

## 空間不安定性理論の現状

航技研 伊藤信毅 (Nobutake Itoh)

### 1. はじめに

平板境界層や二次元ポアズイユ流においては、層流から乱流への遷移が微小な二次元進行波の成長で始まる。これは、レイノルズ数がある限界を越えると、層流が流れの中に含まれる微小攪乱に対して不安定になるからである。層流が与えられた条件のもとで安定であるか不安定であるかを知る目的には、攪乱を時間的に増幅または減衰する形に表わす方法、すなわち時間不安定性理論の方が簡単であり、理解し易い。しかし、層流が不安定であると判定された場合に、その結果生じるであろう攪乱の成長や変形の状態を記述する目的には、時間不安定性理論が必ずしも好都合とは言えない。攪乱の形態や発達状況は流れの形状や攪乱が導入されるときの条件およびその後の時間経過によって異なるので、それぞれの場合に応じた理論的取扱いが必要になる。

例えは Schubauer と Skramstad (1948) の実験のように、平板境界層の中に振動リボンを用いて一定振動数  $\omega$  の外乱を人工的に加えた場合に、その下流で観測される攪乱は流れ方向の座標  $x$  とともに増幅あるいは減衰する波動である。Gaster (1965) はこの場合の攪乱が、与えられた  $\omega$  と  $R$  (レイノルズ数) に対して複素波数  $\alpha$  (実部が波数、虚部が空間的減衰率を表わす) を定める空間不安定性理論の解によって記述されることを示した。彼は二次元の攪乱を考へ、それに対する境界条件をつぎのように表わす。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \begin{cases} \delta(\alpha) \cos \omega t & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad \text{at } y=0,$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow 0, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{as } y \rightarrow \infty \quad (1.1)$$

攪乱の流れ函数を

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y; \alpha, s) e^{i(\alpha x - st)} d\alpha ds \quad (1.2)$$

と置き、線形化された攪乱方程式に代入すると、 $\Phi$  は Orr-Sommerfeld 方程式 (以後 OS 方程式と略記する) に支配される。

$$\left\{ \frac{1}{R} (D^2 - \alpha^2)^2 + (is - i\alpha U)(D^2 - \alpha^2) + i\alpha U'' \right\} \Phi = 0 \quad (1.3)$$

ただし  $D \equiv d/dy$ ,  $U(y)$  は基本流。これを境界条件 (1.1) のもとに解き, (1.2) に代入して  $t$  の大きいときの漸近表示を求めると, 解はつぎのように表わされる。

$$v \sim \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{2} \frac{\Phi(y; \alpha(\omega), \omega)}{\partial \Phi(0; \alpha(\omega), \omega) / \partial \alpha} \exp [i(\alpha(\omega)x - \omega t)] \right\} \quad (1.4)$$

ここで  $\alpha(\omega)$  は OS 方程式の複素固有値である。この理論結果は, 振動リボンの十分下流で観測される攪乱がリボンと同じ振動数を持ち, 空間的に増幅または減衰する OS 方程式の固有解で表現されることを示している。

もう一つの代表的な例は波束型攪乱である。Gaster & Grant (1975) は平板境界層の中に, 板の表面に設けられた小孔を通して瞬時的なジェットを吹き出し, その結果生じる波束型攪乱の伝播と成長の過程を観察した。攪乱は偏平なハート形の輪郭を持ち, ほゞ一定の速度で下流方向に流されながら領域を広げてゆく。Gaster (1975) はこのよりの攪乱を模擬するために, 三次元波に対する OS 方程式の固有値問題を解き, 解のフーリエ積分を数値的に計算した。その結果は実験と極めてよく一致し, 波束型攪乱が線形解の重ね合せでほとんど完全に記述できることを示した。一方で Gaster (1968) は線形解のフーリエ積分が時間の大きいときに漸近形

$$v(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(y; \alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} d\alpha d\beta$$

$$\sim \frac{\hat{v}(y; \bar{\alpha}, \bar{\beta})}{t \sqrt{\Omega_{\alpha\alpha} \Omega_{\beta\beta} - \Omega_{\alpha\beta}^2}} \exp[i\bar{\alpha}x + i\bar{\beta}z - i\Omega(\bar{\alpha}, \bar{\beta})t] \quad (1.5)$$

に表示されることを示している。ここで  $\omega = \Omega(\alpha, \beta)$  は線形理論から定まる固有値関係式を表わし、 $\bar{\alpha}$  と  $\bar{\beta}$  は関係式

$$\frac{x}{t} = \Omega_{\alpha}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}), \quad \frac{z}{t} = \Omega_{\beta}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \quad (1.6)$$

を満たすように定められた複素波数である。(1.6)は群速度  $\Omega_{\alpha}$  と  $\Omega_{\beta}$  が実数値を取ることを意味し、この条件は Nayfeh (1979) や Itoh (1980) の運動学的波動理論の手法からも導かれる。結局、流れ方向とスピン方向の波数  $\alpha, \beta$  および振動数  $\omega$  のすべてを複素数に拡張し、その代りに群速度  $\Omega_{\alpha}$  と  $\Omega_{\beta}$  が共に実数値を取るという拘束条件を付加して OS 方程式を解くのである。このようにして得られた解のうち、群速度で動く座標系から見たときの増幅率

$$G \equiv \text{Im} [\Omega - \alpha \Omega_{\alpha} - \beta \Omega_{\beta}] \quad (1.7)$$

が最大値を取る実が波束中心を与え、 $G=0$  を満たす曲線が波束の輪郭を示す。以上の方法から得られた計算結果 (Itoh 1980, 1984) は Gaster と Grant の実験結果と定性的に一致している。すなわち、波束型攪乱の十分時間が経過したのちの状態は、時間的にも空間的にも増幅あるいは減衰する形の固有解によって記述されるのである。

## 2. 時間的不安定解と空間的不安定解の比較

上に示した例はいずれも流れの中に素性の知れた外乱を人工的に加えた場合であるが、以下では境界層の自然遷移の場合に不安定から生じる波動攪乱がどのような形態を取り、理論的にどう表現されるべきかを考える。

はじめに、回転円盤上に形成される三次元境界層の不安定問題を取り上げる。この流れは、ナビエ・ストークス方程式の厳密な層流解が判っていることと、古くから多くの実験が行われていて、攪乱の主要な性質が明らかにされているために、上に述べた目的には極めて都合のよい例題である。

Gregory et al. (1955) や Kobayashi et al. (1980) などの実験結果によると、回転軸を中心とする円形領域で流れは層流を保ち、それと外側に広がる乱流域の間に環状の遷移領域が存在し、ここでは一定間隔で周方向に並ぶ螺旋状の渦列が形成されており、円盤表面に固定した状態で観測されるのである。レイノルズ数を  $R = r\sqrt{\omega_0}/\nu$  ( $r$ : 半径,  $\omega_0$ : 円盤の回転角速度,  $\nu$ : 動粘性係数) で定義すると、渦列が観測される範囲は  $R = 300 \sim 600$ , 円周方向に並ぶ渦の個数は  $n = 27 \sim 33$ , 螺旋の円周方向となす角度は  $\phi = 11^\circ \sim 14^\circ$  の程度であり、渦列は円盤と共に回転する座標系から見たときに位相速度 0 である。

一方、この流れに局所的平行流近似に基づく線形安定理論

を適用すると、流れが三次元であるために、つぎの形の OS 方程式が導かれる (伊藤 1984)。

$$\left\{ \frac{1}{R} (D^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + i(\omega - \alpha U - \beta W)(D^2 - \alpha^2 - \beta^2) + i(\alpha U' + \beta W') \right\} v = 0 \quad (2.1)$$

ここで  $U$  と  $W$  は基本流の半径方向と円周方向の速度成分、 $\alpha$  と  $\beta$  はそれぞれの方角の波数である。攪乱は円周方向に振幅を変えないから、 $\beta$  は実数としてよい。したがって時間的不安定を論じるときには  $\alpha$  と  $\beta$  を実数として与え、複素振動数  $\omega$  を固有値として求めることになり、空間的不安定を論じる場合には  $\beta$  と  $\omega$  を実数とし、複素波数  $\alpha$  を固有値問題から定める。攪乱の増幅率は  $\omega_i(\alpha, \beta)$  または  $-\alpha_i(\beta, \omega)$  で与えられるが、流れ場の中ではそれらを最大にする  $\alpha$  と  $\beta$  または  $\beta$  と  $\omega$  の組合せが卓越すると考えるのが自然である。いま、いずれの場合にも (2.1) の解として定まる固有値関係式を  $\omega = \Omega(\alpha, \beta)$  と書くと、各  $Re$  数に対して増幅率を最大にする波数または振動数の組合せは連立方程式  $Im[\Omega_\alpha] = Im[\Omega_\beta] = 0$  を解くことによつて求まる。このようにして得られた最大増幅解の諸量を  $Re$  数に対してプロットしたものが図1と図2である。図1は時間的不安定の計算結果で、螺旋の角度  $\phi$  が  $R = 300 \sim 600$  の範囲において  $10^\circ \sim 14^\circ$  の値を取ることは実験結果とよく対応している。しかし、渦の個数  $n$  が同じ  $Re$  数範

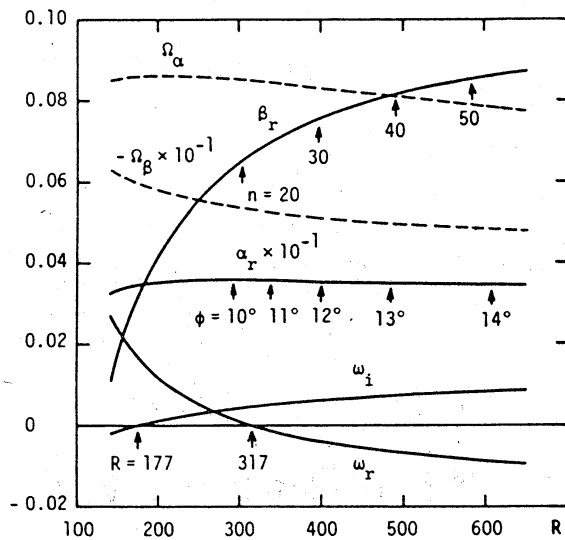


図1. 時間的増幅解

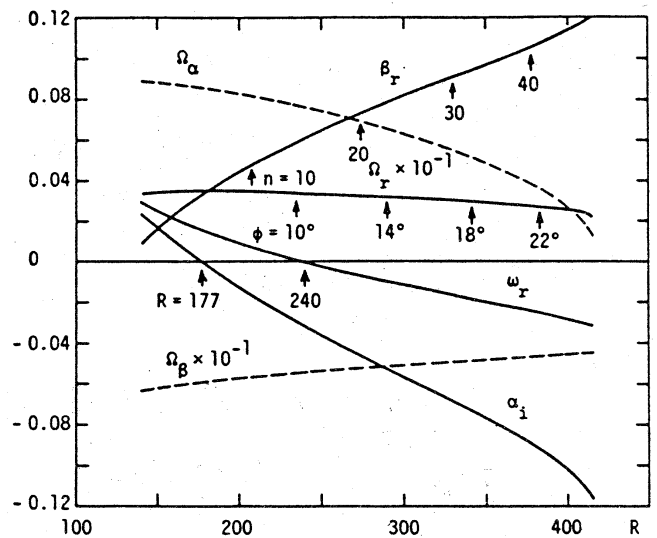


図2. 空間的増幅解

図1に対して20から50へ増加することは実験事実と反する。また、攪乱の位相速度が0 ( $\omega_r = 0$ ) になるのは  $R = 317$  のみだけであるが、 $R = 300 \sim 600$  において  $\omega_r$  が比較的小さい値を取るので、実験結果と著しく反するものではない。

一方図2には空間的増幅率が最大になる解の諸量を示しているが、 $R = 400$  の付近で  $\phi = 22^\circ$ 、 $n = 40$  のような大きな値に達し、 $\omega_r$  の絶対値も図1に比べてかなり大きい。したがって、時間的不安定の計算結果の方が空間的不安定の結果よりずっと現実に近いことが結論される。

以上の結果に従って、時間不安定の方法を採用することになると、攪乱は時間とともに無制限に増幅するわけではないから、振幅がある大きさに達して平衡状態に落ち着くものと考

えねばならない。そこで新たに、平衡状態の存在を理論的に予測できるか、実際に平衡振幅の値を算定できるか、そして得られた値が実験結果と一致するかなどの問題が生じる。この疑問に答えるには非線形の攪乱方程式を解くことが要求される。

### 3. 時間的不安定と平衡振幅

時間的に増幅する攪乱の平衡振幅を求める試みは、主として二次元プラズマ流における二次元TS波の場合についていくらか行われている。弱い非線形安定理論の方法では、非線形攪乱方程式の解を攪乱振幅のべき級数に展開するのであるが、得られた級数解の収束半径が極めて小さいために、平衡振幅を算定する目的にはこの方法は有効でない(伊藤1977, Herbert 1980)。そこで、解を  $x-ct$  ( $c$  は位相速度, 実数) のフーリエ級数に展開し、それを攪乱方程式に代入したときに得られる非線形連立方程式を反復法で解くことになる(例えば Herbert 1977, 伊藤と綿貫 1985)。始めから平衡状態にある解を考えるとすれば、フーリエ級数は

$$\psi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k(y) e^{ik\alpha(x-ct)}, \quad \psi_k = \tilde{\psi}_k, \quad \psi_1(0) = A \quad (3.1)$$

のように表わされ、問題は  $\psi_k$  に対する無限連立常微分方程



式を境界条件のもとに解くことに帰着する。実際にはフーリエ級数は有限項で切るが、その項数は計算結果を比較して決める。

このようにして導かれた方程式列は非同次OS方程式の形を持ち、解をチェビシエフ級数に展開する方法で比較的精度よく解くことができる (Orszag 1971, Orszag & Kells 1980)。すなわち、 $\psi_k$  を有限なチェビシエフ級数

$$\psi_k = b_0^{(k)} T_0(y) + b_1^{(k)} T_1(y) + \dots + b_{N-1}^{(k)} T_{N-1}(y) \quad (3.2)$$

で表わし、方程式に代入して各項の係数を比較することによって未知係数  $b_n^{(k)}$  に関する非線形連立代数方程式を導く。これに境界条件を付加して反復法で解くと、位相速度  $c$  および平衡振幅  $|A|$  が波数  $\alpha$  とレイノルズ数  $R$  の函数として定まる。

実際の計算では、はじめにチェビシエフ級数の項数を変えたときの効果が調べられ、二次元ポアズイユ流の問題では  $N=50$  に取れば十分な精度の得られることが判った。 $\psi_k$  は  $y$  の奇函数または偶函数であるから、実際の項数は  $N$  の半分である。つぎに、フーリエ級数の項数を変えたときの影響を見る。平衡の条件を弛めて振動数が複素数値を取ることを許したときは、擬似的な増幅率  $\omega_i$  と振幅 ( $E = |A|^2$ ) の関係は、高調波の打ち切り次数  $K$  を増すにつれて図3のように収束する。

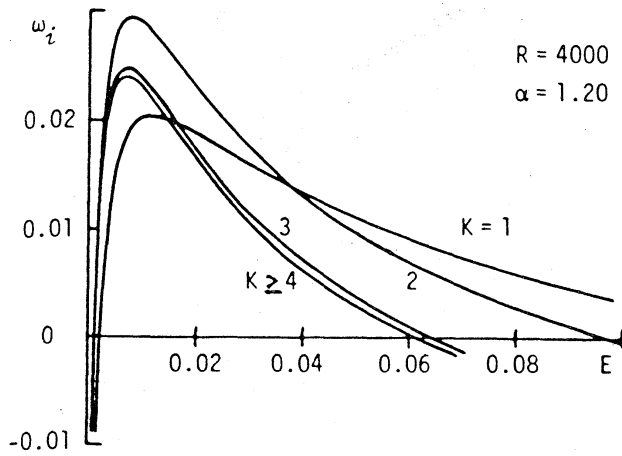


図3. フーリエ項数の影響

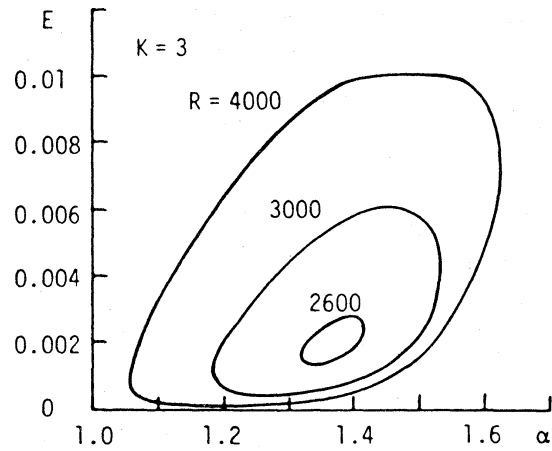


図4. 平衡振幅

これから  $K$  を 3 以上に選べば、計算結果にそれほど大きい誤差を生かないことが判る。この図で曲線が横軸を切る点 ( $\omega_i = 0$ ) が平衡解を与える。図4は  $R$  を固定したときの平衡振幅  $E$  を  $\alpha$  に対して描いたもので、各曲線の内側で攪乱は増幅し、外側で減衰する。したがって曲線の下半分は流れが不安定になるために必要な攪乱の敷居振幅を与え、上半分は時間が十分に経過したのちに攪乱が到達する安定平衡振幅を示す。

以上の計算では攪乱振幅を  $\psi$  の  $y=0$  における値で定義しているけれども、実験では流れ方向速度  $u = \psi_y(y)$  の最大値で攪乱の大きさを表わすことが多い。  $|u|_{\max}$  と  $|\psi(0)|$  の比は約 2.3 であるから、図4の  $R=4000$  における平衡振幅の最大値  $E \doteq 0.01$  は  $|u|_{\max} \doteq 0.23$  に対応する。この値は実験で測定

されるTS波の振幅より1桁近く大きいため、実際にはこのような大振幅に達するまで攪乱の二次元性が保たれることはない。

結局、二次元ポアズイユ流に対して計算された二次元TS波の平衡振幅は大きすぎて、現実の攪乱を正しく表現するものではないことが結論される。平板境界層に対してはまだ計算が行われていないが、数値実験の結果(Hama 1985)を参照すると、この場合にも平衡振幅は現実比べてずっと大きい値を取るものと予想される。攪乱は二次元の平衡状態に達する前に三次元化をれてしまうのであろう。はじめから三次元攪乱を考慮して平衡振幅を計算したらどうなるか、また基本流が三次元である回転円盤流の場合にはどうか、などは今後の課題である。

#### 4. 空間的不安定と receptivity の問題

すでに述べたように、時間的不安定を考慮する場合には、究極的な平衡状態を知ることが不可欠であり、その解析には非線形効果が本質的な役割を果たす。これに対して空間的不安定の取扱いは、攪乱が必ずしも平衡状態に達する必要はなく、非線形効果は線形解の性質を定量的に修正するという二次的な作用を持つにすぎない。(攪乱の三次元化に果す非線形性

の役割などは別である。ここでは二次元攪乱の二次元非線形性を考えている。) したがって、攪乱振幅がそれほど大きくない段階では、空間的發展の線形解が現実をかなりよく記述するであろうと予想される。以下ではこのような期待に答える解析の一例を示す。

十分滑らかな表面に沿う境界層(ここでは平板境界層に話を限る)の自然遷移では、TS波を誘起する原因が外側の自由流中に含まれる乱れにあると想像され、その因果関係を調べることと receptivity の問題と呼ぶ(Morkovin 1969, Reshotko 1976)。Goldstein (1983) は、外部乱れが境界層の前縁に近い領域で非定常境界層方程式の波動形固有解を誘起し(Lam & Rott 1960, Ackerberg & Phillips 1972)、それが下流に伝わるにつれてTS波に成長することを接合漸近展開の方法で示した。この結果はもっと直接的な解析からも導くことができる(伊藤 1985)。

一様流速  $U_\infty$ 、前縁から代表長さまでの距離  $L$ 、局所排除厚  $\delta(x) = \sigma \sqrt{\nu x / U_\infty}$  ( $\sigma = 1.7208$ ) を用いてつぎの無次元化を行う。

$$\frac{x}{L} = \xi, \quad \frac{y}{\delta(x)} = \eta, \quad \frac{U_\infty t}{L} = \tau, \quad \frac{\psi}{U_\infty \delta(x)} = \Psi_0 + \psi \quad (4.1)$$

$\Psi_0$  は基本流で、Blasius 方程式  $F''' + \frac{\sigma^2}{2} F'' F = 0$  の解  $F(\eta)$  で近似される。また  $\varepsilon_0 = \delta(L)/L$  で定義される微小パラメータ  $\varepsilon$  を導入

する。攪乱  $\psi$  を時間的に周期的な波動形

$$\psi = \hat{\psi}(\xi, \eta) \exp [i\Phi(\xi) - i\omega_0 \tau], \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\hat{\alpha}(\xi)}{\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon}} \quad (4.2)$$

に置き、 $\omega_0$  は与えられた振動数 (実数)、 $\hat{\alpha}$  は複素波数とする。以上を渦度方程式に代入し、線形攪乱方程式を導くと

$$\left[ \frac{1}{2\varepsilon} \left\{ \frac{2}{\sigma^2} (D^2 - \hat{\alpha}^2)^2 + (FD + F')(D^2 - \hat{\alpha}^2) + F''D + F''' \right\} + i\omega_0 (D^2 - \hat{\alpha}^2) - \left( \frac{i\hat{\alpha}}{\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon}} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \{ F(D^2 - \hat{\alpha}^2) - F''' \} + O(\varepsilon_0) \right] \hat{\psi} = 0 \quad (4.3)$$

を得る。表示された項に比べて微小な項  $O(\varepsilon_0)$  は省略する。上式において、 $\hat{\alpha} \sim O(\varepsilon_0)$ 、 $\omega_0 \sim O(1)$  と仮定し、 $O(\varepsilon_0)$  項を省略すると非定常境界層方程式が、また  $\hat{\alpha} \sim O(1)$ 、 $\omega_0 \sim O(\frac{1}{\varepsilon_0})$  と仮定し、粘性項以外の  $O(1)$  項を省略すると OS 方程式がそれぞれ得られる。したがって (4.3) は Goldstein の解析で対象となる領域のすべてにおいて成立する単一の方程式である。

いま、攪乱の振動数が十分大きい場合を考慮、 $\varepsilon = \frac{1}{\omega_0}$  で定義される微小パラメータに関して解を

$$\hat{\psi} = \psi^{(0)}(\xi, \eta) + \varepsilon \psi^{(1)}(\xi, \eta) + \dots, \quad \hat{\alpha} = \alpha(\xi) + \varepsilon \alpha^{(1)}(\xi) + \dots \quad (4.4)$$

のように展開すると、偏微分方程式 (4.3) は  $\psi^{(n)}$  に対する常微分方程式の列に分解できる。局所排除厚に基づき無次元振動数  $\omega = \varepsilon_0 \omega_0 \sqrt{\varepsilon}$  とレイノルズ数  $R = \sigma^2 \sqrt{\varepsilon} / \varepsilon_0$  を用いると、最

低次項からはつぎの修正OS方程式が導かれる。

$$\left[ \frac{1}{R} \left\{ (D^2 - \alpha^2)^2 + \frac{\sigma^2}{2} (FD + F')(D^2 - \alpha^2) + \frac{\sigma^2}{2} (F''D + F''') \right\} + (i\omega - i\alpha F')(D^2 - \alpha^2) + i\alpha F''' \right] \psi^{(0)} = 0 \quad (4.5)$$

これは同次の境界条件とともに固有値問題を構成し、複素波数  $\alpha$  を  $\omega$  と  $R$  の函数として定める。展開の次の項は  $\psi^{(0)}$  に対する非同次方程式を与え、その方程式の可解条件が  $\alpha^{(1)}$  を決定する。

以上の方式に従って  $\alpha$  と  $\alpha^{(1)}$  を求める数値計算が実行された。図5には、 $f = \omega/R$  を一定(振動数一定)にしたときに、修正OS方程式の固有値(実線)が  $R$  の減少とともに非定常境界層方程式の固有値(一実鎖線)に漸近し、 $R$  の増大につれて

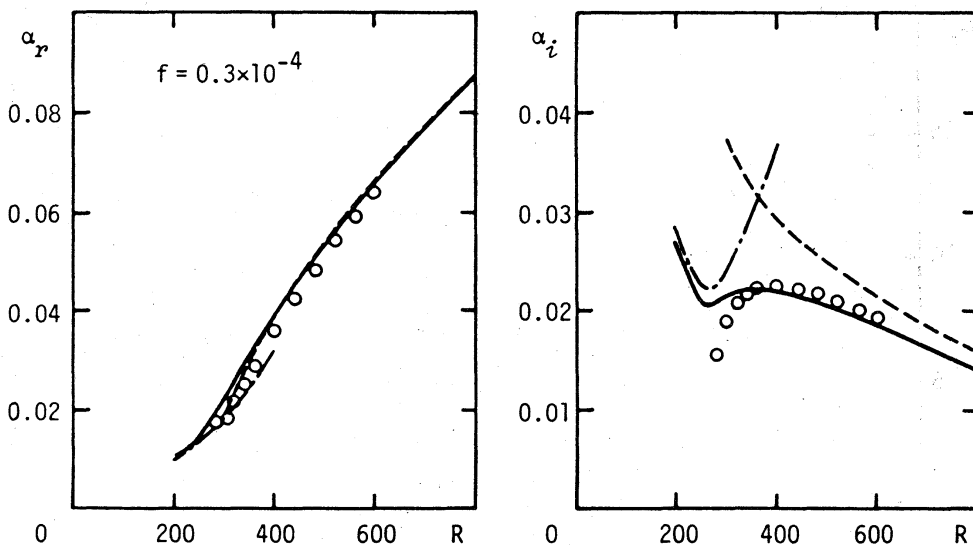


図5. 三種類の固有値の比較

古典的OS方程式の固有値(実線)に漸近する様子が示されている。これは Goldstein (1983) の理論的予測を支持する結果である。同図中の丸印は実線に補正項  $\varepsilon \alpha^{(1)}$  を加えたものであり、これが  $R = 300$  以下で実線と離れることは級数解(4.4)が収束しなくなることに対応する。級数解の収束性を見るには、(4.5)の代わりに非定常境界層方程式を用いる方が判りやすい。図6にはその固有値  $\alpha R$  (実線) と補正をした量  $\alpha R + \varepsilon \alpha^{(1)} R$  (丸印) を  $1/\omega R$  (展開パラメータ  $\varepsilon$  と同義) に対してプロットしてある。この図は、級数解の初項と才二項だけに基づく粗い見積りとして、収束限界が  $1/\omega R \doteq 0.3$  程度であることを示す。

図7の原実近くに描かれた一実鎖線はこの収束限界を表わ

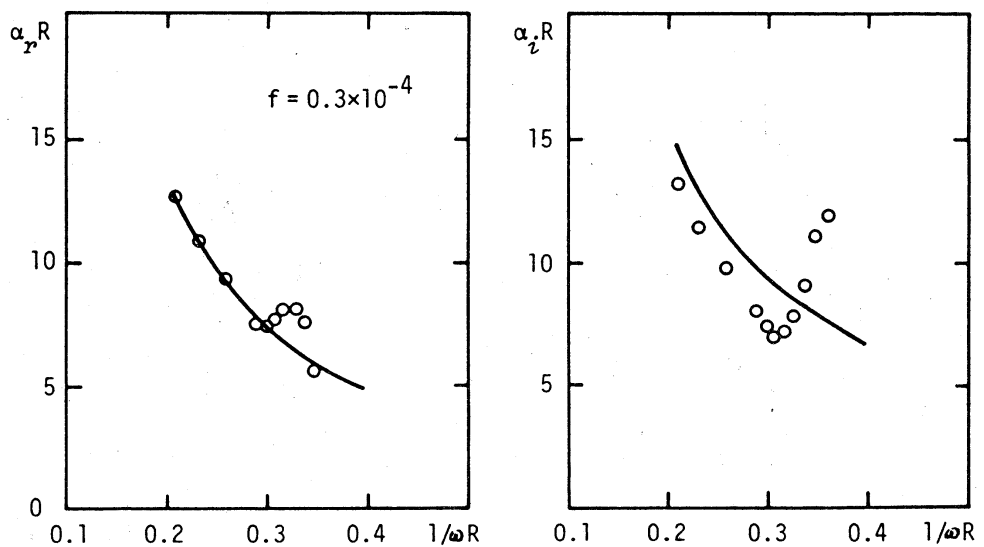


図6. 非定常境界層方程式の固有値と補正項

し、その外側で (4.5) は有意義な解を与えず。一定振動数の攪乱は同図上の原点を通る直線に沿って伝播するから、その発達を見るには直線と一実線との交点から

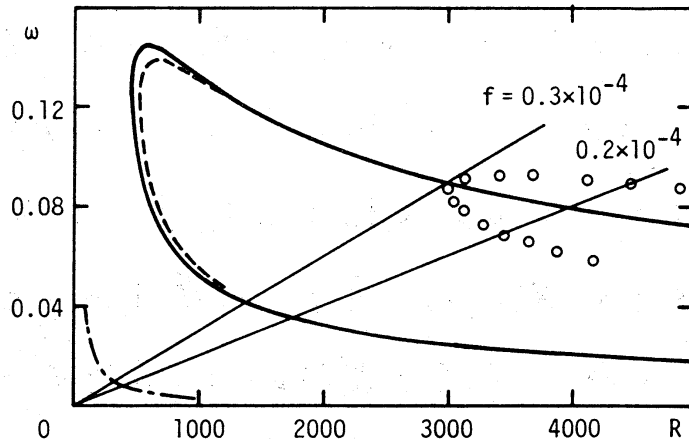


図7. 中立安定曲線

ら外側に向って空間的増幅率  $-\alpha_i$  を計算すればよい。図8(a)は二つの例について  $-\alpha_i$  の変化を示し、図8(b)はそれらを積分した値

$$-\Theta_i = \int_{R_0}^R -\alpha_i(fR, R) dR \quad (R_0: \omega = fR \times \frac{1}{\omega R} = 0.3 \text{ の交点}) \quad (4.6)$$

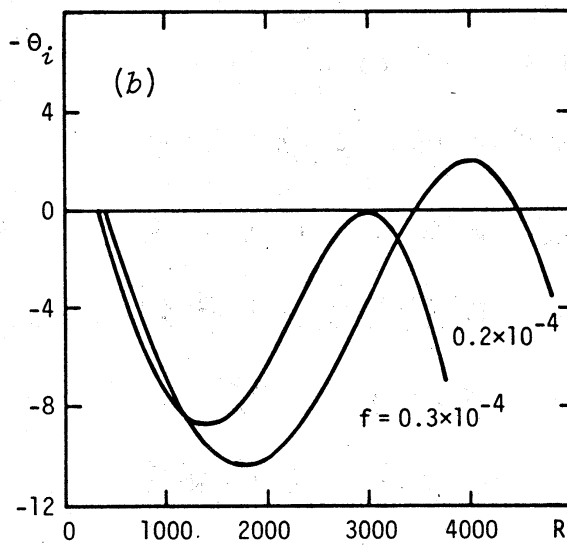
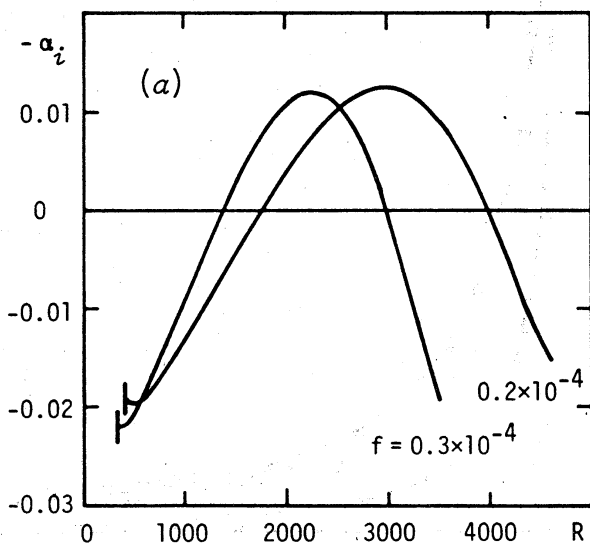


図8. 空間的増幅率(a) と その積分(b)



を示す。 $f = 0.3 \times 10^{-4}$  の場合には  $-\textcircled{4}_i$  が常に負であるが、 $f = 0.2 \times 10^{-4}$  の場合にはある  $Re$  数範囲で  $-\textcircled{4}_i$  が正の値を持ち、ここでは攪乱振幅が初期値 ( $R = R_0$  における振幅) 以上の大きさに達する。図 7 には普通の中立安定曲線  $\alpha_i(\omega, R) = 0$  (実線; 実線は古典的 OS 方程式の中立曲線) とともに、 $\textcircled{4}_i(\omega, R) = 0$  で定義される中立曲線が丸印で示されている。

このようにして得られた二種類の中立曲線を Schubauer & Skramstad (1948) の実験結果と比較したものが図 9 である。黒丸は振動リボンを用いて人工的に発生させた攪乱の中立安定状態を示し、 $\alpha_i(\omega, R) = 0$  の中立曲線 (実線) とよく一致している。

一方白丸印は自然遷移の状態を観測される波動攪乱を表わし、 $\textcircled{4}_i(\omega, R) = 0$  の中立曲線 (点線) と比較されるべきものである。理論結果は定量的には実験値と一致しないけれども、自然遷移の場合に攪乱が比較的高い  $Re$  数領域で、しか

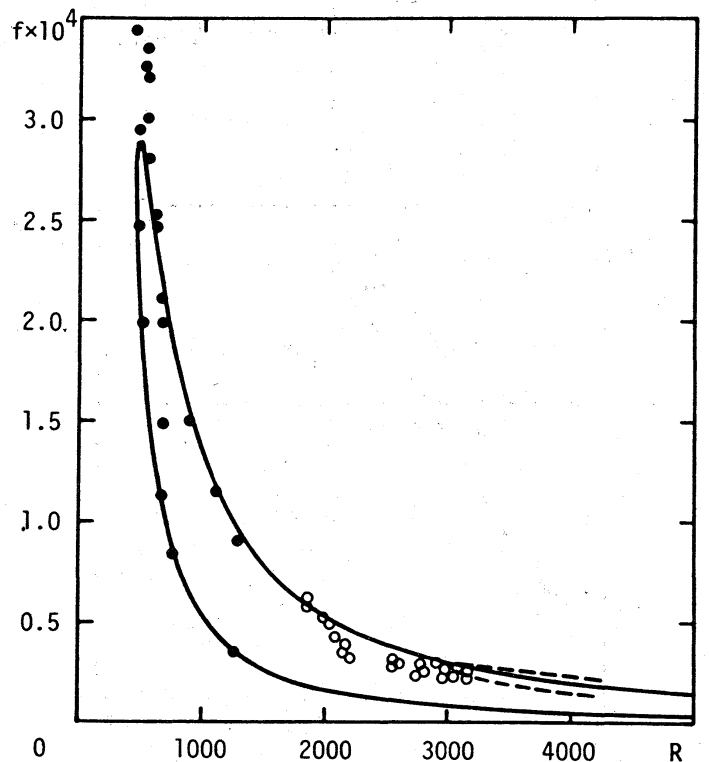


図 9. 中立曲線と実験結果の比較

も  $\alpha_i = 0$  の中立曲線の上分枝に沿って観測される事情を定性的に説明していることは興味深い。

### 参考文献

- Ackerberg, R.C. & Phillips, J.H. 1972 *J. Fluid Mech.* 51, 137.
- Gaster, M. 1965 *J. Fluid Mech.* 22, 433.
- Gaster, M. 1968 *J. Fluid Mech.* 32, 173.
- Gaster, M. 1975 *Proc. R. Soc. Lond. A.* 347, 271.
- Gaster, M. & Grant, I. 1975 *Proc. R. Soc. Lond. A.* 347, 253.
- Goldstein, M.E. 1983 *J. Fluid Mech.* 127, 59.
- Gregory, N., Stuart, J.T. & Walker, W.S. 1955 *Phil. Trans. R. Soc.*  
A. 248, 155.
- Hama, F.R. 1985 第17回乱流シンポジウム講演論文集.
- Herbert, Th. 1977 AGARD-CP-224. 3-1.
- Herbert, Th. 1980 *AIAA Journal* 18, 243.
- 伊藤信毅 1977 京都大学数理解析研究所講究録 298, 1
- Itoh, N. 1980 *Laminar-Turbulent Transition* (ed. R. Eppler, H. Fasel), p.86.
- Itoh, N. 1984 *Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids* (ed. T. Tatsumi), p.59.
- 伊藤信毅 1984 流体力学の進歩 境界層 (谷一郎編), p.97.
- Itoh, N. 1985 *Laminar-Turbulent Transition* (ed. V.V. Kozlov), p.463.
- 伊藤信毅 1985 第17回乱流シンポジウム講演論文集.

伊藤信毅, 綿貫忠晴 1985 日本航空宇宙学会第16期年会講

漢集, p. 114.

Kobayashi, R., Kohama, Y. & Takamada, Ch. 1980 *Acta Mech.* 35, 71.

Lam, S.H. & Rott, N. 1960 Cornell Univ. AFORS TN-60-1100.

Morkovin, M.V. 1969 Air Force Flight Dyn. Lab. Rep. AFFDL-TR-68-149.

Nayfeh, A.H. 1979 AIAA Paper No. 79-0262.

Orszag, S.A. 1971 *J. Fluid Mech.* 50, 689.

Orszag, S.A. & Kells, L.C. 1980 *J. Fluid Mech.* 96, 159.

Reshotko, E. 1976 *Ann. Rev. Fluid Mech.* 8, 311.

Schubauer, G.B. & Skramstad, H.K. 1948 NACA Rep. No. 909.