数理解析研究所講究録
第 567 巻 1985 年 101-103

Controlled L-theory

城西大理　山崎　正之 (Masayuki Yamasaki)

Gを virtually solvable group とする。このとき、次の条件をみたすリー群Lが存在することが、よく知られている。例えば [FH] を見よ。

(1) $G \subset L$ (discrete, cocompact)

(2) L_0 を L の identity component とするとき、$[L:L_0]$ は有限であり、しかも、

$$L_0 = \begin{cases} \text{単連結巾零リー群} & (G\text{が virtually nilpotent のとき}) \\ (\text{単連結可解リー群}) \rtimes (\text{トーラス}) & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

となる。

さて、KをLの極大コンパクト部分群とするとき、$K\backslash L$ は $\mathbb{R}^n$と同相である。GはLの部分群だから、Gの $K\backslash L = \mathbb{R}^n$ への作用が、自然に定まる。点 $y \in K\backslash L$ におけるGの isotropy subgroup G_y は $G \cap \ell^{-1} K \ell$ (但し $K\ell = y$) と書けるか

る、有限部分群である。G_y は各軌道上で (up to conjugacyで) 不変であるから、conjugacy class (G_y) は、$K\backslash L/G$ 上の "sheaf" を与える。

Ranickiの $L^{(-n)}$ 群 ([R]) の direct limit $L^{(-\infty)}$ は、次のようなホモロジー群として、rational に計算できる。

定理 $H_*(K\backslash L/G; \mathbb{L}^{(-\infty)}(G_y)) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cong L_*^{(-\infty)}(G) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$

但し、$\mathbb{L}^{(-\infty)}$ は $L^{-\infty}$-theory spectrum である。従って、Gの L群は、本質的には、その有限部分群の L群によって記述されると思ってよい。証明は[Y]と同様で、controlled L-theory を用いる。この定理の algebraic K-theory 版が、F. Quinnによりアナウンスされている([Q]) ので、参照してほしい。

参考文献.

[FH] F.T. Farrell and W.C. Hsiang, The Whitehead group of poly-(finite or cyclic) groups, J. London Math. Soc. (2), 24 (1981), 308—324.

[Q] F. Quinn, Algebraic K-theory of poly-(finite or cyclic) groups, Bull. AMS, 12 (1985), 221 — 226.

[R] A. Ranicki, Algebraic L-theory II: Laurent extensions, Proc. London Math. Soc., (3) 27 (1973), 126 – 158.

[Y] M. Yamasaki, L-groups of virtually nilpotent groups, preprint.