数理解析研究所講究録
第570巻 1985年 91-110

$Sp(n,\mathbb{R})$の指標等式と不変固有超関数の持ち上げについて

福井大学 教育 三上俊介 (Shunsuke Mikami)

§1. 序

Gを実連結半単純Lie群，πをGのtempered既約ユニタリ表現，その指標をΘ_πと表わす。離散系列表現の指標，及びcuspidal parabolic部分群からの誘導指標という方法により(少くともregular infinitesimal characterをもつ場合には)，Θ_πの形は知られている。ところが離散系列の指標の形を見ても，Θ_πのheightとよばれるCartan部分群（離散系列の場合はcompact Cartan部分群）上でのきれいな形から，heightより離れるに従ってCartan部分群上でのΘ_πの形は複雑なものになっていく。そこでより見易い形の指標の間の関係式があることが望まれる。

その様な指標の間の関係式を系統的に得る方法の1つが，D. Shelstadにより"stable temperedな不変固有超関数の持ち上げ"を用いて示された。[5] それはGといくつかの

Cartan部分群を共有する群（$(T,\mathcal{H})$-group とよばれるもの）との間の指標の間の関係式をGの各Cartan部分群上毎に与えるもので，そのうちのいくつかは

$$\sum \varepsilon_i \Theta_{\pi_i} = 0 \quad \text{on} \quad T \qquad \cdots\cdots \circledast$$

（TはGのあるCartan部分群）という形になる。そこで$\circledast$のような形の指標等式に着目したい。問題を正確に記述する為にいくつかの記号と用語を導入する。ΘをG上のtemperedな不変固有超関数（以下IEDと略記する）とする。Harish-Chandraの結果より，ΘはG上の局所可積分関数であり，G_{reg}（:= Gのregular elements全体）上で実解析関数になる。それをΘ'で表わすことにする。

$Car(G)$:= GのCartan部分群の共役類の全体

とし，GのCartan部分群Tに対し[T]でその属する共役類を表わす。$Car(G)$の中にreal rootに関するCayley変換を用いて順序を導入する。すなわち，T，T′をGのCartan部分群とし，$\mathfrak{t}, \mathfrak{t}'$でそのLie環とする。$\nu_\alpha(\mathfrak{t}_c) \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{t}'$のとき，$[T] < [T']$と定め，これをtransitiveに拡張して順序＜が定まる。（但し$\mathfrak{g}$はGのLie環，αは$(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$のreal root，$\nu_\alpha$は$\alpha$に関するCayley変換，$\mathfrak{t}_c$は$\mathfrak{t}$の複素化を表わす。）

$$C(\Theta) := \{ [T] \in Car(G);\quad \Theta'|_{T \cap G_{reg}} \neq 0 \}$$

とおく。$C(\Theta)$の今導入した順序に関するmaximal elements

全体を Θ の height とよぶ.

問題　Θ を G 上の tempered IED とする。ある Cartan 部分群 T ($[T]$ は Θ の height より低い) 上 $\Theta'|_{T\cap G_{reg}} \equiv 0$ となる様な Θ はどのくらいあるか. (これらは Shelstad により示された持ち上げの手法により尽くされるか, 云い換えると, ⊛ の型の指標等式は持ち上げの手法により尽くされるか?)

またこの様な等式が成り立つ為の必要十分条件を Θ の height 上で与えることができないか?

以下 §2 において, Shelstad の手法 (stable tempered IED の持ち上げ) を説明し, §3 において $G = Sp(n, \mathbb{R})$ の場合に上の問題に関し, 目下のところ得られている結果を述べる。

§2. stable tempered IED の持ち上げ

Shelstad [5] に従い, いくつかの記号を導入する。$\underline{G}$ を $\mathbb{R}$ 上定義された連結半単純線型代数群とし, その $\mathbb{R}$-rational points 全体を $\underline{G}(\mathbb{R})$ で表わす。以下 $G = \underline{G}(\mathbb{R})$ となる連結実半単純 Lie 群について考える。そのとき G の Cartan 部分群 T には, $\underline{G}$ の $\mathbb{R}$ 上定義された maximal torus $\underline{T}$ で $T = \underline{T}(\mathbb{R})$ となるも

のが対応する。

$$A(T) = \{ g \in \underline{G} ;\ \ \mathrm{ad}\, g_{|\underline{T}} \text{ が } \mathbb{R} \text{ 上定義される} \}$$

とおく。いま $\Gamma = Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ とすると $A(T)$ は次の様に云い換えることができる。

$$A(T) = \{ g \in \underline{G} ;\ \ \sigma(g^{-1})\, g \in \underline{T} \}\quad (\text{但し } e \neq \sigma \in \Gamma)$$

$$= \{ g \in \underline{G} ;\ \ gTg^{-1} \subset G \} .$$

$$\mathcal{D}(T) = G \backslash A(T) / \underline{T} .$$

<u>定義</u> G 上の tempered IED Θ が stable

$$\Leftrightarrow \quad \Theta'(t) = \Theta'(gtg^{-1}) \qquad {}^{\forall} t \in T \cap G_{reg},\ {}^{\forall} g \in A(T)$$

次に $(T, \varkappa)$-group（又は G の endoscopic group）とよばれる群 H の stable tempered IED の G への持ち上げを以下において説明する。

[㊟. ㊍の様な等式を考える場合，従って §3 の議論においては，H の形も重要ではあるが，$Car(H)$ の構造，及び H の stable tempered IED を G に持ち上げたとき，どの様なものが得られるかが必要になる。]

$\mathcal{C}(G)$ で G 上の急減少関数の空間を表わす。$f \in \mathcal{C}(G)$, $t \in T \cap G_{reg}$（T は G の Cartan 部分群）に対し "$\varkappa$- unstable orbital integral" $\Phi_f^{\varkappa}(t)$ を次のように定める。

$$\Phi_f^{\varkappa}(t) = \sum_{\omega \in \mathcal{D}(T)} \varkappa(\omega) \int_{G/T} f(g t^{\omega} g^{-1})\, d\bar{g}$$

（Harish-Chandra の結果より右辺の積分は収束する。）ここに

$\varkappa(\omega)$ は $\mathcal{D}(T)$ 上 $\{\pm 1\}$ の値をとる以下の様に構成される写像である。（特に $\varkappa \equiv 1$ のときは stable orbital integral とよばれる。）

すなわち $A(T) \ni g$ には $\Gamma \longrightarrow \underline{T}$ $(1 \mapsto 1,\ \sigma \mapsto \sigma(g^{-1})g)$ の 1-cocycle が対応する。従って $\mathcal{D}(T) \hookrightarrow H^1(\Gamma, \underline{T})$. 実際には、$\underline{G}$ の derived group を $\underline{G}_{der}$, その普遍被覆群を $\tilde{\underline{G}}$, $\underline{G}_{der}$ への projection を p

$\underline{T}_{sc} = p^{-1}(\underline{T} \cap \underline{G}_{der})$ とおくと $\mathcal{D}(T)$ は $H^1(\Gamma, \underline{T}_{sc}) \longrightarrow H^1(\Gamma, \underline{T})$ の像に含まれる。Tate-Nakayama の定理を適用して $\mathcal{D}(T) \hookrightarrow$ $\{\lambda^\vee \in \langle \Xi^\vee \rangle;\ \sigma_T \lambda^\vee = -\lambda^\vee\} / \mathcal{L}(T)$ となる。記号を説明する。

$\mathcal{L}(T) = \{\lambda^\vee \in \langle \Xi^\vee \rangle;\ \lambda^\vee = \sigma_T \mu^\vee - \mu^\vee$ for some $\mu^\vee \in X_*(\underline{T})\}$

$\Xi^\vee :=$ $(\underline{G}, \underline{T})$ の co-root 系

$X^*(\underline{T}) :=$ $\underline{T}$ の (rational) character module

$X_*(\underline{T}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(\underline{T}), \mathbb{Z})$

$\langle \Xi^\vee \rangle$ は $\Xi^\vee$ で生成される $X_*(\underline{T})$ の部分群

σ_T は $\underline{T}$ 上の σ の action から自然に誘導される $X_*(\underline{T})$ 上の σ の action を表わす。

いま $\varkappa \in \mathrm{Hom}(\langle \Xi^\vee \rangle, \mathbb{C}^\times)$, 但し $\varkappa(\mathcal{L}(T)) \equiv 1$ とすると、上の対応により、$\varkappa$ は $\mathcal{D}(T)$ 上 ± 1 の値をとる前述の写像を導く。（それを同じ記号で表わしておく。）

注.　α を $(\underline{G}, \underline{T})$ の non-compact imaginary root とし w_α を α に関する reflection を引きおこす $\underline{G}$ の元とするとき，Tate-Nakayama の duality において，$\mathcal{D}(T) \ni \langle w_\alpha \rangle \longmapsto \alpha^\vee + \mathcal{L}(T)$ が対応することが知られている。

詳細は Langlands [2], Shelstad [4] を参照していただくことにして，L-group を経由することにより，次の条件を満たす（$(T, \varkappa)$-group とよばれる）quasi-split reductive な代数群 $\underline{H}$ を構成できる。$\underline{H}$ は $\mathbb{R}$ 上定義され，$H = \underline{H}(\mathbb{R})$ とおく。

1)　$\dim H \leqq \dim G$,　$\operatorname{rank} H = \operatorname{rank} G$

2)　H は T（と同型な Cartan 部分群）を含み，$\varkappa$ を $\mathcal{D}_H(T)$ 上にうつすと，$\varkappa \equiv 1$ となる。

(i.e $(\underline{H}, \underline{T})$ の co-root 系を $\Xi_H^\vee$ $(\subset \Xi^\vee)$ とすると $\varkappa|_{\Xi_H^\vee}$ に対応する $\mathcal{D}_H(T)$ 上の写像は恒等的に 1 になる。)

以後，いままでの $(T, \varkappa)$ の代りに $(T_0, \varkappa_0)$ と表わすことにする。§3 の為にも $Sp(n, \mathbb{R})$ の場合の例をあげておく。

例　$G = Sp(n, \mathbb{R})$　$\underline{G} = Sp(n, \mathbb{C})$,　$T_0 :=$ G の compact Cartan 部分群の場合　（このとき $\sigma_{T_0} = (-1) \times id$ となる。）

$\Xi^\vee = B_n$ 型のルート系 $= \{ \pm e_i \pm e_j \ (1 \leq i < j \leq n),\ \pm e_i \ (1 \leq i \leq n) \}$

従って $\varkappa_0$ は各 e_j での値により定まる。いま $\varkappa_0(e_1) = \cdots = \varkappa_0(e_k) = -1$,　$\varkappa_0(e_{k+1}) = \cdots = \varkappa(e_n) = 1$　とする。このときの $(T_0, \varkappa_0)$-group

を $\underline{H}$ とおくと，$\Xi_H^\vee = \{\alpha^\vee \in \Xi^\vee ;\ \varkappa_0(\alpha^\vee) = 1\}$。故に $\Xi_H^\vee$ は B_{n-1} 型 $(k=1)$，または $D_k \times B_{n-k}$ 型 $(k \geq 2)$ のルート系となる。従って $(\underline{H}, \underline{T})$ のルート系は C_{n-1} 型 または $D_k \times C_{n-k}$ 型 の quasi-split な群になる。（一般に quasi-split reductive な代数群 $\underline{G}^*/_{\mathbb{R}}$ に対し，その $\mathbb{R}$ 上定義された Borel 部分群を $\underline{B}^*$，$\underline{B}^*$ に含まれる $\mathbb{R}$ 上定義された maximal torus を $\underline{T}^*$ とおく。Σ^+ で $(\underline{G}^*, \underline{T}^*)$ のルート系の positive system で $\underline{B}^*$ に対応するものとすると，$\sigma = \sigma_{\underline{T}^*}$ は Σ^+ を不変にする。この action を $\sigma_{\underline{G}^*}$ と書くことにすると 今の場合，$\underline{G}^* = \underline{H}$，$\sigma_H = w_0^{-1} \cdot \sigma_{T_0}$（$w_0$ は $\Xi_H^\vee$ の Weyl 群の最長元）で与えられ，また $X_H^*(\underline{T}) = X_G^*(\underline{T})$ になっている。従って B_{n-1} 型 のときは，$H \cong Sp(n-1, \mathbb{R}) \times \mathbb{T}$ となる。）

このとき，G のいくつかの Cartan 部分群と，H のいくつかの Cartan 部分群の間に対応がつくことが重要である。すなわち，

$$^\exists \{ [T'_m] ;\ m = 0, 1, \cdots, N \} \subset Car(H)$$

$$^\exists \{ [T_m] ;\ m = 0, 1, \cdots N \} \subset Car(G)$$

$^\exists$ $i_m : \underline{T}'_m \longrightarrow \underline{T}_m$ $(m = 0, 1, \cdots, N)$; $\mathbb{R}$ 上定義された同型写像

注1. $\underline{G}$ 自身 quasi-split の場合は $\underline{H}$ も $\underline{T}^*$ を（$\mathbb{C}$ 上の maximal torus として）含み，$i_m = \mathrm{ad}\, g^{-1} \circ \mathrm{ad}\, h$ という形で得られる。

但し. $g \in \underline{G}$; $\mathrm{ad}\, g : \underline{T}_m \longrightarrow \underline{T}^*$

$h \in \underline{H}$; $\mathrm{ad}\, h : \underline{T}_m' \longrightarrow \underline{T}^*$

$$\begin{tikzcd}
\underline{H} \supset \underline{T}^* \arrow[r, "id"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \underline{T}^* \subset \underline{G} \arrow[d, "\mathrm{ad}\, g^{-1}"] \\
\underline{T}_m' \arrow[u, "\mathrm{ad}\, h"] \arrow[r, dashed, "i_m"'] & \underline{T}_m
\end{tikzcd}$$

注2. $[T_m']$ $(m=0,1,\cdots,N)$ はすべて相異なるが, $\mathrm{Car}(G)$ の中の $\{[T_m]\}$ には一致するものもありうる。

注3. 序において, いくつかの Cartan 部分群を共有するといったのは, 上述のことを意味する。

便宜上, この様な $\mathbb{R}$ 上の同型写像 $i_0, \cdots, i_N$ を固定して考える。また H の Cartan 部分群 T' が $[T'] = [T_k']$ となる k $(0 \le k \le N)$ があるとき, T' は G に (または $[T_k]$ に) originate するとよぶ。

更に $\varkappa_0$ はもともと $\mathcal{D}(T_0)$ 上の ± 1 の値をとる写像であったが, $\mathbb{R}$ 上の同型写像 i_m を用いて, $\langle \Xi_m^\vee \rangle$ 上の, 従って $\mathcal{D}(T_m)$ 上の写像 $\varkappa_m$ が次の様に構成できる。すなわち, まず $h \in \underline{H}$ s.t $\mathrm{ad}\, h(\underline{T}_m') = \underline{T}_0'$ となる様な元 h を1つ選び, $\bar{h} = i_0 \circ \mathrm{ad}\, h \circ$

$$\begin{tikzcd}
\underline{T}_0' \arrow[r, "i_0"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & T_0 \\
\underline{T}_m' \arrow[u, "\mathrm{ad}\, h"] & \underline{T}_m \arrow[l, "i_m^{-1}"'] \arrow[u, dotted, "\bar{h}"']
\end{tikzcd}$$

i_m^{-1} とおくと, $\bar{h}(\underline{T}_m) = \underline{T}_0$ となり $\bar{h}$ は自然に $(\underline{G}, \underline{T}_m)$ の co-root 系 $\Xi_m^\vee$ の元 $\alpha^\vee$ を $(\underline{G}, \underline{T}_0)$ の co-root 系の元にうつす。それを $\bar{h} \cdot \alpha^\vee$ と書くことにし, $\varkappa_m \in \mathrm{Hom}(\langle \Xi_m^\vee \rangle, \mathbb{C}^\times)$ を $\varkappa_m(\alpha^\vee) = \varkappa_0(\bar{h} \cdot \alpha^\vee)$ により定める。このとき $\varkappa_m$ は h のとり方に依らずに, しかも $\mathfrak{d}(T_m)$ 上 1 となることがわかり, $\varkappa_m$ は

$\mathfrak{D}(T_m)$ 上の ± 1 の値をとる写像を定めることがいえる。以下特に誤解を生じないときには $\varkappa_m$ $(m=0,\cdots,N)$ を区別せず，$\varkappa$ と書くことにする。

Proposition 1. (Shelstad [5])

G を単連結とする。このとき $\left(\bigcup_{m=0}^{N} T_m\right) \cap G_{reg}$ 上の関数 $\Delta_H^G(t)$ で次の条件 $(**)$ を満足するものが存在する。

" $\forall f \in \mathcal{C}(G)$ に対して $\exists f_H \in \mathcal{C}(H)$ s.t

$$(**) \quad \Phi'_{f_H}(t') = \begin{cases} \Delta_H^G(t)\,\Phi_f^{\varkappa}(t) & \text{if} \quad i_m(t') = t \in G_{reg} \\ 0 & \text{if} \quad t' \in H_{reg} \text{ かつ } t' \text{ を含む } H \text{ の Cartan 部分群が } G \text{ に originate しない。} \end{cases}$$ "

この $\mathcal{C}(G)$ と $\mathcal{C}(H)$ との対応 (f, f_H) の dual を考えたのが stable tempered IED の持ち上げである。すなわち

定義　H 上の stable tempered IED Θ_H に対し，その G への持ち上げとよばれる tempered な超関数，$\mathrm{Lift}\,\Theta_H$ を次の様に定義する。

$$\forall f \in \mathcal{C}(G) \text{ に対し,} \qquad \mathrm{Lift}\,\Theta_H(f) = \Theta_H(f_H) .$$

注．f に対して f_H は一意的に定まるわけではないが，Θ_H が stable であることより，$\mathrm{Lift}\,\Theta_H$ は f_H のとり方に依らず，well-defined である。更に $\mathrm{Lift}\,\Theta_H$ は G 上の tempered IED になる。

次に持ち上げと指標等式の関連について述べる。その前に stable tempered IED の例を与えておく。[3]

例1. 離散系列の場合 (T_0' が compact Cartan 部分群とする。)

Λ を T_0' の unitary character とし、λ をその微分、$\mu=\lambda+\rho$ とおく。(但し、ρ は λ が dominant になる様な $(\underline{H}, \underline{T}_0')$ のルート系の positive system Ψ に関する positive roots の和の半分)

$$\chi_\varphi = \sum_{w \in W(H,T_0')\backslash W(\underline{H},\underline{T}_0')} \Theta_H(w\mu, w\Psi)$$

とおくと、χ_φ は stable tempered IED になる。但し、$\Theta_H(\mu.\Psi)$ は H の離散系列の指標で、その T_0' 上の形が

$$\Theta_H(\mu.\Psi)'(\exp X) = (-1)^{q_H}\Big(\sum_{s\in W(H,T_0')} \det s\cdot e^{(s\mu-\rho)(X)}\Big)\Big/\prod_{\alpha\in\Psi}(1-e^{-\alpha(X)})$$

となるものである。また $N_H(T_0')$ で H における T_0' の normalizer を表わし、$W(H.T_0')=N_H(T_0')/T_0'$, $W(\underline{H},\underline{T}_0')=N_{\underline{H}}(\underline{T}_0')/\underline{T}_0'$ ($\cong$ $(\underline{H},\underline{T}_0')$ のルート系の Weyl 群) とする。

例2. 線型 reductive algebraic group $\underline{H}/_{\mathbb{R}}$, $H=\underline{H}(\mathbb{R})$ とし、T をその Cartan 部分群, Λ を T の unitary character とする。$\underline{T}$ の maximal $\mathbb{R}$-split subtorus を $\underline{S}(T)$ と書く。

$\underline{M} = Z_{\underline{G}}(\underline{S}(T))$ ($\underline{G}$ における $\underline{S}(T)$ の centralizer),

$M=\underline{M}(\mathbb{R})$, M を Levi 部分群にもつ parabolic 部分群を

$P = MN$ とする.

$M^+ :=$ M の derived group の単位元を含む連結成分.

$T^+ = T \cap M^+$, (このとき $T = T^+ \cdot Z_M$, Z_M は M の中心)

λ を $\Lambda|_{T^+}$ の微分, $\mu = \lambda + \rho$ (但し ρ は λ が dominant になる様な $(\underline{M}, \underline{T})$ のルート系の positive system に関する positive roots の和の半分) とおく。Harish-Chandra により示された, μ に対応する M^+ の離散系列表現を $\pi(\lambda, \rho)$, $\pi(\Lambda, \rho) = \operatorname{Ind}_{Z_M M^+ \uparrow M} \pi(\lambda, \rho) \otimes \Lambda|_{Z_M}$ とおくと, 表現

$$\operatorname{Ind}_{P \uparrow H} \left(\sum_w \pi(w\Lambda, w\rho) \right) \otimes 1_N$$

の指標 χ が H の stable tempered IED になる。$\sum$ の中の w は $W(M, T) \backslash W(\underline{M}, \underline{T})$ をわたる。

一般に $\varphi = \langle \Lambda \rangle = \{ \Lambda \circ \mathrm{ad}\, k^{-1} ;\ k \in A(T) \}$ とおくと, この様にして, φ に対し stable tempered IED $\chi_\varphi = \chi$ が構成できる。特に T が compact のときが例1の場合にあたる。

更に [5] において Shelstad は Lift χ_φ を G の既約指標の符号つきの和 (同じ "L-packet" に属する既約ユニタリ表現の指標の符号つきの和) として表わす公式を与えた。特に χ_φ が例1のとき, Lift χ_φ も regular infinitesimal character をもてば,

$$\operatorname{Lift} \chi_\varphi = \varepsilon \cdot \sum_{w \in W(G, T_0) \backslash W(\underline{G}, \underline{T_0})} \varkappa(ww^*)\, \Theta_G(ww^* \mu_a, w\Psi_a)$$

と表わされる。ただし，$\mu_G - \rho_G$ は T_0 のある unitary character の微分になっていて，μ_G は μ 及び $(T_0, \varkappa_0)$-group の構成より定まる $\sqrt{-1}\mathfrak{t}_0^*$ の元である。($\mathfrak{t}_0$ は T_0 の Lie 環，$\mathfrak{t}_0^*$ はその dual.)
(§3 の $G = Sp(n, \mathbb{R})$ の場合は $\mu_G = \mu$ とできる。) また w^* は $w^*\mu_G$ が Ψ_G に関して dominant になる様な $W(\underline{G}, \underline{T_0})$ の元であり、ε は $+1$ または -1 を表わす。

指標等式に関しては，次の命題が [5] において示された。

<u>Proposition 2</u>. (Shelstad [5])

1°) $\varphi = \langle \Lambda \rangle$，$\Lambda$ が H のある Cartan 部分群 T' 上の unitary character であって，T' が G に originate しないときは，

$$\mathrm{Lift}\, \chi_\varphi \equiv 0 .$$

2°) $\varphi = \langle \Lambda \rangle$，$\Lambda$ が T' 上の unitary character で，T' が G に originate するとき，

a) $\gamma \in T_j \cap G_{reg}$ ならば

$$\mathrm{Lift}\, \chi_\varphi{}'(\gamma) = \varepsilon_j \sum_{m;\, i_m(\gamma') = \gamma} \ \sum_{w \in W_0(\underline{G}, \underline{T_j}) / W_0(\underline{H}, \underline{T_m'})} \varkappa_m(w)\, \Delta_m^{H|G}(\gamma^w)\, \chi_\varphi(\gamma'^w)$$

但し，$W_0(\underline{G}, \underline{T_j}) = \{ w \in W(\underline{G}, \underline{T_j}) ;\ w\sigma = \sigma w \}$，

$$\Delta_m^{H|G}(\gamma) = \eta_m \Delta_H^G \prod_{\alpha \in \Delta(\underline{H}, \underline{T_m'})} |1 - \alpha(\gamma'^{-1})| \Big/ \prod_{\alpha \in \Delta(\underline{G}, \underline{T_j})} |1 - \alpha(\gamma^{-1})| ,$$

$\Delta(\underline{G}, \underline{T_j})$ は $(\underline{G}, \underline{T_j})$ のルート系，$\varepsilon_j, \eta_m = +1$ または -1 .

b) $[T] \in Car(G)$, T に originate する H の Cartan 部分群が存在しないとき

$$\mathrm{Lift}\, \chi_\varphi' \equiv 0 \qquad (\text{on } T \cap G_{reg})$$

注1. §3で扱う $G=Sp(n,\mathbb{R})$ のときは、$\underline{G}$ が split であり、1°) の case は生じない。

注2. 2) の b) については (**) の直接的帰結である。

序において述べた様に、(*) の型の指標等式が、この様にして一定の手続きにより、多く構成できる（2°) の b) の形）ことがわかる。従って序に掲げた問題の前半は (*) の型の指標等式が上述の方法により得られるもので尽きているかどうかを調べることになる。

§3. $Sp(n,\mathbb{R})$ の指標等式

以後 $\underline{G} = Sp(n,\mathbb{C}) = \{ g \in GL(2n,\mathbb{C}) \;;\; {}^t g J g = J \}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$, $G = Sp(n,\mathbb{R})$ とする。 $Car(G)$ の完全代表系 $\{ T^{kl} \;;\; k, l \geq 0, k+2l \leq n \}$ を次の様にとることにする。

$$
T^{kl} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c}
\begin{matrix} \cos\varphi_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \cos\varphi_k & & & & & \\ & & & e^{\tau_1}u(\theta_1) & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & e^{\tau_l}u(\theta_l) & & \\ & & & & & & \varepsilon_1 e^{t_1} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \varepsilon_m e^{t_m} \end{matrix} & \begin{matrix} -\sin\varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -\sin\varphi_k \\ & & \end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix} \sin\varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sin\varphi_k \\ & & \end{matrix} & \begin{matrix} \cos\varphi_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \cos\varphi_k & & & & & \\ & & & e^{-\tau_1}u(\theta_1) & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & e^{-\tau_l}u(\theta_l) & & \\ & & & & & & \varepsilon_1 e^{-t_1} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \varepsilon_m e^{-t_m} \end{matrix}
\end{array} \right), \right.
$$

$$
\left. \begin{array}{l} \text{但し} \quad m = n-k-2l, \quad \varphi_1, \cdots, \varphi_k, \tau_1, \cdots, \tau_l \ \theta_1, \cdots, \theta_l \ t_1, \cdots t_m \in \mathbb{R}, \\ u(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m = \pm 1 \end{array} \right\}
$$

また対応する Cartan 部分環を $\mathfrak{t}^{kl}$ と書く。明らかに T^{n0} が G の compact Cartan 部分群であり, T^{00} ($= T^*$ とも書く) が G の split Cartan 部分群になる。

<u>定義</u> G の Cartan 部分群 T に対して, $(T_0, \varkappa_0)$-group H が条件 $(N(T))$ を満たす

$\Leftrightarrow$ H は $[T]$ に originate する Cartan 部分群を含まない。

(注: G は split な代数群 だから, H の Cartan 部分群は G には originate している。)

次に $Sp(n,\mathbb{R})$ に関し，§1 での問題に対する，現在のところ得られている結果を次の定理の形で述べる。

<u>Theorem.</u> Θ を regular infinitesimal character をもつ，G 上の tempered IED とする。

1). $T=T^{*}$ の場合，次の a)〜c) は同値である。

a) Θ' は $T\cap G_{reg}$ 上恒等的に 0 になる。

b) Θ の height を $[T_1]$，ω を $(\underline{G},\underline{T_1})$ の imaginary Weyl 群 $W_I(\underline{G},\underline{T_1})$ の最長元とするとき，

$$\Theta'(t^{\omega}) = -\Theta'(t) \qquad {}^{\forall}t\in(T_1)\cap G_{reg}.$$

c) Θ は $(N(T))$ を満たす $(T_0,\varkappa_0)$-group H 達からの Lift χ_{φ} の一次結合として表わせる。

2) $T=T^{ko}$ の場合も，Θ の height が $[T^{no}]$ のときは，b) を次の b') に代えることにより，a), b'), c) が同値になる。

b') $\Theta'(t^{\omega}) = -\Theta'(t)$, ${}^{\forall}t\in T^{no}\cap G_{reg}$.

ここで ω としては，$W'=\{w\in W(\underline{G},\underline{T}^{no})$; $w|T^{no}\cap T_0^{ko}\equiv id\}$ の中での最長元をとる。但し，T_0^{ko} は T^{ko} の単位元を含む連結成分を表わす。

注. imaginary Weyl 群 $W_I(\underline{G},\underline{T_1})$ とは $(\underline{G},\underline{T_1})$ の imaginary roots に関する reflections により生成される $W(G, \underline{T}_1)$ の部分群で, $\underline{M}$ を p10 の様に $\underline{T}_1$ に対し構成すれば, $W_I(\underline{G}, \underline{T}_1) \cong W(\underline{M}, \underline{T}_1)$ となる。

証明の概略

1). Step 1. Θ の height が compact Cartan 部分群の場合にまず証明する。

c) ⇒ a) Shelstad の結果による。

b) ⇒ c) 今の場合, T_0 は compact Cartan 部分群 T^{nc} としてよい。

$$t_0 = t^{nc} = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} -\varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -\varphi_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} \varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_n \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1, \cdots \varphi_n \in \mathbb{R} \right\},$$

に対し $e_j(X) = \sqrt{-1}\,\varphi_j$ とおくと, $\{ \pm e_i \pm e_j \ (1 \leq i < j \leq n), \ \pm 2e_i \ (1 \leq i \leq n) \}$ が $(\mathfrak{g}, t^{nc})$ のルート系を与える。

Lemma (T_0, σ_0)-group H が $(N(T^*))$ を満たす

$\Leftrightarrow$ $\#\{ i \,;\ \sigma_0(e_i) = -1 \}$ が奇数.

この様な σ_0 に対し $\{ i \,;\ \sigma_0(e_i) = -1 \} = \{ i_1, \cdots, i_k \}$ とおくと,

$$\mathrm{Lift}\, \chi_\varphi = \varepsilon \cdot \sum_{w \in W(G, T_0) \backslash W(\underline{G}, \underline{T}_0)} \nu_{i_1} \cdots \nu_{i_k}\, \Theta_G(w\mu, w\Psi_G) \quad \cdots\cdots \text{①}$$

となる。但し，この場合 $\mu=\mu_G$ となり，

$$\mu(\exp X) = e^{\sum_{j=1}^{n}\sqrt{-1}\, l_j \varphi_j} \qquad (l_1 > l_2 > \cdots > l_n > 0,\ l_j \in \mathbf{Z})$$

となる T^{n0} 上の unitary character で $w\mu$ には

$$w\mu(\exp X) = e^{\sum_{j=1}^{n}\sqrt{-1}\, \nu_j l_j \varphi_j} \qquad (\nu_j = +1 \text{ または } -1)$$

が対応しているとする。($W(G, T_0)$ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_0)$ のルート系の Weyl 群と同一視する。) また $\varepsilon = +1$ または -1 の符号。

一方，

$$\Theta = \sum_{w \in W(G,T_0)\backslash W(\mathbb{G}, T_0)} c_w\, \Theta(w\mu, w\Psi_G)$$

とおくと，条件 b) 及び次の関係式

$$\Theta(w\mu, w\Psi_G)'(t^w) = \Theta(w\mu, w\Psi_G)'(t^{-1}) = \Theta(\omega w\mu, \omega w\Psi_G)'(t)$$

より，

$$c_w = -c_{\omega w} \qquad \cdots\cdots ②$$

を得る。①と②より $c: w \longmapsto c_w$ は $w \longmapsto \nu_{i_1}\cdots\nu_{i_k}$ という関数の一次結合で表わされることがわかり，c) が導かれる。

a) $\Rightarrow$ b) n に関する帰納法による。 T^* $(= T^{00})$ 上 $\Theta' \equiv 0$ であれば，T^{0l} $(l = 0, \cdots, [\frac{n}{2}])$ 上も Θ' は恒等的に 0 になることが示せる。残りの Cartan 部分群 T^{kl} $(k \geq 1)$ は $Sp(n-1, \mathbb{R})$ の Cartan 部分群と 1 対 1 に対応する。すなわち，

$$\hat{G} = \left\{ g = \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad}^{n} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \vdots & & & \\ \vdots & & * & & \vdots & & * & \\ 0 & & & & 0 & & & \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & 0 & & & \\ \vdots & & * & & \vdots & & * & \\ 0 & & & & 0 & & & \end{array}\right] \end{array} \in Sp(n, \mathbb{R}) \right\} \quad (\cong Sp(n-1, \mathbb{R}))$$

とおくと、 $\{T^{k\ell} \cap \hat{G} \,;\, k \geqq 1\}$ が $Sp(n-1, \mathbb{R})$ の Cartan 部分群の共役類の完全代表系を与える。 そこで $T^{n0} \ni \exp X$ に対し

$$\Delta_G \cdot \Theta(\exp X) = e^{\sqrt{-1}\,\ell_1 \varphi_1} \times F_1^{+}(\exp X') + e^{\sqrt{-1}\,\ell_1 \varphi_1} \times F_1^{-}(\exp X') + \cdots$$

$$\cdots + e^{\sqrt{-1}\,\ell_n \varphi_n} F_n^{+}(\exp X') + e^{-\sqrt{-1}\,\ell_n \varphi_n} F_n^{-}(\exp X')$$

と展開する。 但し

$$X' = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} -\varphi_2 & & \\ & \ddots & \\ & & -\varphi_n \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \varphi_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_n \end{matrix} & 0 \end{array}\right] \in \mathfrak{sp}(n-1, \mathbb{R})$$

$$\Delta_G(\exp X) = e^{+\rho(X)} \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-\alpha(X)}) \quad .$$

このとき $F_j^{\pm}$ はそれぞれ $Sp(n-1, \mathbb{R})$ 上のある tempered IED に $\Delta_{Sp(n-1,\mathbb{R})}$ を掛けたものになり、 a) の条件より F_j^{+} と F_j^{-} は $Sp(n-1, \mathbb{R})$ の split Cartan 部分群 ($T^{0}\cap\hat{G}$ に対応) 上、一致することがわかる。 そこで $F_j^{+} - F_j^{-}$ に帰納法の仮定を適用する。 n が奇数のときは、このことより直ちに、帰納法が1つあがる。 n が偶数のときは、少し工夫が必要で、平井の指標公式の結果 [1] の一部を用いて証明する。

Step 2). Θ の height が non-compact Cartan 部分群 T_1 の場合。 T_1 を fundamental Cartan 部分群にもつ Levi 部分群に対応する cuspidal parabolic 部分群を P, その Langlands 分解を $P = M_1 A N$ とす

る。σ_{M_1}をM_1の離散系列表現，χ_AをAの unitary character，

$$\pi = \operatorname*{Ind}_{P\uparrow G} \sigma_{M_1} \otimes \chi_A \otimes 1_N$$

とおき，その指標をΘ_πとすると，Θは同じ infinitesimal character をもつΘ_π達の一次結合として表わされることを、誘導指標の explicit な形と，Θの regularity により示し，そしてM_1の離散系列の議論（従って Step 1 の結果）に帰着させてしまう。

2）を $Sp(n-k,\mathbb{R})$ 及びその split Cartan 部分群に対する 1）の結果を用いることにより、証明できる。

文　献

[1] T. Hirai, Invariant eigendistributions of Laplace operators on real semisimple Lie groups, IV, Explicit forms of the characters of discrete series representations for Sp(n,$\mathbb{R}$), Japan.J.Math., New Ser. 3(1977), 1-48.

[2] R.P.Langlands, Stable conjugacy: definitions and lemmas, Canad. J.Math., 31(1979), 726-785

[3] D.Shelstad, Characters and inner forms of a quasi-split group over $\mathbb{R}$, Compositio Math., 39(1979), 11-45.

[4] D.Shelstad, Orbital integrals and a family of groups attached to a real reductive group, Ann.Sci.Ecole Norm.Sup., 12(1979), 1-31.

[5] D.Shelstad, L-indistinguishability for real groups, Math.Ann. 259(1982), 385-430.

[6] S.Mikami, On character identities for Sp(n,ℝ) and the lifting of stable tempered invariant eigendistributions, preprint.