数理解析研究所講究録
第 572 巻 1985 年 69-73

On certain infinite products

東洋大(工) 豊泉正男 (Masao Toyoizumi)

$\mathbb{Z} \ni a_1(n),\ a_2(n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots),$

$a_1(n),\ a_2(n) = O(n^c)\ (\exists c > 0),$

$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\quad \mathbb{R} \ni \delta_1, \delta_2, B$ に対し,

$$f_1(z) = e^{2\pi i \delta_1 z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n z/\lambda_1})^{a_1(n)}, \tag{1}$$

$$f_2(z) = e^{2\pi i \delta_2 z + B} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n z/\lambda_2})^{a_2(n)}, \tag{2}$$

$$\varphi_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1(n)}{n^s},$$

$$\varphi_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_2(n)}{n^s}$$ とおくと,

$f_1(z)$ と $f_2(z)$ は上半平面で正則な函数になる。

さらに，次の仮定をしておく．

<u>仮定</u>　$\varphi_1(s)$ と $\varphi_2(s)$ が $\mathbb{C}$ 上有限個の poles をもつゼロでない有理型函数に解析接続できる．

このとき，次を得る．

<u>定理</u>　$N>0$ として，$M=\lambda_1\lambda_2 N$ とおくとき，

$\exists k\in\mathbb{R}$ such that

$$f_1\left(-\frac{1}{Nz}\right)=\left(\frac{\sqrt{N}\,z}{i}\right)^{k} f_2(z) \tag{3}$$

ならば，$M\in\mathbb{N}$ で

$$f_1(z)=e^{2\pi i\delta_1 z}\prod_{m|M}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi i m n z/\lambda_1}\right)^{c(m)}, \tag{4}$$

$$f_2(z)=e^{2\pi i\delta_2 z+B}\prod_{m|M}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi i m n z/\lambda_2}\right)^{c(\frac{M}{m})} \tag{5}$$

とかける．但し，$\mathbb{Z}\ni c(m)\ (m|M)$ で，

$$\delta_1=\frac{1}{24\lambda_1}\sum_{m|M} m\cdot c(m), \tag{6}$$

$$\delta_2=\frac{\lambda_1 N}{24}\sum_{m|M}\frac{c(m)}{m}, \tag{7}$$

$$k=\frac{1}{2}\sum_{m|M} c(m), \tag{8}$$

$$B = \frac{1}{2}\log \lambda_1\sqrt{N} \sum_{m|M} c(m) - \frac{1}{2}\sum_{m|M} c(m)\log m. \tag{9}$$

逆に，$M \in \mathbb{N}$ で $c(m) \in \mathbb{Z}$ $(m|M)$ のとき，$f_1(z)$，$f_2(z)$，δ_1, δ_2，k，B を (4),(5),(6),(7),(8),(9) で定めれば，(3) が成り立つ。

以下，定理の証明の out line を述べる。詳細は [2] を参照して下さい。

まず，(1),(2) の対数をとり，Melin 変換を使えば次を得る。

補題1　$\xi_j(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda_j\sqrt{N}}\right)^{-s}\Gamma(s)\zeta(s+1)\varphi_j(s)$ $(j=1,2)$ で，$k \in \mathbb{R}$ のとき，次は同値．

(A)　$f_1\left(-\frac{1}{Nz}\right) = \left(\frac{\sqrt{N}z}{i}\right)^k f_2(z)$.

(B)　$\xi_1(s) + \frac{k}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{2\pi\delta_1}{\sqrt{N}}\frac{1}{1+s}$ $+ \frac{2\pi\delta_2}{\sqrt{N}}\frac{1}{1-s}$ が任意の垂直な帯領域で有界な正則関数で $\xi_1(s) = \xi_2(-s)$.

条件 (B) を $\varphi_1(s)$ と $\varphi_2(s)$ でいいなおすと，

補題2 $k\in\mathbb{R}$ のとき，(A) は次と同値．

(C) (1) $\varphi_1(s)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型関数に解析接続できる．

(2) $s(s-1)\varphi_1(s)\zeta(s+1)$ が位数有限な整関数．

(3) $M^s\varphi_1(s)\zeta(-s) = \varphi_2(-s)\zeta(s)$.

(4)
$$\varphi_1(0) = -k,$$
$$B = -\varphi_1'(0) - k\log\frac{2\pi}{\lambda_1\sqrt{N}},$$
$$\varphi_1(-1) = -2\lambda_1\delta_1,$$
$$\operatorname*{Res}_{s=1}\varphi_1(s) = \frac{24\delta_2}{\lambda_1 N}.$$

補題3 $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ で収束する Dirichlet 級数 $D_1(s)$ と $D_2(s)$ が $\mathbb{C}$ 上有限個の poles をもつ位数有限なゼロでない有理型関数に解析接続でき，ある数 $\lambda>0$ に対し，$\lambda^s D_1(s) = D_2(-s)$ となるならば，$\lambda\in\mathbb{N}$ で，

$$D_1(s) = \sum_{n|\lambda}\frac{c(n)}{n^s},$$

$$D_2(s) = \sum_{n|\lambda}\frac{c(\frac{\lambda}{n})}{n^s}$$

とかける．

これは，[1] のレンマ5よりすぐでます．

$$D_1(s) = \frac{\wp_1(s)}{\zeta(s)}, \quad D_2(s) = \frac{\wp_2(s)}{\zeta(s)}$$ とおくと，

補題2より，$D_1(s)$ と $D_2(s)$ は $\mathbb{C}$ 上有限個の poles をもつ位数有限な有理型関数に解析接続でき，$M^s D_1(s) = D_2(-s)$ を満たす．従って，定理は補題3からすぐでます．

[1] On certain infinite products II, Mathematika, 31(1984), 1-11.

[2] On certain infinite products III, preprint.