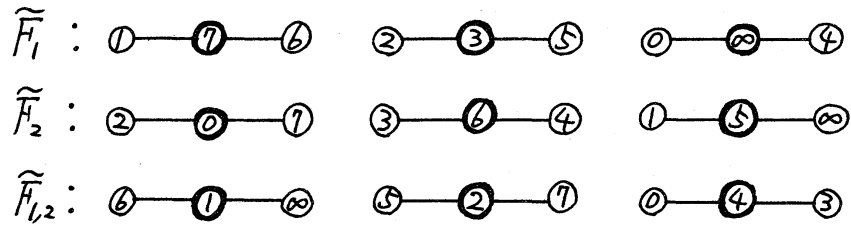
$F'_1 = F_1 - T_1$ と $F'_2 = F_2 - T_1$ の Common Transversal を T_2 とする:

$$\begin{array}{l} F'_1 : \{ \cancel{1, 6} \} \{ \cancel{2, 5} \} \{ \cancel{0, 4} \} \\ F'_2 : \{ \cancel{2, 0} \} \{ \cancel{4, 6} \} \{ \cancel{1, 5} \} \end{array} \Rightarrow T_2 = \{ 6, 5, 0 \}$$

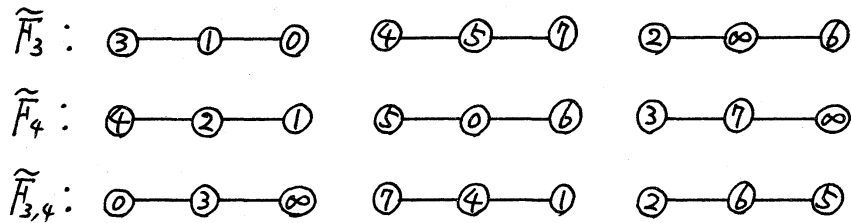
$F''_1 = F'_1 - T_2$ と $F''_2 = F'_2 - T_2$ の Common Transversal を T_3 とする:

$$\begin{array}{l}
 F_1'' : \{ \quad 1 \quad \} \{ \quad 2 \quad \} \{ \quad 4 \quad \} \\
 F_2'' : \{ \quad 2 \quad \} \{ \quad 4 \quad \} \{ \quad 1 \quad \}
 \end{array}
 \implies T_3 = \{1, 2, 4\}$$

F_1, F_2 と T_1, T_2, T_3 から, $RMP_3D(9, 1, 1)$ の 3 つの P_3 因子 $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_{1,2}$ が得られる。



同様にして, F_3, F_4 から $RMP_3D(9, 1, 1)$ の 3 つの P_3 因子 $\tilde{F}_3, \tilde{F}_4, \tilde{F}_{3,4}$ が得られる。



$$\mathcal{F} = \tilde{F}_1 \oplus \tilde{F}_2 \oplus \tilde{F}_{1,2} \oplus \tilde{F}_3 \oplus \tilde{F}_4 \oplus \tilde{F}_{3,4} : RMP_3D(9, 1, 1)$$

Example 4 RBIBD(15, 3, 1)

A solution of RBIBD(15, 3, 1) is

$$\begin{array}{l}
 [(\infty, 5, 10), (1, 6, 11), (2, 7, 12), (3, 8, 13), (4, 9, 14)] \\
 CT (1, 2, 3, 5, 6, 11, 9) (4, 8, 14, 10, 13, 12, 7)
 \end{array}$$

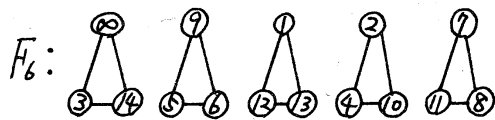
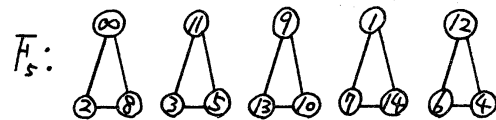
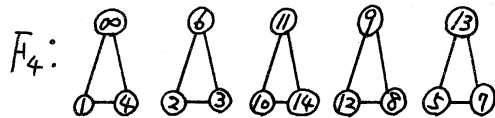
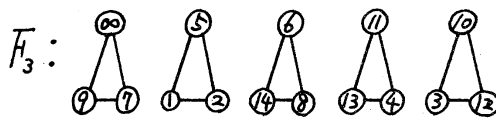
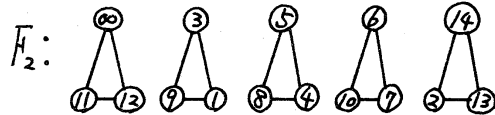
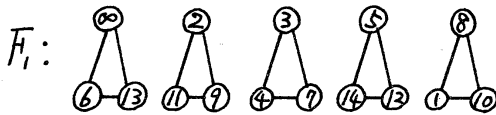
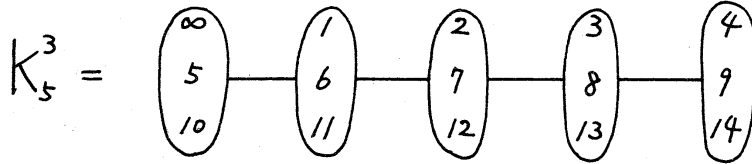
where CT means a cyclic transformation.

これは "The Problem of 15 School-Girls" の 1 つの解答である。

Lemma 3 $RMP_3D(5, 3, 1)$ が存在する。

(証明) Example 4 より, RBIBD(15, 3, 1) の 7 個の K_3 因子 F_0, F_1, \dots, F_6 が得られる。 F_0 の中の 5 組の点集合 $\{\infty, 5, 10\}, \{1, 6, 11\},$

$\{2, 7, 12\}, \{3, 8, 13\}, \{4, 9, 14\}$ を K_5^3 の Partite Sets と見なす。



F_1 と F_2 , F_3 と F_4 , F_5 と F_6 の 3 組のペアから, $RMP_3D(5, 3, 1)$ の 9 個の P_3 因子 $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_{1,2}, \tilde{F}_3, \tilde{F}_4, \tilde{F}_{3,4}, \tilde{F}_5, \tilde{F}_6, \tilde{F}_{5,6}$ が得られる。 $\mathcal{F} = \tilde{F}_1 \oplus \tilde{F}_2 \oplus \tilde{F}_{1,2} \oplus \tilde{F}_3 \oplus \tilde{F}_4 \oplus \tilde{F}_{3,4} \oplus \tilde{F}_5 \oplus \tilde{F}_6 \oplus \tilde{F}_{5,6} : RMP_3D(5, 3, 1)$

2.3 RMP_3D の拡張定理

n および λ に関する拡張定理が得られる。

Theorem 3 $RMP_3D(m, n, \lambda)$ が存在する

$\implies RMP_3D(m, \alpha n, \lambda)$ が存在する (α は正の整数)

(証明) $RMP_3D(m, n, \lambda)$ から λK_m^n の P_3 因子分解が得られる。
 λK_m^n の 1 点を α 点に拡大し, 点と点を結ぶ線をこの α 点と α 点を結ぶ α^2 本の線に拡大すれば, $P_3 = K_{1,2}$ であるから, この拡大によって $\lambda K_m^{\alpha n}$ の $K_{\alpha, 2\alpha}$ 因子分解が得られる。 $K_{\alpha, 2\alpha}$ の P_3 因子分解を用いれば, $\lambda K_m^{\alpha n}$ の P_3 因子分解が得られる。

Theorem 4 $RMP_3D(m, n, \lambda)$ が存在する

$\implies RMP_3D(m, n, \beta\lambda)$ が存在する (β は正の整数)

(証明) $RMP_3D(m, n, \lambda)$ を β 個並べれば $RMP_3D(m, n, \beta\lambda)$ が得られる。

2.4 RMP_3D の十分条件

(I) をみたす m, n, λ を分類する。

Lemma 4 $m \equiv 0 \pmod{3}, (m-1)n \equiv 0 \pmod{4}, \lambda: \text{任意}$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad m \equiv 9 \pmod{12}, \quad n, \lambda: \text{任意} \\ (2) \quad m \equiv 3 \pmod{6}, \quad n \equiv 0 \pmod{2}, \quad \lambda: \text{任意} \\ (3) \quad m \equiv 1 \pmod{4}, \quad n \equiv 0 \pmod{3}, \quad \lambda: \text{任意} \\ (4) \quad m \equiv 0 \pmod{3}, \quad n \equiv 0 \pmod{4}, \quad \lambda: \text{任意} \\ (5) \quad m \equiv 1 \pmod{2}, \quad n \equiv 0 \pmod{6}, \quad \lambda: \text{任意} \\ (6) \quad n \equiv 0 \pmod{12}, \quad m, \lambda: \text{任意} \end{array} \right.$$

(1) ~ (6) をみたす小さな n, λ に対して次の Lemma が得られる。

Lemma 5 $RMP_3D(12m_0+9, 1, 1)$ が存在する。

(証明) $m = 12m_0 + 9$ とおく。 $m \equiv 3 \pmod{6}$ であるから、Theorem 2 より $RBIBD(m, 3, 1)$ が存在する。 $RBIBD(m, 3, 1)$ の $(6m_0+4)$ 個の K_3 因子を 2 個ずつのペアに分割すれば、各ペアから $RMP_3D(m, 1, 1)$ の P_3 因子を 3 個ずつ構成することができ、全部で $r = 9m_0 + 6$ 個の P_3 因子が得られる。

Lemma 6 $RMP_3D(6m_0+3, 2, 1)$ が存在する。

(証明) $m = 6m_0 + 3$ とおく。 $m \equiv 3 \pmod{6}$ であるから、 K_m の K_3 因子分解が得られる。拡大して、 K_m^2 の K_3^2 因子分解が得られる。 K_3^2 の P_3 因子分解を用いれば、 K_m^2 の P_3 因子分解が得られる。

Lemma 7 $RMP_3D(4m_0+1, 3, 1)$ が存在する。

(証明) $m = 4m_0 + 1$ とおく。 $3m \equiv 3 \pmod{6}$ であるから、 $RBIBD(3m, 3, 1)$ が存在して、 $(6m_0 + 1)$ 個の K_3 因子 $F_0, F_1, \dots, F_{6m_0}$ が得られる。 F_0 の中の、それぞれ 3 個ずつの点からなる、 m 組の点集合を K_m^3 の Partite Sets と見なす。この F_1, \dots, F_{6m_0} を 2 個ずつのペアに分割して、 $RMP_3D(m, 3, 1)$ の全部で $r = 9m_0$ 個の P_3 因子を構成することができる。

Lemma 8 $RMP_3D(2m_0+1, 6, 1)$ が存在する。

(証明) $m = 2m_0 + 1$ とおく。 $3m \equiv 3 \pmod{6}$ であるから、 $RBIBD(3m, 3, 1)$ が存在して、 K_{3m} の K_3 因子分解が得られる。拡大して、 K_{3m}^2 の K_3^2 因子分解が得られる。この $(3m_0 + 1)$ 個の K_3^2 因子を $F_0, F_1, \dots, F_{3m_0}$ とする。 F_0 の中の、それぞれ 6 個ずつの点からなる、 m 組の点集合を K_m^6 の Partite Sets と見なせば、 $F_1, F_2, \dots, F_{3m_0}$ は K_m^6 の K_3^2 因子分解になっている。 K_3^2 の P_3 因子分解を用いれば、 K_m^6 の P_3 因子分解が得られる。

Lemma 9 $RMP_3D(m, 12, 1)$ が存在する。

(証明) m が奇数の場合には、 Lemma 8 より $RMP_3D(m, 6, 1)$

が存在する。 n に関する拡張定理より $RMP_3D(m, 12, 1)$ が存在する。 m が偶数の場合には, K_m は 1 因子分解可能である。即ち, K_m の K_2 因子分解が得られる。拡大して, K_m^{12} の K_2^{12} 因子分解が得られる。 K_2^{12} の P_3 因子分解を用いれば, K_m^{12} の P_3 因子分解が得られる。

Lemma 10 $RMP_3D(3m_0, 4, 1)$ が存在する。

(証明) $m = 3m_0$ とおく。

$$K_m^4 = \begin{array}{c} \textcircled{4} - \textcircled{4} - \textcircled{4} \vdots \textcircled{4} - \textcircled{4} - \textcircled{4} \vdots \dots \vdots \textcircled{4} - \textcircled{4} - \textcircled{4} \\ = (K_3^4 \cup K_3^4 \cup \dots \cup K_3^4) \oplus K_{m_0}^{12} \end{array}$$

K_3^4 の P_3 因子分解を用いれば, $K_3^4 \cup K_3^4 \cup \dots \cup K_3^4$ の P_3 因子分解が得られる。また, Lemma 9 より $K_{m_0}^{12}$ の P_3 因子分解が得られる。両者を合わせれば, K_m^4 の P_3 因子分解が得られる。

Lemma 5 ~ Lemma 10 に n と λ の拡張定理を適用すれば, (I) ~ (b) をみたすすべての m, n, λ に対し, 従って, (I) をみたすすべての m, n, λ に対し, $RMP_3D(m, n, \lambda)$ が存在する。そこで, 次の定理が得られる。

Theorem 5 (I) $\implies RMP_3D(m, n, \lambda)$ が存在する。

(II) をみたす m, n, λ を分類する。

Lemma 11 $m \equiv 0 \pmod{3}, (m-1)n \equiv 2 \pmod{4}, \lambda \equiv 0 \pmod{2}$

$$\left[\begin{array}{l} (1)' \quad m \equiv 3 \pmod{12}, n \equiv 1 \pmod{2}, \lambda \equiv 0 \pmod{2} \\ (2)' \quad m \equiv 7 \pmod{12}, n \equiv 3, 9 \pmod{12}, \lambda \equiv 0 \pmod{2} \end{array} \right]$$

$$\iff \begin{cases} (3') & m \equiv 11 \pmod{12}, n \equiv 3, 9 \pmod{12}, \lambda \equiv 0 \pmod{2} \\ (4') & m \equiv 0 \pmod{6}, n \equiv 2, 6, 10 \pmod{12}, \lambda \equiv 0 \pmod{2} \\ (5') & m \equiv 2, 4 \pmod{6}, n \equiv 6 \pmod{12}, \lambda \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

(1') ~ (5') をみたす小さな n, λ に対し、次の Lemma が得られる。

Lemma 12 $RMP_3D(12m_0+3, 1, 2)$ が存在する。

(証明) $m=12m_0+3$ とおく。 $m \equiv 3 \pmod{6}$ であるから、 $RBIBD(m, 3, 1)$ が存在して、 $(6m_0+1)$ 個の K_3 因子 $F_1, F_2, \dots, F_{6m_0+1}$ が得られる。この K_m の K_3 因子を 2 回ずつ用いて、 F_1 と F_2, \dots, F_{6m_0+1} と F_{6m_0}, F_{6m_0+1} と F_1, F_2 と F_3, \dots, F_{6m_0} と F_{6m_0+1} の 2 個ずつのペアから $RMP_3D(m, 1, 2)$ の全部で $3(6m_0+1)$ 個の P_3 因子を構成することができる。

Lemma 13 $RMP_3D(12m_0+7, 3, 2)$ が存在する。

(証明) $m=12m_0+7$ とおく。 $3m \equiv 3 \pmod{6}$ であるから、 $RBIBD(3m, 3, 1)$ が存在して、 K_{3m} の $(18m_0+10)$ 個の K_3 因子 $F_0, F_1, \dots, F_{18m_0+9}$ が得られる。 F_0 の中の、それぞれ 3 個ずつの点からなる m 組の点集合を K_m^3 の Partite Sets と見なし、 F_1, \dots, F_{18m_0+9} を 2 回ずつ用いて、 F_1 と F_2, \dots, F_{18m_0+9} と F_1, \dots, F_{18m_0+8} と F_{18m_0+9} の 2 個ずつのペアから $RMP_3D(m, 3, 2)$ の全部で $3(18m_0+9)$ 個の P_3 因子を構成することができる。

Lemma 14 $RMP_3D(12m_0+11, 3, 2)$ が存在する。

(証明) $m=12m_0+11$ とおく。 $3m \equiv 3 \pmod{6}$ であるから、

RBIBD($3m, 3, 1$)が存在して, K_{3m} の $(18m_0+16)$ 個の K_3 因子 $F_0, F_1, \dots, F_{18m_0+15}$ が得られる。 F_0 の中の, それぞれ3個ずつの点からなる m 組の点集合を K_m^3 のPartite Setsと見なし, F_1, \dots, F_{18m_0+15} を2回ずつ用いて, F_1 と F_2, \dots, F_{18m_0+15} と F_1, \dots, F_{18m_0+15} と F_{18m_0+15} の2個ずつのペアからRMP₃D($m, 3, 2$)の全部で $3(18m_0+15)$ 個の P_3 因子を構成することができる。

Lemma 15 RMP₃D($2m_0, 6, 2$)が存在する。

(証明) $m=2m_0$ とおく。 m は偶数であるから, K_m は1因子分解可能であり, K_m の K_2 因子分解が得られる。拡大して, $2K_m^6$ の $2K_2^6$ 因子分解が得られる。 $2K_2^6$ の P_3 因子分解を用いれば, $2K_m^6$ の P_3 因子分解が得られる。

Lemma 16 RMP₃D($6m_0, 2, 2$)が存在する。

(証明) $m=6m_0$ とおく。

$$K_m = (K_3 \cup K_3 \cup \dots \cup K_3) \oplus K_{2m_0}^3$$

$$2K_m^2 = (2K_3^2 \cup 2K_3^2 \cup \dots \cup 2K_3^2) \oplus 2K_{2m_0}^6$$

$2K_3^2$ の P_3 因子分解を用いれば, $2K_3^2 \cup 2K_3^2 \cup \dots \cup 2K_3^2$ の P_3 因子分解が得られる。また, Lemma 15より $2K_{2m_0}^6$ の P_3 因子分解が得られる。両者を合わせれば, $2K_m^2$ の P_3 因子分解が得られる。

Lemma 12 ~ Lemma 16に n と λ の拡張定理を適用すれば, (I) ~ (V)をみたすすべての m, n, λ に対して, 従って, (IV)をみたすすべての m, n, λ に対して, RMP₃D(m, n, λ)が存在する。そ

こで、次の定理が得られる。

Theorem 6 (II) \implies $RMP_3D(m, n, \lambda)$ が存在する。

(III) をみたす m, n, λ を分類する。

Lemma 17 $m, n \equiv 0 \pmod{3}, (m-1)n \equiv 1, 3 \pmod{4}, \lambda \equiv 0 \pmod{4}$

$$\iff \begin{cases} (1)'' & m \equiv 0 \pmod{6}, n \equiv 1 \pmod{2}, \lambda \equiv 0 \pmod{4} \\ (2)'' & m \equiv 2, 4 \pmod{6}, n \equiv 3, 9 \pmod{12}, \lambda \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$$

(1)'', (2)'' をみたす小さな n, λ に対して、次の Lemma が得られる。

Lemma 18 $RMP_3D(2m_0, 3, 4)$ が存在する。

(証明) $m = 2m_0$ とおく。 m は偶数であるから、 K_m は 1 因子分解可能であり、 K_m の K_2 因子分解が得られる。拡大して、 $4K_m^3$ の $4K_2^3$ 因子分解が得られる。 $4K_2^3$ の P_3 因子分解を用いれば、 $4K_m^3$ の P_3 因子分解が得られる。

Lemma 19 $RMP_3D(6m_0, 1, 4)$ が存在する。

(証明) $m = 6m_0$ とおく。

$$K_m = (K_3 \cup K_3 \cup \dots \cup K_3) \oplus K_{2m_0}^3$$

$$4K_m = (4K_3 \cup 4K_3 \cup \dots \cup 4K_3) \oplus 4K_{2m_0}^3$$

$4K_3$ の P_3 因子分解を用いれば、 $4K_3 \cup 4K_3 \cup \dots \cup 4K_3$ の P_3 因子分解が得られる。また、 Lemma 18 より $4K_{2m_0}^3$ の P_3 因子分解が得られる。両者を合わせれば、 $4K_m$ の P_3 因子分解が得られる。

Lemma 18, Lemma 19 に n と λ の拡張定理を適用すれば、 (1)'', (2)'' をみたすすべての m, n, λ に対して、従って、(III) をみたす

すべての m, n, λ に対して, $RMP_3D(m, n, \lambda)$ が存在する。そこで, 次の定理が得られる。

Theorem 7 (III) $\implies RMP_3D(m, n, \lambda)$ が存在する。

Theorem 5~Theorem 7 と Lemma 1 から, $RMP_3D(m, n, \lambda)$ が存在するための十分条件が次の定理にまとめられる。

Theorem 8 $mn \equiv 0 \pmod{3}$, $\lambda(m-1)n \equiv 0 \pmod{4}$
 $\implies RMP_3D(m, n, \lambda)$ が存在する。

2.5 RMP_3D 定理

$RMP_3D(m, n, \lambda)$ が存在するための明らかかな必要条件 (i), (ii) は, また十分条件でもあることが分った。そこで, 次の RMP_3D 定理が得られる。

THEOREM $RMP_3D(m, n, \lambda)$ が存在する

\iff (i) $mn \equiv 0 \pmod{3}$, (ii) $\lambda(m-1)n \equiv 0 \pmod{4}$.

参考文献

- [1] P.Hell and A.Rosa, Graph decompositions, handcuffed prisoners and balanced P-designs, Discrete Math. 2 (1972), 229-252.
- [2] C.Huang, Resolvable balanced bipartite designs, Discrete Math. 14 (1976), 319-335.
- [3] D.K.Ray-Chaudhuri and R.M.Wilson, Solution of Kirkman's problem, Combinatorics (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIX, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1968), 187-203.
- [4] 潮和彦, 完全2組グラフの P_3 因子分解, 数理論究録 534 (1984), 15-27.
- [5] 潮和彦, Resolvable Multipartite P_3 Designについて, 日本数学会. 昭和60年度年会, 応用数学分科会予稿集, 9-12.