数理解析研究所講究録
第567巻 1985年 88-96



# ホモトピー表現群とSwan部分群

阪大理(院) 長崎生光(Ikumitsu Nagasaki)

## §1. ホモトピー表現群

Gは有限群とする。線型作用に近い球面上のGの作用としてtom Dieck - Petrieは[2]でホモトピー表現を定義し研究した。

定義(1.1) i) 有限次元のG-CW複体 $X$ がホモトピー表現とは, 任意のGの部分群Hに対してH-固定点集合 $X^H$ が $(\dim X^H)$ 次元の球面とホモトピー同値または $X^H=\phi$ のときをいう。

ii) ホモトピー表現 $X$ が有限G-CW複体とGホモトピー同値のとき, $X$ は有限ホモトピー表現という。

iii) ホモトピー表現 $X$ が実表現の単位球面とGホモトピー同値のとき, $X$ は線型ホモトピー表現という。

実表現の単位球面がいつ$G$ホモトピー同値になるかという問題と関連して tom Dieck [1], 川久保[3]等は群$JO(G)$または$J_G(*)$を定義してある種の群$G$に関して計算しているが，ホモトピー表現に対しても同様の群が定義される。すなわち，

$$V^+(G, h^\infty) = \{\text{ホモトピー表現の}G\text{-ホモトピー型}\}$$
$$V^+(G, h) = \{\text{有限ホモトピー表現の}G\text{-ホモトピー型}\}$$
$$V^+(G, \ell) = \{\text{線型ホモトピー表現の}G\text{-ホモトピー型}\}$$

とおく。これらは結(join)によって可換半群となる。そこで，$V^+(G, \lambda)$ $(\lambda = h^\infty, h, \ell)$ の Grothendieck 群を$V(G, \lambda)$と書いてホモトピー表現群と呼ぶ。($\lambda = \ell$のときが$JO(G)$.)

記号　$\phi(G) = \{G\text{の部分群の共役類}\}$

　　　$C(G) = \{f : \phi(G) \to \mathbb{Z}\ \text{関数}\}$

ホモトピー表現$X$に対して，関数 $\mathrm{Dim}\, X \in C(G)$を

$$(\mathrm{Dim}\, X)(H) = \dim X^H + 1 \qquad (H) \in \phi(G)$$

で定義する。($X^H=\phi$ のときは $\dim X^H=-1$ とする。)このとき，$\mathrm{Dim}\,X*Y=\mathrm{Dim}\,X+\mathrm{Dim}\,Y$ ($*$ は join) が成立するから，準同型

$$\mathrm{Dim}: V(G,\lambda) \longrightarrow C(G)$$

が定義できる。Dim の像を $\mathrm{Dim}\,V(G,\lambda)$，核を $v(G,\lambda)$ とすると

$$V(G,\lambda) \cong \mathrm{Dim}\,V(G,\lambda) \oplus v(G,\lambda)$$

したがって，$V(G,\lambda)$ の研究は $\mathrm{Dim}\,V(G,\lambda)$ と $v(G,\lambda)$ の2つを研究することに帰着される。[2] では次の事が示されている。

定理 (1.2) [2] i) $\mathrm{Dim}\,V(G,\ell)=\mathrm{Dim}\,V(G,h)=\mathrm{Dim}\,V(G,h^\infty) \iff G$ は巾零.

ii) $v(G,h^\infty) \cong \mathrm{Pic}\,\Omega(G)$. (右辺はBurnside環のPicard群。)

iii) $0 \to v(G,h) \xrightarrow{k_G} v(G,h^\infty) \xrightarrow{\rho} \bigoplus_{(H)\in\phi(G)} \tilde{K}_0(\mathbb{Z}WH)$

は完全系列。($WH={}^{NH}/_{H}$，$NH$ は $H$ の $G$ の中での

正規化群。) ここで, $k_G$ は $v(G, h)$ から $v(G, h^0)$ への自然に定義される準同型, $\rho$ は finiteness obstruction map. □

以後の節では $v(G, \lambda)$ について述べる.

§2. Swan 部分群

$r \in \mathbb{Z}$ を $|G|$ と素な整数とし, $\Sigma_G = \sum_{g \in G} g$ とする。$[r, \Sigma_G]$ を $r$ と $\Sigma_G$ で生成される $\mathbb{Z}G$ の左 ideal とする. [6] より, 準同型

$$\tilde{S}_G : \mathbb{Z}/|G|^* \longrightarrow \tilde{K}_0(\mathbb{Z}G)$$

が $\tilde{S}_G(r) = ([r, \Sigma_G])$ で定義される。$\tilde{S}_G(\pm 1) = 0$ より

$$S_G : u(G) \longrightarrow \tilde{K}_0(\mathbb{Z}G)$$
$$u(G) = (\mathbb{Z}/|G|^*)/\pm 1$$

が誘導される。$S_G$ を Swan 準同型といい, $S_G$ の像を Swan 部分群といって $T(G)$ で表す。次の結果はよく知られた $T(G)$ の性質です。

定理(2.1) [8]　i) $f: G \to G'$ が全射のとき，$f$ から誘導される準同型 $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}G) \to \tilde{K}_0(\mathbb{Z}G')$ は $([r, \Sigma_G])$ を $([r, \Sigma_{G'}])$ に写す。したがって $T(G)$ は $T(G')$ の上に写される。

ii) $H$ を $G$ の部分群とするとき，$\mathrm{res}: \tilde{K}_0(\mathbb{Z}G) \to \tilde{K}_0(\mathbb{Z}H)$ は $([r, \Sigma_G])$ を $([r, \Sigma_H])$ に写す。したがって $T(G)$ は $T(H)$ の上に写される。 □

Swan 部分群に関する結果は[4]，[6]，[7]，[8]に見られる。

## §3.　$v(G, \lambda)$ について

自然な準同型

$$k_G : v(G, h) \longrightarrow v(G, h^\infty)$$
$$j_G : v(G, \ell) \longrightarrow v(G, h)$$
$$i_G : v(G, \ell) \longrightarrow v(G, h^\infty)$$

が定義できるが，これらは単射になる。([2])　したがってこれらの準同型により，$v(G, \ell)$，$v(G, h)$ を $v(G, h^\infty)$ の部分群とみなすことにする。

$G$ は abel 群とする。このときは $v(G, \ell)$ と $v(G, h^\infty)$ は完全に計算されている。次の可換図式が知られている。

([3], [2].)

(3.1)
$$\begin{tikzcd}
v(G, \ell) \arrow[d, "\cong"'] \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr, phantom, "\curvearrowright"] & v(G, h^\infty) \arrow[d, "\alpha"', "\cong"] \\
\prod\limits_{\substack{H \\ G/H : \text{cyclic}}} U(G/H) \arrow[r, phantom, "\subset"] & \prod\limits_{H} U(G/H)
\end{tikzcd}$$

ここで $U(G/H) = (\mathbb{Z}/|G/H|)^{*}/\pm 1$.

さらに tom Dieck - Petrie は次も示している

(3.2)
$$\begin{tikzcd}
v(G, h^\infty) \arrow[d, "\alpha"', "\cong"] \arrow[dr, "\rho"] \arrow[dr, phantom, bend right, "\circlearrowleft"] & \\
\prod\limits_{H} U(G/H) \arrow[r, "\prod_H S_{G/H}"'] & \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[G/H])
\end{tikzcd}$$

したがって (1.2) iii) と $G/H$ cyclic なら $T(G/H)=0$ ([6]) という事実から次のことがわかる。

定理 (3. 2)　G は abel 群とする。

i)　$v(G, h) \cong v(G, \ell) \times N(G)$

ここで

$$N(G) = \prod_{\substack{H \\ G/H:\ \text{non cyclic}}} \operatorname{Ker} S_{G/H}$$

ii)　$$\frac{v(G, h^{\wp})}{v(G, h)} \cong \bigoplus_{H} T(G/H)$$ □

このように $v(G, h)$ の計算は Swan 部分群の計算に帰着される。特に $N(G) = 1$ なら $v(G, h) = v(G, \ell)$ となる。これに関して次の事がわかる。

定理(3. 3)　G は abel 群．

$N(G) = 1$ となる必要十分条件は G が次の群の1つと同型のときである。

(i) $C$　cyclic　(ii) $G_2$　2-群

(iii) $G_3$　3-群　(iv) $G_2 \times \mathbb{Z}/3$

(v) $\mathbb{Z}/2 \times G_3$　(vi) $(\mathbb{Z}/2)^n \times (\mathbb{Z}/3)^m$ □

次に $v(G, h) = v(G, h^{\wp})$ となる群については次の事が

成立する。

定理(3.4)　$G$ は任意の有限群．このとき，

$$\upsilon(G, h) = \upsilon(G, h^{p}) \iff T(G) = 0 \qquad \square$$

これは $\rho$ の具体的な形（$\rho$ は Swan 準同型を用いて表わせる）と（2.1）を用いて証明される。

$T(G) = 0$ となる群 $G$ は宮田－遠藤 [4] によってほぼ完全に決定されている。特に $G$ が $C$（cyclic），$D_{2n}$（位数 $2n$ の二面体群），$Q_{4m}$（$m$：奇数 $\geq 3$）(位数 $4m$ の quaternion 群）$A_4$，$S_4$，$A_5$ のときには，$T(G) = 0$ となる。

（3.4）の応用として次の事を示すことができる。

定理(3.5)　$\upsilon(G, h^{p}) = 0$ となる必要十分条件は $G$ が次の群の1つと同型のときである。

$$\{1\},\ \mathbb{Z}/2,\ \mathbb{Z}/3,\ \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2,\ \mathbb{Z}/6,$$

$$D_6,\ D_8,\ D_{12},\ A_4,\ S_4 \qquad \square$$

# 参考文献

[1] T. tom Dieck : Homotopy-equivalent group representations, Crelles J. Reine Angew. Math. 298, 182-195 ('78).

[2] T. tom Dieck - T. Petrie : Homotopy representations of finite groups, Publ. Math. IHES 56 ('82).

[3] K. Kawakubo : Equivariant homotopy equivalence of group representations, J. Math. Soc. Japan 32, 105-118 ('80).

[4] T. Miyata - S. Endo : The Swan subgroup of the class group of a finite group, (to appear).

[5] J. Nagasaki : Homotopy representations and spheres of representations, (to appear).

[6] R. G. Swan : Periodic resolutions for finite groups, Ann. Math. 72, 267-291 ('60).

[7] M. J. Taylor : Locally free classgroups of groups of prime power order, J. Algebra 50, 463-487 ('78).

[8] S. V. Ullom : Nontrivial lower bounds for class groups of integral group rings, Illinois J. Math. 20, 311-300 ('75).