数理解析研究所講究録
第 566 巻 1985 年 117-122

$\{1,2\}$-因子の構成法について.

東海大学(院生) 岡本克也 (Okamoto Katunari)

任意の連結グラフについての$\{1,2\}$-因子の構成法について考察する。

定義. $H=(W,F)$ が $G=(V,E)$ の因子であるとは. H は G の全域部分グラフでかつ. 辺集合 F は空でないとき. すなわち.

$$W=V\ ,\quad F\subseteq E,\ F\neq\phi$$

であるときを言う。

$H=(W,F)$ が $G=(V,E)$ の $\{n,m\}$-因子 $(n\leqq m)$ であるとは. H は G の因子でありかつ次をみたすときにいう:

$$n\leqq d_H(x)\leqq m \qquad \text{for all } x\in W$$

特に. $n=m$ であるとき. H は G の m-因子という。

ここで $F=\phi$ であるとき. 任意の $x\in W$ に対し $d_H(x)=0$ であることから. 因定の定義からは逸脱するが. H は G の 0-因子と呼ぶことにしよう。

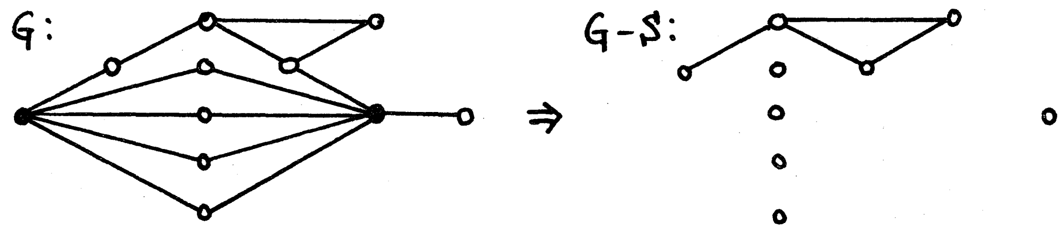
定理（Akiyama, Avis and Era）

グラフ $G=(V,E)$ が $\{1,2\}$-因子をもつための必要十分条件は

$$I(G-S) \leqq 2|S| \qquad (\text{for } {}^{\forall}S \subset V)$$

となることである。（$I(G-S)$ は $G-S$ 内の孤立点の個数を表す。）

この定理を使い、あるグラフが $\{1,2\}$-因子をもたないことを示すのは、非常に簡単である。例えば下図のグラフにおいて、黒点を上の定理の集合 S とすれば、$G-S$ における孤立点の個数は5個となり、$I(G-S)>2|S|$ が示せてこのグラフに $\{1,2\}$-因子が存在しないことがわかる。



それでは、$\{1,2\}$-因子を持つ場合それをどのように構成すれば良いのであろうか。先の定理についての証明も一つの構成法である。それを単に構成法という意味で明確にしていこう。

アルゴリズム

グラフ $G=(V,E)$ は連結グラフとし、F を G の 0-因子とする。

(1) Fにおける次数0の2点がGにおいて隣接している場合、その2点を結ぶ辺をFに加える。このような2点の組が存在しなくなるまで繰返し、もしFに孤立点がなくなれば、FはGの1-因子であり、ここで終る。そうでなければ(2)に進む。
このときFはP_1とP_2からなる。

(2) Fにおける次数0と1の2点がGにおいて隣接している場合、その2点を結ぶ辺をFに加える。このような2点の組が存在しなくなるまで繰返し、もしFに孤立点がなくなればFはGの$\{1,2\}$-因子であり、ここで終る。そうでなければ(3)に進む。
このときFはP_1, P_2, P_3, P_4からなる。

(3) FにP_4成分が存在するとき、その全てのP_4成分の中央の辺をFから除く。このとき(2)の状態が起れば、そこに立ち戻って繰返し、その後(4)に進む。
このときFは、P_1, P_2, P_3からなる。

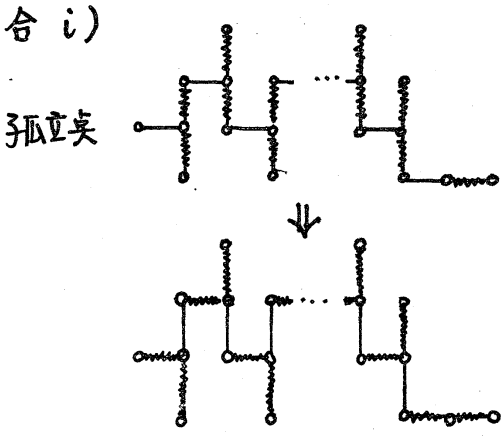
〰 : Fの辺.

(4) Gにおいて、Fの2つの異なるP_3成分の端点どうしが、隣接しているとき、その2つのP_3を下図のように3つのP_2にする。

このようなP_3の組がなくなるまで繰返し、(2)の状態が発生すれば、そこまで戻って手順を進める。そうでなければ(5)に進む。
このときFはP_1, P_2, P_3 からなる。

(5) このときFにおける孤立点(P_1成分)は、FのP_3成分の中央の点にのみ隣接する、またFのP_3成分の端点は、Gにおいても端点であるか、P_2の端点又は他のP_3の中央の点にのみ隣接する。よってFの孤立点のまわりを走査すると、次の3つの場合になる。

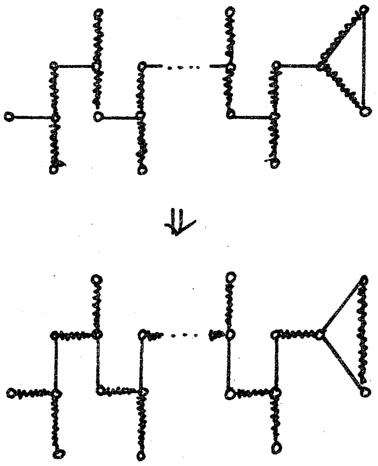
(場合 i)



左図のように、孤立点のまわりのP_3の端点を走査していくとき、P_2の端点にたどりつくとき、このような最短な経路およびP_2をえらび、左図下のようにFを変形する。

(場合 ii)

孤立点

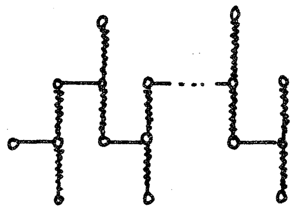


場合 i と同じ走査で、2つの端点が隣接している P_3 成分にたどりつくとき、このような最短の経路をえらび、左図のように F を変形する。

(場合 iii)

右図のように、孤立点のまわりの全ての P_3 の端点は次々と P_3 の中央の点に隣接しているが、もともと G において端点となっているとき、このような P_3 の個数は有限個なので、これらの P_3 の端点は、全てこれらの P_3 の中央の点にのみ隣接する。

孤立点



よって先の定理によって

$S = \{v \in V \mid v$ はこれらの P_3 の中央の点$\}$

とすると、

$$I(G-S) \geqq 2|S|+1$$

となり、G には $\{1,2\}$-因子が存在しないことが判明する。

場合i，iiのとき、孤立点は1個づつ解消されていくので
Gにf1,2f-因子が存在するとき、以上の構成法を繰返せば、
ついには、求めるf1,2f-因子を得ることができる。