

或る種の対称対に於ける中零軌道の閉包について

東北大理 太田琢也 (Takuya Ohta)

§.0 序

Kraft, Procesi は古典型 Lie 環の中零軌道の閉包の特異点に於ける smoothly equivalence class をより次元の低い Lie 環の言葉で記述する方法を考案し、これを用いて閉包の極小退化に於ける特異点が或るアフィン代数多様体の孤立特異点に smoothly equivalent になることを指摘した。[3]
[4] また彼らは A 型 Lie 環の中零軌道の閉包が正規であることを証明し、[2] B, C, D 型 Lie 環の中零軌道の閉包が正規になるための十分条件を与えた。[4] この理論を対称対 $(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), \mathfrak{o}(n, \mathbb{C}))$, $(\mathfrak{gl}(2l, \mathbb{C}), \mathfrak{rg}(l, \mathbb{C}))$ に用いて類似の結果を得たので本稿ではこれについて解説する。尚、対称対 (symmetric pair) という言葉は関口 [7] では Lie 環が単純である場合にのみ用いられているが、本稿では Lie 環が reductive である場合まで許すことにする。本稿の $(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), \mathfrak{o}(n, \mathbb{C}))$, $(\mathfrak{gl}(2l, \mathbb{C}), \mathfrak{rg}(l, \mathbb{C}))$ についての結果はそのまま対称対 $(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), \mathfrak{o}(n, \mathbb{C}))$

($\mathfrak{gl}(2\ell, \mathbb{C}), \mathfrak{so}(\ell, \mathbb{C})$) についても成立することに注意しておく。

§1. 中零軌道の分類とその closure relation

定義 V を \mathbb{C} 上の有限次元ベクトル空間とする。 V には非退化な ε 形式 $(,)$ が与えられているとする。 ($\varepsilon = \pm 1$) このとき V を $(,)$ と対にして、 ε 型 quadratic space と呼ぶ。 ここに ε 形式とは $(u, v) = \varepsilon(v, u)$ ($\forall u, v \in V$) を満たす双線形形式のことである。 \square

U, V を ε 型 quadratic space とし、 $L(V, U) := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, U)$ と置く。 $X \in L(V, U)$ に対し、 $X^* \in L(U, V)$ を

$$(Xv, u)_U = (v, X^*u)_V \quad (\forall v \in V, \forall u \in U)$$

により定める。 $U = V$ のときには $X \mapsto -X^*$ は Lie 環 $\mathfrak{gl}(V)$ の involution となる。

$$\mathfrak{g}(V) := \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid -X^* = X\} \quad \mathfrak{f}(V) := \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid X^* = X\}$$

$$G(V) := \{g \in GL(V) \mid g^* = g^{-1}\}$$

とする。 $m := \dim V$ ($\varepsilon = -1$ のとき $m = 2\ell$) とすると

$$(\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{g}(V)) \cong (\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}), \mathfrak{o}(m, \mathbb{C})) \quad (\varepsilon = 1)$$

$$(\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{g}(V)) \cong (\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}), \mathfrak{so}(\ell, \mathbb{C})) \quad (\varepsilon = -1)$$

また関口 [17] に於ける K_0 は $\text{Ad}(G(V))$ に一致する。 よって以

後, 対称対 $(\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}), \sigma(m, \mathbb{C}))$, $(\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}), \rho(l, \mathbb{C}))$ を考える代わりに対称対 $(\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{g}(V))$ (とその中零 $G(V)$ 軌道) を考えることにする。

m の分割の全体を $P(m)$ で表す。この元をヤング図形と同一視する。 $\eta \in P(m)$ に対応する中零 $GL(V)$ 軌道を C_η で表し,

$$C_{\varepsilon, \eta} := \mathfrak{z}(V) \cap C_\eta$$

とする。

$$\text{定義 } P_\varepsilon(m) := \begin{cases} P(m) & (\varepsilon = 1) \\ P(l)^2 = \{(a_1, a_1, a_2, a_2, \dots) \in P(m)\} & (\varepsilon = -1) \end{cases}$$

として, $P_\varepsilon(m)$ の元を ε 図形と呼ぶことにする。

命題.1 $\eta \in P(m)$ に対して

$$C_{\varepsilon, \eta} \neq \emptyset \iff \eta \in P_\varepsilon(m)$$

が成り立つ。また $C_{\varepsilon, \eta}$ は 1 つの $G(V)$ 軌道を成す。従って $\mathfrak{z}(V)$ の中零 $G(V)$ 軌道は $P_\varepsilon(m)$ で分類される。(関口 [7]) \square

$P(m)$ に次の様な半順序を入れる。

定義 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots) \in P(m)$ について

$$\eta \geq \sigma \stackrel{\text{定義}}{\iff} \sum_{i=1}^j \eta_i \geq \sum_{i=1}^j \sigma_i \quad (\forall j \geq 1)$$

注意.1 $\eta \in P(m)$ の第 i 列の長さを $\hat{\eta}_i$ と書くとき

$$\eta \geq \sigma \iff \sum_{i=1}^j \hat{\eta}_i \geq \sum_{i=1}^j \hat{\sigma}_i \quad (\forall j \geq 1) \quad [3] \quad \square$$

命題.2 $\eta, \sigma \in P_{\mathbb{C}}(n)$ に対して

$$\overline{C_{\mathbb{C}, \eta}} \supset C_{\mathbb{C}, \sigma} \iff \eta \geq \sigma$$

が成り立つ。ここに位相は Zariski 位相である。(ε=1, 関口 [7])

この証明は略す。

§ 2. $\mathfrak{g}(V)$ の中環 $G(V)$ 軌道の閉包に於ける smoothly equivalence class.

2.1 Smoothly equivalence class

代数多様体 X とその点 x を対にした (X, x) を点付き多様体と呼ぶ。点付き多様体の全体に次の様な関係を定める。

定義 $(X, x), (Y, y)$ を点付き多様体とする。 (X, x) が (Y, y) に smoothly equivalent であるとは、点付き多様体 (Z, z) と z で smooth な射

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \psi \downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

で $\varphi(z) = x, \psi(z) = y$ とするものが存在することをいう。

注意 2 (i) 上の定義は点付き多様体の全体に同値関係を定める。 (X, x) の同値類を $\text{Sing}(X, x)$ で表す。 X に代数群 G が作用しているとき、 G 軌道 \mathcal{O} の2つの元 x, x' について

$\text{Sing}(X, x) = \text{Sing}(X, x')$ であるから、この同値類を

$\text{Sing}(X, \mathcal{O})$ で表す。

(ii) $(X, \alpha), (Y, \beta)$ を \mathbb{C} 上の点付き多様体とする。このとき
 "Sing $(X, \alpha) = \text{Sing}(Y, \beta)$ かつ $\dim_{\alpha} X = \dim_{\beta} Y + r$ " であることは
 次のことと同値である。"解析空間 X の α に於ける或る近傍
 と解析空間 $Y \times \mathbb{C}^r$ に於ける $(\beta, 0)$ の或る近傍は biholomorphic
 になる。"ここに $\dim_{\alpha} X$ は X の α での次元, r は非負整数とす
 る。[4]

(iii) Sing $(X, \alpha) = \text{Sing}(Y, \beta)$ のとき, 次の X の α に於ける性
 質は同じ性質を $\beta \in Y$ に引き起こす。: smoothness, 正規性
 Cohen-Maculay の性質。[4] ▣

次の定理がこの節の主定理である。

定理 ε 退化 $\sigma \leq \eta$ (σ, η は ε 図形) は ε 退化 $\sigma' \leq \eta'$ に左上から
 同じ行と列を加えることにより得られるものとする。このと
 き

$$\text{Sing}(\overline{C_{\varepsilon, \eta}}, C_{\varepsilon, \sigma}) = \text{Sing}(\overline{C_{\varepsilon, \eta'}}, C_{\varepsilon, \sigma'})$$

である。 ▣

以下この定理の証明の概要を解説する。

2.2 列の除去

U, V を ε 型 quadratic space とする。 U と V の ε 形式を区
 別するために, $(,)_U, (,)_V$ と記す。 $X \in L(V, U)$ に対し
 て $XX^* \in \mathfrak{F}(U), X^*X \in \mathfrak{F}(V)$ が容易に判る。よって 2 つの
 射

$$\begin{array}{ccc}
 L(V, U) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{P}(U) \\
 \rho \downarrow & & \\
 \mathcal{P}(V) & & \begin{array}{l} \pi(X) = XX^* \\ \rho(X) = X^*X \quad (X \in L(V, U)) \end{array}
 \end{array}$$

が定義できる。 $X \in L(V, U)$, $(g, h) \in G(U) \times G(V)$ に対し

$$(g, h) \cdot X := gXh^{-1}$$

とすることにより $G(U) \times G(V)$ は $L(V, U)$ に作用する。また $G(U) \times G(V)$ は一方の群の作用を自明にすることにより $\mathcal{P}(V)$ $\mathcal{P}(U)$ に作用する。 π, ρ が $G(U) \times G(V)$ 同変写像であることが容易に判る。

定義 G を reductive な代数群, X, Y をアフィン代数多様体とし X には G が作用しているとする。射 $\varphi: X \rightarrow Y$ が G による商写像であるとは

$$\varphi^*: \mathbb{C}[Y] \cong \mathbb{C}[X]^G \hookrightarrow \mathbb{C}[X]$$

が成り立つことをいう。ここに $\mathbb{C}[X]^G$ は G で不変な $\mathbb{C}[X]$ の元の全体を表す。 □

注意 3 (i). $X_1 \subset X$ が G 不変な閉集合ならば, $\varphi(X_1)$ は Y の閉集合である。また $\varphi|_{X_1}: X_1 \rightarrow \varphi(X_1)$ は G による商写像である。

[6]

(ii) X が正規多様体ならば Y もそうである。

定理 1 $m = \dim U$, $n = \dim V$, $m \leq n$ とする。このとき π は全射で、さらに $G(V)$ による商写像である。また

$$P(L(V, U)) = \{X \in \mathcal{L}(V) \mid \text{rank } X \leq m\}$$

であり $P: L(V, U) \rightarrow P(L(V, U))$ は $G(U)$ による商写像である。

証明) π, P の像についての主張は行列の計算により確かめられる。また π, P が商写像であることは [1] Theorem 5.6(i) 及び Theorem 6.6 より判る。 q.e.d

以下 $D \in C_{\varepsilon, m}(\mathcal{L}(V))$, η は ε 図形) を 1 つとって固定する。

$U := \text{Im } D$ とする。 U 上の双線形形式 $(,)_U$ を

$$(Du, Dv)_U := (u, Dv)_V \quad (u, v \in V)$$

により定義することができて、 $(,)_U$ は非退化な ε 形式となる。

よって U は ε 型 quadratic space である。

$$X^\circ := D: V \rightarrow U \in L(V, U)$$

とし、

$$I: U \hookrightarrow V \in L(U, V)$$

を包含写像とする。 $v, u \in V$ に対して

$$\begin{aligned} (v, (X^\circ)^*(Du))_U &= (X^\circ v, Du)_U = (Dv, Du)_U = (u, Dv)_U \\ &= (v, I(Du))_U \end{aligned}$$

であるから $(X^\circ)^* = I$ である。従って

$$D = IX^{\circ} = (X^{\circ})^* X^{\circ}, \quad D' := D|_{U} = X^{\circ} I = X^{\circ} (X^{\circ})^* \in \mathfrak{g}(U)$$

D' のヤング図形 η' は η から第 1 列を除くことにより得られる ε 図形だから $D' = X^{\circ} (X^{\circ})^* \in C_{\varepsilon, \eta'}$ である。

この状況のもとに前の 2 つの写像 π, ρ を考える。

$L'(V, U) := \{X \in L(V, U) \mid X \text{ は全射}\}$, $\dim V = n, \dim U = m$ とする。

補題 1 $Y \in L'(V, U)$ とする。 Y の $G(U)$ に於ける固定化群 $G(U)_Y$ は自明である。また $\rho^{-1}(\rho(Y))$ は 1 つの $G(U)$ 軌道 ε を成す。

(証明) 前半は明らか。 $Z \in \rho^{-1}(\rho(Y))$ とする。 Y は全射より Y^* は単射である。故に

$$\text{rank } Z^* Z = \text{rank } Y^* Y = \text{rank } Y = m$$

よって $\text{rank } Z = \text{rank } Z^* = m$, Z は全射, Z^* は単射である。

$$\text{ker } Z = \text{ker}(Z^* Z) = \text{ker}(Y^* Y) = \text{ker } Y$$

より $GL(U)$ の元 g で, $gZ = Y$ となるものが存在する。

$$Z^* Z = Y^* Y = Z^* g^* g Z$$

Z が全射, Z^* が単射より $g^* g = 1$. よって $g \in G(U)$ g.e.d

補題 2 $\sigma \in \sigma \leq \eta$ が $\hat{\sigma} = \hat{\eta}$ なる ε 図形とし, σ, η' をそれぞれ σ, η から第 1 列を除くことにより得られる ε 図形とする。

$$N_{\varepsilon, \eta} := \pi^{-1}(\overline{C_{\varepsilon, \eta'}})$$

とするとき次のことが成り立つ。

$$\left(\begin{array}{c} L(V, U) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{P}(U) \supset C_{\varepsilon, \eta'} \\ \downarrow \\ \mathfrak{P}(V) \supset C_{\varepsilon, \eta} \end{array} \right)$$

$$(i) \quad \rho(N_{\varepsilon, \eta}) = \overline{C_{\varepsilon, \eta}}$$

(ii) $\rho^{-1}(C_{\varepsilon, \sigma})$ は $N_{\varepsilon, \eta} \cap L'(V, U)$ に含まれる1つの $G(U) \times G(V)$ 軌道を成す。

$$(iii) \quad \pi(\rho^{-1}(C_{\varepsilon, \sigma})) = C_{\varepsilon, \sigma'}$$

証明). (i) $\rho(X^0) = (X^0)^* X^0 = D \in C_{\varepsilon, \eta}$ $\pi(X^0) = X^0 (X^0)^* \in C_{\varepsilon, \eta'}$ であるから $\rho(N_{\varepsilon, \eta}) \supset C_{\varepsilon, \eta}$ 。 $N_{\varepsilon, \eta}$ は $G(U)$ 不変かつ閉、 ρ は $G(U)$ による商写像より $\rho(N_{\varepsilon, \eta})$ は閉である。(注意3(ii)) 従って $\rho(N_{\varepsilon, \eta}) \supset \overline{C_{\varepsilon, \eta}}$ 。

逆に $Y \in N_{\varepsilon, \eta}$ に対して $\pi(Y) = Y Y^* \in \overline{C_{\varepsilon, \eta'}}$ より

$$\text{rank}(Y Y^*)^{h-1} \leq \sum_{i>h} \hat{\eta}_i = \sum_{i>h} \tilde{\eta}_i \quad (\text{注. } \hat{\eta}_i = \tilde{\eta}_{i+1})$$

$\rho(Y) = Y^* Y$ の ε 図形を ν とするとき

$$\sum_{i>h} \hat{\nu}_i = \text{rank}(Y^* Y)^h = \text{rank} Y^* (Y Y^*)^{h-1} Y \leq \text{rank}(Y Y^*)^{h-1} \leq \sum_{i>h} \hat{\eta}_i$$

故に $\nu \leq \eta$ 。 $\rho(Y) \in \overline{C_{\varepsilon, \eta}}$

(ii), (iii). $Y \in \rho^{-1}(C_{\varepsilon, \sigma})$ をとる。 $Y \in L'(V, U)$ が判る。補題1より

$$\rho^{-1}(C_{\varepsilon, \sigma}) = \rho^{-1}(\text{Ad}(G(V)).\rho(Y)) = \rho^{-1}(\rho(Y)).G(V) = G(U).Y.G(V)$$

よって $\rho^{-1}(C_{\varepsilon, \sigma}) \subset L'(V, U)$ は1つの $G(U) \times G(V)$ 軌道を成す。

$\pi(Y) = Y Y^*$ の ε 図形を ν とする。 Y は全射, Y^* は単射である

ことに注意すると

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq h} \hat{\sigma}'_i &= \sum_{i \geq h} \hat{\sigma}_i = \text{rank}(Y^* Y)^h = \text{rank} Y^* (Y Y^*)^{h-1} Y = \text{rank} (Y Y^*)^{h-1} \\ &= \sum_{i \geq h} \hat{\nu}_i \quad (\forall h \geq 1) \end{aligned}$$

故に $\sigma' = \nu$, $\pi(P^{-1}(C_{\varepsilon, \sigma})) = C_{\varepsilon, \sigma'}$ である。特に $\sigma' \leq \eta'$ より
 $\pi(P^{-1}(C_{\varepsilon, \sigma})) \subset \overline{C_{\varepsilon, \eta'}}$ である。 g.e.d

定理 2 ε 退化 $\sigma \leq \eta$ は ε 退化 $\sigma' \leq \eta'$ に左からいくつかの同じ列を加えることにより得られるものとする。このとき

$$\text{Sing}(\overline{C_{\varepsilon, \eta}}, C_{\varepsilon, \sigma}) = \text{Sing}(\overline{C_{\varepsilon, \eta'}}, C_{\varepsilon, \sigma'})$$

証明) 帰納法により $\sigma \leq \eta$ は $\sigma' \leq \eta'$ に 1 列を加えることにより得られると仮定してよい。 $D \in C_{\varepsilon, \eta} \subset \mathbb{P}(V)$, $U := D(V)$ として前の写像

$$\begin{array}{ccc} L(V, U) & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}(U) \\ \downarrow P & & \downarrow P \\ \mathbb{P}(V) & & \mathbb{P}(U) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\overline{C_{\varepsilon, \eta'}}) & \xrightarrow{\pi} & \overline{C_{\varepsilon, \eta'}} \\ \downarrow P & & \downarrow P \\ \overline{C_{\varepsilon, \eta}} & & \overline{C_{\varepsilon, \eta}} \end{array}$$

を考へる。 $\hat{\sigma}_1 = \hat{\eta}_1$ より

$$P^{-1}(C_{\varepsilon, \sigma}) \subset N_{\varepsilon, \eta} \cap L'(V, U). \quad \pi(P^{-1}(C_{\varepsilon, \sigma})) = C_{\varepsilon, \sigma'} \quad (\text{補題 2})$$

$X \in P^{-1}(C_{\varepsilon, \sigma})$ とすると, $\pi(X) \in C_{\varepsilon, \sigma'}$, $P(X) \in C_{\varepsilon, \sigma}$ より

$$\begin{array}{ccc} N_{\varepsilon, \eta} & \xrightarrow{\pi} & \overline{C_{\varepsilon, \eta'}} \\ \downarrow P & & \downarrow P \\ \overline{C_{\varepsilon, \eta}} & & \overline{C_{\varepsilon, \eta}} \end{array}$$

が X で smooth であることを示せばよい。

(1) $\pi: N_{\varepsilon, \eta} \rightarrow \bar{C}_{\varepsilon, \eta'}$ が X で smooth であること。

X が全射であることより $\pi: L(V, U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ の微分 $(d\pi)_x$ が全射であることが判る。故に $\pi: L(V, U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ は X で smooth である。

$$\begin{array}{ccc} N_{\varepsilon, \eta} = \pi^{-1}(\bar{C}_{\varepsilon, \eta'}) & \rightarrow & \bar{C}_{\varepsilon, \eta'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ L(V, U) & \rightarrow & \mathcal{F}(U) \end{array}$$

がファイバー積より $\pi: N_{\varepsilon, \eta} \rightarrow \bar{C}_{\varepsilon, \eta'}$ も X で smooth である。

(2) $\rho: N_{\varepsilon, \eta} \rightarrow \bar{C}_{\varepsilon, \eta}$ が X で smooth であること。

定理 1 より容易に $\rho(L') = \{E \in \mathcal{F}(V) \mid \text{rank } E = m\}$ が判る。 ($L' := L'(V, U)$) また $\dim V \geq \dim U$ より L' は $GL(V)$ の軌道である。作用は $(g, X) \mapsto Xg^{-1}$, $X \in L(V, U)$, $g \in GL(V)$) $GL(V)$ の $\mathcal{F}(V)$ への作用を $(g, A) \mapsto (g^*)^{-1} A g^{-1}$ ($g \in GL(V)$, $A \in \mathcal{F}(V)$) により定めると ρ は $GL(V)$ 同変で, $\rho|_{L'}: L' \rightarrow \rho(L')$ は次の形である。

$$GL(V)/H \rightarrow GL(V)/H'$$

ここに H, H' は $GL(V)$ の閉部分群で, $H < H'$ である。よって $\rho|_{L'}: L' \rightarrow \rho(L')$ は複素多様体の位相で局所自明かつファイバーは一斉に $G(U)$ に同型である。(補題 1) $L' \cap N_{\varepsilon, \eta}$ は $G(U)$ 不変な L' の閉集合より $\rho: L' \cap N_{\varepsilon, \eta} \rightarrow \rho(L' \cap N_{\varepsilon, \eta}) = \rho(L') \cap \bar{C}_{\varepsilon, \eta}$ は smooth である。よって $\rho: N_{\varepsilon, \eta} \rightarrow \bar{C}_{\varepsilon, \eta}$ も X で smooth である。

g.e.d

2.3 行の除去

この小節では行の除去の証明の概略を述べる。そのために cross section を定義する。

定義 代数多様体 X に代数群 G が作用しているとする。 X の $x \in X$ に於ける cross section とは局所閉部分多様体 $S \subset X$ であつて、 $x \in S$ かつ $G \times S \rightarrow X, (g, s) \mapsto gs$ が (e, x) で smooth になるものをいふ。

注意 4 (i) このとき $\text{Sing}(S, x) = \text{Sing}(X, x)$ である。

(ii) X がベクトル空間 W に含まれていて、 G の X への作用が G の W への線形作用から定まっているとする。 $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$ として

$W = \mathfrak{g} \cdot x \oplus N$ なるように余空間 N をとり

$$S := (W + x) \cap X$$

とすると S は X の x に於ける cross section である。

また X が既約、または equi-dimensional ならば

$$\dim_x S = \text{codim}_x G \cdot x$$

である。 ([4], 12.4)

定理 3 ε 退化 $\sigma \leq \eta$ は ε 退化 $\sigma' \leq \eta'$ に上からいくつかの行を加えることにより得られるものとする。このとき

$$\text{Sing}(\overline{C}_{\varepsilon, \eta}, (C_{\varepsilon, \sigma})) = \text{Sing}(\overline{C}_{\varepsilon, \eta'}, (C_{\varepsilon, \sigma'}))$$

である。

証明の概略) 加えられた行の成す ε 図形を V とする。

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_a, \sigma_{a+1}, \dots, \sigma_r), \quad V = (\sigma_1, \dots, \sigma_a), \quad \sigma' = (\sigma_{a+1}, \dots, \sigma_r)$$

とすると, $\eta = (V, \eta')$ である。 $E \in C_{\varepsilon, \sigma}(C_{\mathbb{F}}(V))$ に対して E 不変な V の部分空間 W, V' で次を満たすものが存在する。

- ① $V = W \perp V'$ ($(,)_V$ に関する直交直和)
- ② W, V' は $(,)_V$ の制限により ε 型 quadratic space となるが, $E = (F, E') \in \mathfrak{gl}(W) \oplus \mathfrak{gl}(V')$ と分解するとき
 $F \in C_{\varepsilon, \nu} \subset \mathfrak{F}(W), \quad E' \in C_{\varepsilon, \sigma'} \subset \mathfrak{F}(V')$

$$D' \in C_{\varepsilon, \eta'} \subset \mathfrak{F}(V'), \quad D := (F, D') \in \mathfrak{F}(W) \oplus \mathfrak{F}(V')$$

とすると $D \in C_{\varepsilon, \eta}$ である。

また $\mathfrak{gl}(V)$ の 4 つの部分空間 N, N', N_0, N_0' を次の様にとることができる。

- ③ $\mathfrak{gl}(V) = [\mathfrak{gl}(V), E] \oplus N, \quad \mathfrak{gl}(W) \oplus \mathfrak{gl}(V') = [\mathfrak{gl}(W) \oplus \mathfrak{gl}(V'), E] \oplus N'$
 $\mathfrak{F}(V) = [\mathfrak{gl}(V), E] \oplus N_0, \quad \mathfrak{F}(W) \oplus \mathfrak{F}(V') = [\mathfrak{gl}(W) \oplus \mathfrak{gl}(V'), E] \oplus N_0'$
- ④ $N \supset N', \quad N \supset N_0, \quad N' \supset N_0', \quad N_0 \supset N_0'$
- ⑤ $\mathfrak{F}(V) \cap N' = N_0'$

$$\mathcal{N} := (W + E) \cap \overline{GL(V).D}, \quad \mathcal{N}' := (W' + E) \cap \overline{(GL(W) \times GL(V')).D}$$

$$\mathcal{N}_0 := (N_0 + E) \cap \overline{G(V).D}, \quad \mathcal{N}_0' := (N_0' + E) \cap \overline{(G(W) \times G(V')).D}$$

とすると, これらはいずれも D の軌道の閉包の E に於ける cross section である。注意 4(ii) より

$$\dim_E \mathcal{N} = \text{codim } \overline{GL(V).D} \quad GL(V).E$$

$$\dim_E \mathcal{S}' = \text{codim}_{(\overline{GL(W) \times GL(V')}, D), (GL(W) \times GL(V')), E}$$

[3] Proposition 3.1 よりこの2本の式の右辺は一致することが判る。故に $\dim_E \mathcal{S} = \dim_E \mathcal{S}'$ である。A型 Lie環の中環軌道の正規性より $\overline{GL(V)}, D$ はEで正規である。ところが

$\text{Sing}(\mathcal{S}, E) = \text{Sing}(\overline{GL(V)}, D, E)$ より \mathcal{S} もEで正規である (注意 2(iii)) によって \mathcal{S}' と \mathcal{S} はEの或る近傍で一致する。

$$\begin{aligned} \mathcal{S}' \cap \mathfrak{g}(V) &= \{ \mathfrak{g}(V) \cap (N+E) \} \cap \{ \mathfrak{g}(V) \cap (\overline{GL(W) \times GL(V')}, D) \} \\ &= \{ (\mathfrak{g}(V) \cap N) + E \} \cap \{ \mathfrak{g}(W) \oplus \mathfrak{g}(V') \cap (\overline{GL(W) \times GL(V')}, D) \} \\ &= (N_0 + E) \cap \overline{(G(W) \times G(V')), D} = \mathcal{S}'_0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} \cap \mathfrak{g}(V) \supset \mathcal{S}_0 \supset \mathcal{S}'_0 = \mathcal{S}' \cap \mathfrak{g}(V)$$

故に \mathcal{S}_0 と \mathcal{S}'_0 もEの或る近傍で一致する。従って

$$\begin{aligned} \text{Sing}(\overline{G(V)}, D, E) &= \text{Sing}(\mathcal{S}_0, E) = \text{Sing}(\mathcal{S}'_0, E) \\ &= \text{Sing}(\overline{G(W) \times G(V')}, D, E) \end{aligned}$$

即ち $\text{Sing}(\overline{C_{\varepsilon, \eta}}, E) = \text{Sing}(\overline{C_{\varepsilon, \nu}} \times \overline{C_{\varepsilon, \eta'}}, (F, E'))$ である。

$F \in C_{\varepsilon, \nu}$ より F は $\overline{C_{\varepsilon, \nu}}$ の smooth な点である。よって

$$\text{Sing}(\overline{C_{\varepsilon, \eta}}, E) = \text{Sing}(\overline{C_{\varepsilon, \nu}} \times \overline{C_{\varepsilon, \eta'}}, (F, E')) = \text{Sing}(\overline{C_{\varepsilon, \eta'}}, E')$$

即ち $\text{Sing}(\overline{C_{\varepsilon, \eta}}, C_{\varepsilon, \omega}) = \text{Sing}(\overline{C_{\varepsilon, \eta'}}, C_{\varepsilon, \omega})$ を得る
g.e.d

2.4 極小退化に於ける smoothly equivalence class

ε 退化 $\sigma \leq \eta$ が隣り合っている (即ち $\sigma \leq \nu \leq \eta$ なる ε 図形が存在しない) とき $\sigma \leq \eta$ は極小であるという。いま $\eta \geq \sigma$ を極

ε 退化とする。これから左上の等しい行と列を除くことにより次の様な ε 退化 $\eta' \geq \sigma'$ を得る:

	(1)	(2)	(3)	(4)
ε	1	1	-1	-1
η'	(n)	(2, 1^{n-2})	(n, n)	($2^2, 1^{2n-4}$)
σ'	(n-1, 1)	1^n	(n-1, n-1, 1, 1)	1^{2n}
$\text{codim } \overline{C_{\varepsilon, \eta'}} C_{\varepsilon, \sigma'}$	1	n-1	4	4(n-1)

以下それぞれの場合について解説する。

$$(1) X := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^n + y^2 = 0\} \text{ とし}$$

$$\text{Sing}(\overline{C_{\varepsilon, \eta}}, C_{\varepsilon, \sigma}) = \text{Sing}(X, 0)$$

$$(3) Y := \{(x, y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{C}^5 \mid x^n + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0\} \text{ とし}$$

$$\text{Sing}(\overline{C_{\varepsilon, \eta}}, C_{\varepsilon, \sigma}) = \text{Sing}(Y, 0)$$

(2) \mathfrak{F} を対称対 $(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), \mathcal{O}(n, \mathbb{C}))$ に対応するベクトル空間として, $X^* := \{A \in \mathfrak{F} \mid A \text{ は中零かつ } A \text{ の } 2 \text{ 次小行列式は } 0\}$ とする

$$\text{とき } \text{Sing}(\overline{C_{\varepsilon, \eta}}, C_{\varepsilon, \sigma}) = \text{Sing}(X^*, 0)$$

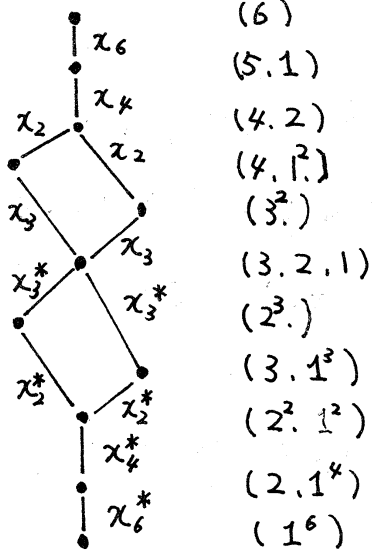
(4) \mathfrak{F} を対称対 $(\mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}), \mathfrak{F}(n, \mathbb{C}))$ に対応するベクトル空間として, $Y^* := \{A \in \mathfrak{F} \mid A \text{ は中零かつ } A \text{ の } 3 \text{ 次小行列式は } 0\}$ とする

$$\text{とき } \text{Sing}(\overline{C_{\varepsilon, \eta}}, C_{\varepsilon, \sigma}) = \text{Sing}(Y^*, 0)$$

(1)~(4) の smoothly equivalence class を順に x_n, x_n^*, y_n, y_n^* と書くことにする。例えば $(\mathfrak{gl}(6, \mathbb{C}), \mathcal{O}(6, \mathbb{C}))$, $(\mathfrak{gl}(12, \mathbb{C}), \mathfrak{F}(6, \mathbb{C}))$ に於ける中零軌道の closure relation 及び極小 ε 退化に於け

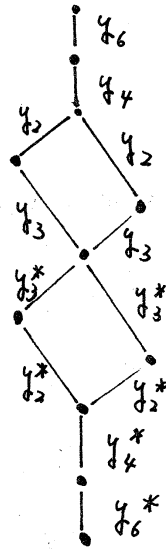
る smoothly equivalence class は次の様に存る。

$(\mathfrak{gl}(6, \mathbb{C}), \mathcal{O}(6, \mathbb{C}))$



(6)
 $(5, 1)$
 $(4, 2)$
 $(4, 1^2)$
 (3^2)
 $(3, 2, 1)$
 (2^3)
 $(3, 1^3)$
 $(2^2, 1^2)$
 $(2, 1^4)$
 (1^6)

$(\mathfrak{gl}(12, \mathbb{C}), \mathcal{O}(6, \mathbb{C}))$



$(6)^2$
 $(5, 1)^2$
 $(4, 2)^2$
 $(4, 1^2)^2$
 $(3^2)^2$
 $(3, 2, 1)^2$
 $(2^3)^2$
 $(3, 1^3)^2$
 $(2^2, 1^2)^2$
 $(2, 1^4)^2$
 $(1^6)^2$

(注. $x_2^* = x_2, y_2^* = y_2$)

§3 対称対 $(\mathfrak{gl}(2l, \mathbb{C}), \mathcal{O}(l, \mathbb{C}))$ の中零軌道の閉包の正規性

この節では ε はいつも -1 であるとしておく。

V を -1 型 quadratic space とする。 $D \in \mathcal{O}(V)$ は中零元で、 ε の $G(V)$ 軌道は $C_D = C_{-1, \eta}$ (η は -1 図形) であるとする。以下これを 1 つ固定しておく。 $V_1 := D(V)$ 上に非退化な -1 形式 $(,)_{V_1}$ を定めることにより V_1 は -1 型 quadratic space となるのであった。(2.2) また $X^0 := D|_V \in L(V, V_1)$ とすると

$$(X^0)^* = I|_{V_1} \hookrightarrow V \in L(V_1, V) \text{ (包含写像)}$$

$$D = I X^0 = (X^0)^* X^0 \in \mathcal{O}(V)$$

$$D' := D|_{V_1} = X I = X^0 (X^0)^* \in C_{-1, \eta} \subset \mathcal{O}(V_1)$$

となるのであった。ここに η は η から第 1 列を除いて得られる -1 図形である。これをくり返すことにより -1 型 quadratic space の列

$$V_0 = V, V_1 := D(V), \dots, V_t = D^t(V) \neq 0, V_{t+1} = D^{t+1}(V) = 0$$

ができる。 η^i を η から始めの i 列を除くことにより得られる -1 図形とすると $D|_{V_i} \in C_{-1, \eta^i} \subset \mathcal{F}(V_i)$ である。

$$M := L(V_0, V_1) \times L(V_1, V_2) \times \dots \times L(V_{t-1}, V_t)$$

として、次の (*) により定義される代数多様体 Z を考える。

$$Z = \{ (X_1, \dots, X_t) \in M \mid (*) \text{ を満たす} \}$$

$$(*) \begin{cases} X_1 X_1^* = X_2^* X_2 \\ X_2 X_2^* = X_3^* X_3 \\ \vdots \\ X_{t-1} X_{t-1}^* = X_t^* X_t \\ X_t X_t^* = 0 \end{cases}$$

$G(V_0) \times \dots \times G(V_t)$ は

$$(g_0, \dots, g_t)(X_1, \dots, X_t) := (g_1 X_1 g_0^{-1}, g_2 X_2 g_1^{-1}, \dots, g_t X_t g_{t-1}^{-1})$$

とすることにより M に作用する。明らかに Z は $G(V_0) \times \dots \times G(V_t)$ で不変である。

補題 3 (i) $(X_1, \dots, X_t) \in Z$ について

$$X_i^* X_i \in \overline{C_D} = \overline{C_{-1, \eta}}$$

である。従って写像

$$\theta: Z \rightarrow \overline{C_D}, \theta(X_1, \dots, X_t) = X_i^* X_i$$

が定義できる。 θ は $G(V_0)$ 同変写像である。

$$(ii) \quad X_i^{\circ} := D|_{V_{i-1}} : V_{i-1} \rightarrow V_i \in L(V_{i-1}, V_i)$$

とすると $(X_1^{\circ}, \dots, X_t^{\circ}) \in Z$ である。 $(X_1^{\circ})^* X_1^{\circ} = D$ であったから

$$\theta(Z) \supset C_D \text{ である。}$$

$$\begin{aligned} \text{証明) (i) } \operatorname{rank} (X_1^* X_1)^h &= \operatorname{rank} X_1^* (X_1 X_1^*)^{h-1} X_1 \leq \operatorname{rank} (X_1 X_1^*)^{h-1} \\ &= \operatorname{rank} (X_2 X_2^*)^{h-1} \end{aligned}$$

これをくり返すことにより

$$\operatorname{rank} (X_1^* X_1)^h \leq \operatorname{rank} (X_n^* X_n) \leq \operatorname{rank} X_n \leq \dim V_n = \operatorname{rank} D^h$$

よって $X_1^* X_1 \in \overline{C_D}$ 。後半は容易に示される。

$$(ii) \quad X_i^{\circ} (X_i^{\circ})^* = (D|_{V_{i-1}}) \circ (I : V_i \hookrightarrow V_{i-1}) = D|_{V_i}$$

$$(X_{i+1}^{\circ})^* X_{i+1}^{\circ} = (I : V_{i+1} \hookrightarrow V_i) \circ (D|_{V_i}) = D|_{V_i} \quad q, e, d$$

補題 4 (i) 代数多様体 Z は或る添数集合 Λ によって有限和

$$Z = \coprod_{\lambda \in \Lambda} Z_{\lambda} \text{ (disjoint union)}$$

と分解される。ここに Z_{λ} は以下の性質をもつ。

(a) Z_{λ} は $G(V_0) \times \dots \times G(V_t)$ 不変, smooth, かつ既約な部分多様体である。また $\theta(Z_{\lambda})$ は 1 つの $G(V_0)$ 軌道を成す。

(b) 或る $\lambda^{\circ} \in \Lambda$ があって

$$\theta^{-1}(C_D) = Z_{\lambda^{\circ}}$$

となる。また $M' = \{(X_1, \dots, X_t) \in M \mid \text{各 } X_i \text{ は全射}\}$ とすると

$$Z_{\lambda^{\circ}} \subset M'$$

$$(ii) \quad \operatorname{codim}_Z \theta^{-1}(C_{-1, \sigma}) \geq \frac{1}{2} \operatorname{codim}_{\overline{C_D}} C_{-1, \sigma} \quad (\sigma \leq n) \quad \blacksquare$$

補題4の証明は長くなるので略す。

定理4 (i) (*)で定義されるスキーム Z は既約, 被約 (従って代数多様体) から M で完全交叉である。

ii) 写像 $\theta: Z \rightarrow \overline{C}_D$, $\theta(X_1, \dots, X_t) = X_1^* X_1$ は全射でさらに $G(V_1) \times \dots \times G(V_t)$ による商写像である。

証明) 写像 $\zeta: M = \prod_{i=1}^t L(V_{i-1}, V_i) \rightarrow \prod_{i=1}^t \mathbb{P}(V_i) =: N$ を次の様に定める。

$$\zeta(X_1, \dots, X_t) = (X_1 X_1^* - X_2^* X_2, \dots, X_{t-1} X_{t-1}^* - X_t^* X_t, X_t X_t^*)$$

するとスキーム Z は ζ のスキーム論的ファイバー $\zeta^{-1}(0)$ に等しい。 $\alpha = (X_1, X_2, \dots, X_t) \in M'$ とするとき, ζ の α に於ける微分 $(d\zeta)_\alpha$ が全射であることが行列の計算により確かめられる。従って ζ は M' 上 smooth である。

$$X_i^0 = D|_{V_{i-1}}: V_{i-1} \rightarrow V_i \text{ は全射より}$$

$$(X_1^0, \dots, X_t^0) \in Z \cap M' =: Z'$$

よって $Z' \neq \emptyset$, $\text{codim}_M Z' = \dim N$ である。

$\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq \lambda^0$ とするとき $Z_\lambda \subset \theta^{-1}(C_{\varepsilon, \sigma})$ ($\exists \sigma \neq \varepsilon$) となるが, 補題4(ii)より $\dim Z > \dim Z_\lambda$ である。 $Z = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$ は有限和より $\dim Z = \dim Z_{\lambda^0}$ である。 $Z_{\lambda^0} \subset Z'$ より $\dim Z = \dim Z'$ 従って $\text{codim}_M Z = \dim N$ である。 故に Z は M で完全交叉である。 ($\Rightarrow \mathcal{J}_m \vee_m$)

Z_λ ($\lambda \in \Lambda$) は既約より $Z = \zeta^{-1}(0)$ の既約成分は $\overline{Z_\lambda}$ の形であるが

$\lambda \neq \lambda^0$ なら $\dim \bar{Z}_\lambda < \dim Z = \dim M - \dim N$ である。一方
 (ファイバー $\zeta^{-1}(0) = Z$ の既約成分の次元) $\geq \dim M - \dim N$
 より \bar{Z}_λ は既約成分ではあり得ない。よって Z の既約成分は
 \bar{Z}_λ に限る。即ち Z は既約である。

$M' \xrightarrow{\zeta} N$ は smooth であったから base change により

$$\zeta^{-1}(0) \cap M' = Z' \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}$$

も smooth である。故に Z は smooth な点をもつ。($\Rightarrow R_0$)

(S_1) と (R_0) より Z は被約である。(S_n, R_n については [5] 参照)

(ii). $L(V_{t+1}, V_t) \rightarrow \mathbb{P}(V_{t+1})$, $X_t \mapsto X_t^* X_t$ は $G(V_t)$ による商写像
 であった。(§2, 定理1). よって

$$\varphi_t: M \rightarrow \left[\prod_{i=1}^{t-1} L(V_{i+1}, V_i) \right] \times \mathbb{P}(V_t), (X_1, \dots, X_t) \mapsto (X_1, \dots, X_{t-1}, X_t^* X_t)$$

も $G(V_t)$ による商写像である。 Z は M の $G(V_t)$ 不変な閉集合よ
 り $\varphi_t(Z)$ は閉集合, $\varphi_t|_Z: Z \rightarrow \varphi_t(Z)$ は $G(V_t)$ による商写像
 である。(§2, 注意3(i)) ところが $(X_1, \dots, X_t) \in Z$ については

$X_{t+1} X_{t+1}^* = X_t^* X_t$ より $\varphi_t|_Z$ は射影 $\rho_t: Z \rightarrow \prod_{i=1}^{t-1} L(V_{i+1}, V_i)$ と同
 一視できる。この議論をくり返すことにより $\theta(Z)$ は \bar{C}_D の閉集
 合, $\theta: Z \rightarrow \theta(Z)$ は $G(V_1) \times \dots \times G(V_t)$ による商写像であること
 が判る。

$$(X_1^0, \dots, X_t^0) \in Z, \quad \theta(X_1^0, \dots, X_t^0) = D \text{ であったから}$$

$\theta(Z) \supset C_D$ であるが, $\theta(Z)$ は閉集合より $\theta(Z) \supset \bar{C}_D$ よ

$\theta: Z \rightarrow \overline{C_D}$ は全射である。

qed

定理 対称対 $(\mathfrak{gl}(2l, \mathbb{C}), \mathfrak{sp}(l, \mathbb{C}))$ に対応するベクトル空間

子に於ける巾零 $SP(l, \mathbb{C})$ 軌道の閉包は正規多様体である。

証明) $Z = Z_{\lambda^0} \amalg \left(\bigsqcup_{\sigma \neq \eta} \theta^{-1}(C_{-1, \sigma}) \right)$, $Z_{\lambda^0} = \theta^{-1}(C_{-1, \eta})$

$S(Z)$ を Z の singular locus とする。 Z_{λ^0} は smooth であつたから

$$S(Z) \subset \bigsqcup_{\sigma \neq \eta} \theta^{-1}(C_{-1, \sigma})$$

$\sigma \neq \eta$ なる -1 図形 σ の中で, $\dim \theta^{-1}(C_{-1, \sigma})$ が最大になるものを

σ_0 とすると $\dim S(Z) \leq \dim \theta^{-1}(C_{-1, \sigma_0})$ よつて

$$\text{codim}_Z S(Z) \geq \text{codim}_Z \theta^{-1}(C_{-1, \sigma_0}) \geq \frac{1}{2} \text{codim}_{\overline{C_{-1, \eta}}} C_{-1, \sigma_0}$$

$C_{-1, \sigma}$ (σ は -1 図形) の次元を与える公式より

$$\text{codim}_{\overline{C_{-1, \eta}}} C_{-1, \sigma_0} \geq 4$$

が確かめられる。これより

$$\text{codim}_Z S(Z) \geq 2.$$

故に Z は余次元 1 の特異点をもたない。 ($\Rightarrow R_1$) さらに Z は完

全交叉 ($\Rightarrow S_n \forall n \geq 1$) であつたから, 性質 (R_1) と (S_2) より Z は正規

多様体である。 $\theta: Z \rightarrow \overline{C_{-1, \eta}} = \overline{C_D}$ は $G(V_1) \times \dots \times G(V_t)$

による商写像であつたから $\overline{C_{-1, \eta}}$ も正規多様体である。 qed.

文献

[1] De Concini, C and Procesi, C: A characteristic free approach to invariant theory. *Adv. Math.*, 21 (1976). 330-354

[2] Kraft, H and Procesi, C: Closure of Conjugacy classes of matrices are normal, *Invent. Math.* 53 227-247 (1979)

[3] 同上: Minimal singularities in GL_n . *Invent. Math.* 62 (1981) 503-515

[4] 同上: On the geometry of conjugacy class in classical groups. *Comment Math Helv.* 57 (1982) 539-602

[5] Matsumura, H: *Commutative algebra* (second edition), The Benjamin, Cummings Publishing Company

[6] Mumford, D: *Geometric Invariant Theory*

Erg der Math 34. Berlin-Heidelberg-New
York: Springer Verlag 1970

[7]. Sekiguch, J: The nilpotent subvariety of the
vector spaces associated to a Symmetric pair
Publ, R.I.M.S. Kyoto Univ 20 (1984)
155-212