数理解析研究所講究録
第572巻 1985年 130-144

楕円関数とDedekind和

名大 理 伊藤 博 (Hiroshi Ito)

以下では§1, §2においてSczechの仕事([9], [10])の大筋を説明し，彼の仕事のひとつの発展としての一考察を§3で述べる．

§1. 楕円関数によるDedekind和. 古典的なDedekind和は互いに素な整数 a, c ($c \neq 0$)に対して，

(1)
$$s(a,c) = \frac{1}{c}\sum_{\substack{r \bmod c \\ r \not\equiv 0\,(c)}} \cot\left(\pi\frac{ar}{c}\right)\cot\left(\pi\frac{r}{c}\right)$$

で定義されている．これはDedekind η関数の対数

$$\log\eta(z) = \frac{\pi i}{12}z - \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m}e^{2\pi i mnz} \qquad (\operatorname{Im} z > 0)$$

のcusp $\frac{a}{c}$における極限値としてDedekindにより導入された．すなわち

$$\lim_{y \to +0} \operatorname{Im}\left(\log\eta\left(\frac{a}{c}+iy\right)\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{a}{3c} - s(a,c)\right)$$

が成り立つ．$\log\eta(z)$ は $SL(2,\mathbb{Z})$ に関する保型性をもつから，その極限値である Dedekind 和もそれに見合う性質をもつ．

$\varphi : SL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{a+d}{3c} - s(a,c), & c \neq 0, \\ \dfrac{b}{3d} & c = 0 \end{cases}$$

で定めると，$A_1A_2A_3 = 1$ なる $A_j = \begin{pmatrix} * & * \\ c_j & * \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ に対して

(2) $$\varphi(A_1) + \varphi(A_2) + \varphi(A_3) = -\operatorname{sgn}(c_1c_2c_3)$$

が成り立つ，というのがその性質である．相互法則

(3) $$s(a,c) + s(c,a) = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{c} + \frac{1}{ac} + \frac{c}{a}\right) - \operatorname{sgn}(ac)$$

も (2) の特別な場合として得られる．

上述のように，Dedekind 和の性質 (2), (3) は，初めは $\log\eta(z)$ の保型性から導かれたが，後に Rademacher 等によりその代数的なからくりが明らかにされ，保型関数の助けを借りない (2) の証明が得られている（Rademach and Grosswald [7] 参照）．この証明の基礎になっているのは，ひとつには三角関数の加法定理

(4) $$\cot x \cot y + \cot y \cot z + \cot z \cot x = 1$$
$$(x+y+z=0, \quad x, y, z \notin \pi\mathbb{Z})$$

であり，もうひとつは乗法公式

(5) $$a\cot(\pi a x) = \sum_{r \bmod a} \cot\pi\left(x + \frac{r}{a}\right)$$

である．ところで，楕円関数についても上の2つの公式に相

当するものがある．このことを利用してSczech [9] は虚二次体の整数に対してDedekind和の類似物を定義し，(2), (3) に対応する性質を証明している．

複素平面の格子 L をひとつ固定し，$\mathcal{O}=\mathcal{O}_L$ を L の乗数環とする．$L=\mathbb{Z}w_1+\mathbb{Z}w_2$ $(\mathrm{Im}(w_1/w_2)>0)$ とし，$D(L)=w_1\overline{w_2}-\overline{w_1}w_2$ とする．$D(L)/i>0$ となる．$\mathrm{Re}(s)>1$, $0\leq k\in\mathbb{Z}$, $x, y\in\mathbb{C}$ のとき，

$$G(s,k,x,y)=\sum_{w\in L}{}' \chi(w\bar{x})\,\overline{(w+y)}^{k}\,|w+y|^{-2s-k}$$

とおく．但し，$\chi(z)=\exp(2\pi i(z-\bar{z})/D(L))$．また，$\sum'$ のダッシュは，$w+y=0$ なる w を除くことを示す．$G(s,k,x,y)$ は全 s 平面に解析接続されて関数等式をもつ．さらに

$$G_k(x)=G(k/2,k,0,x),\quad G(x)=\frac{2\pi i}{D(L)}G(0,2,0,x)$$

とおく．関数等式により $G_2(0)=G(0)$ となる．L を明記したいときは，$G_k(x,L)$, $G(x,L)$ とかく．古典的なDedekind和の定義における cot に対応するのは G_1 である．

$$\pi\cot(\pi x)=\left[\sum_{w\in\mathbb{Z}}(w+x)^{-1}|w+x|^{-s}\right]_{s=0}\quad(x\notin\mathbb{Z})$$

であるから類似は明らかである．乗法公式 (5) に対応するのは，

(6) $$aG_1(ax)=\sum_{r\in L/aL}G_1\left(x+\frac{r}{a}\right)$$

で，これは G_1 の定義から直接確められる．また G_1, G_2, G は，

Weierstrass の楕円関数 $\zeta(x)$, $\wp(x)$ によって

$$G_1(x) = \zeta(x) - x\,G_2(0) - \bar{x}\,\frac{2\pi i}{D(L)},$$

$$G_2(x) = \wp(x) + G_2(0),$$

$$2\,G(x) = \wp(x) - G_1^2(x) \qquad (x \notin L)$$

と表わせるので,

$$G_0(x) = \begin{cases} -1, & x \in L, \\ 0, & x \notin L \end{cases}$$

に注意すると, 楕円関数の加法定理により

$$\begin{aligned} &G_1(x)G_1(y) + G_1(y)G_1(z) + G_1(z)G_1(x) \\ (7) \qquad &= G_0(x)G_2(y) + G_0(y)G_2(z) + G_0(z)G_2(x) \\ &\quad + G(x) + G(y) + G(z) \qquad (x+y+z=0) \end{aligned}$$

が導かれる. これが (4) に対応する式である. (4)においては, G に相当するものが定数に退化していると見れる. $a, c \in \mathcal{O}$, $c \neq 0$ のとき,

$$D(a,c) = \frac{1}{c}\sum_{r \in L/cL} G_1\left(\frac{ar}{c}\right) G_1\left(\frac{r}{c}\right)$$

とおく. $\Phi : SL(2,\mathcal{O}) \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} G_2(0)\, I\left(\frac{a+d}{c}\right) - D(a,c), & c \neq 0, \\ G_2(0)\, I\left(\frac{b}{d}\right), & c = 0 \end{cases}$$

で定める. ここで $I(z) = z - \bar{z}$. L を明記したいときは, Φ_L とかく. (4), (5) を用いて (2) を証明するのと同じステップをふめば, (6), (7) を用いて次が証明できる.

定理 1 (Sczech [9]). Φ は $SL(2,\mathcal{O})$ から $\mathbb{C}$ の加法群への準同型である.

系. $ac \neq 0$; $a\mathcal{O}+c\mathcal{O}=\mathcal{O}$ のとき,

$$D(a,c)+D(c,a)=G_2(0)\,I\left(\frac{a}{c}+\frac{1}{ac}+\frac{c}{a}\right).$$

$\mathcal{O}=\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[\rho]$ $(\rho=e^{2\pi i/3})$ のとき Φ は自明なものになるが, これ以外の場合には自明にはならない. Φ の値の algebraicity, integrality については, [9], Satz 4 参照. [9] では, Φ をもう少し一般化した次のようなものが考えられている. $p, q \in \mathbb{C}$, $a, c \in \mathcal{O}$; $c \neq 0$ のとき

$$D(a,c;p,q)=\frac{1}{c}\sum_{r\in L/cL} G_1\left(\frac{a(r+p)}{c}+q\right)G_1\left(\frac{r+p}{c}\right)$$

とおく. $D(a,c)=D(a,c;0,0)$ である. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathcal{O})$ のとき, $(p^*,q^*)=(p,q)A$ として,

$$\Phi(A)(p,q)=\begin{cases} -\overline{\left(\frac{a}{c}\right)}G(p)-\overline{\left(\frac{d}{c}\right)}G(p^*)-\frac{a}{c}G_0(p)G_2(q) \\ \qquad -\frac{d}{c}G_0(p^*)G_2(q^*)-D(a,c;p,q), & c\neq 0, \\ -\overline{\left(\frac{b}{d}\right)}G(p)-\frac{b}{d}G_0(p)G_2(q), & c=0 \end{cases}$$

とおく. $\Phi(A)=\Phi(A)(0,0)$ である. このとき任意の $A_1, A_2 \in SL(2,\mathcal{O})$ に対して

$$\Phi(A_1A_2)(p,q)=\Phi(A_1)(p,q)+\Phi(A_2)((p,q)A_1)$$

が成り立つ．

以上の Sczech の取り扱いはかなり形式的なもので，古典的な Dedekind 和が $\log\eta(z)$ という保型関数を母体として生れてきたのと対照的である．ところで，ある意味で $\mathrm{Im}(\log\eta(z))$ の類似物と思える関数が上半空間に構成でき，それを用いれば定理1は自然に証明される．§3で説明する．

ひとつ remark を述べてこの§を終える．古典的な Dedekind 和は2通りの表示をもつ．すなわち

(8) $$s(a,c) = 4\,\mathrm{sgn}(c)\sum_{r \bmod c}\left(\!\left(\frac{ar}{c}\right)\!\right)\left(\!\left(\frac{r}{c}\right)\!\right)$$

とも表わせる([7])．ここで，[ ] を Gauss 記号として，

$$((x)) = \begin{cases} x-[x]-1/2, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, \\ 0, & x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

とおく．(8) に対応する $D(a,c)$ の表示は何であろうか？今度は新しい表示を得ることはできないが，そのかわり

(9) $$D(a,c) = -D(\bar{a},\bar{c})$$

を得る．したがって $\Phi(\bar{A}) = -\Phi(A)$ となる．これらは [9] で予想された式である．[9] で注意されているように，(9) から，$\mathcal{O}$ の商体 $\neq \mathbb{Q}$，$\mathbb{Q}(i)$，$\mathbb{Q}(\rho)$ のとき，

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\,\Phi(SL(2,\mathcal{O})) = h$$

となることが従う．但し h は整環 $\mathcal{O}$ の類数．

§2. Dedekind 和と theta multiplier. 古典的状況においては，

(10) $$(\text{theta multiplier}) = \exp(\text{Dedekind sum})$$

という事実がある．これはもっと強く

(11) $$(\text{theta function}) = \exp\left(\int(\text{Eisenstein series})\right)$$

となっていることの反映である．例として

$$\theta(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{\pi i m^2 z} \qquad (\operatorname{Im} z > 0)$$

の場合を見てみる．いま $\operatorname{Re} s > 0$, $p, q \in \mathbb{R}$ のとき

$$E(z, s; p, q) = y^s \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' (mz+n)^{-2} |mz+n|^{-2s}$$

とおくと，これは全 s 平面に解析接続されて，

(12) $$\begin{aligned} E(z; p, q) &= E(z, 0; p, q) + \frac{\pi}{y} \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}+p} \sum_{n\in\mathbb{Z}+q}{}' (mz+n)^{-2} \end{aligned}$$

は z の正則関数になる．これを用いると定数倍を除いて

(13) $$\theta(z) = \exp\left(\frac{i}{4\pi}\int E(z; \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\, dz\right)$$

とかける．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$, $A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 2$, $c > 0$ とすれば

$$\theta(Az) = \left(\frac{c}{a}\right) e^{\pi i a/4} \sqrt{\frac{cz+d}{i}}\, \theta(z)$$

であるが，一方で (13) の右辺の表示を用いてこの変換公式を導くこともできる．一般に (12) のタイプの Eisenstein 級数の周期積分には Dedekind 和が現れることが知られており（Sczech [8] 参照），今の場合

$$\int_z^{Az} E(z; \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\, dz = -2\pi i \log \frac{cz+d}{i} - \pi^2 s(a, c; \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

となる．但し，

$$\Delta(a,c;\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{c}\sum_{r \bmod c} \cot\pi\left(\frac{a(r+\frac{1}{2})}{c}+\frac{1}{2}\right)\cot\pi\left(\frac{r+\frac{1}{2}}{c}\right).$$

したがって，

$$\left(\frac{c}{a}\right)e^{\pi i a/4} = e^{-\frac{\pi i}{4}\Delta(a,c;\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$$

がわかる．

Sczech [10] では (10) に当る式が，上半空間のテータ関数について予想されている．$K=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $0>D\equiv 1 \pmod 8$ とし，$\mathcal{O}_K$ を K の整数環とする．上半空間 $\mathbb{H}_3$ の元を一般に $u=z+jv$ ($z\in\mathbb{C}$, $v>0$) とかく．上半空間に関する基本的な事柄については，Kubota [5] 参照．いま

$$\vartheta(u)=\sqrt{v}\sum_{m\in\mathcal{O}_K+\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{2\pi|m|^2 v}{|\sqrt{D}|}+\pi i\,\mathrm{tr}\left(\frac{m^2 z+m}{\sqrt{D}}\right)\right]$$

とおくと，$A\in SL(2,\mathcal{O}_K)$ について

$$\vartheta(Au)=e^{\pi i \alpha(A)/4}\vartheta(u) \qquad (\alpha(A)\in\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$$

となり，$\alpha: SL(2,\mathcal{O}_K)\longrightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ は準同型である．一方，詳しくは [10] に譲るが，K から標準的に定まる lattice L で，$\mathcal{O}_L=\mathcal{O}_K$ かつ

$$\frac{1}{\sqrt{D}}\Phi_L(SL(2,\mathcal{O}_K))\subset\mathcal{O}_F$$

となるものがある．但し，$F=\mathbb{Q}(j(L))$．特に $G_2(0;L)\in\mathcal{O}_F$ である．

<u>予想</u> (Sczech [10]). 任意の $A \in SL(2, \mathcal{O}_K)$ について,

$$\frac{1}{\sqrt{D}} \Phi_L(A) \equiv G_2(0, L)\, \chi(A) \quad (\mathrm{mod}\ 8\mathcal{O}_F).$$

$SL(2, \mathcal{O}_K)$ は有限生成だから, K をひとつ与えたときに上の予想を確めることはできる. Sczech は $D = -7, -15, -23, -31, -39, -55$ について予想を検証している. $\vartheta(u)$ について (11) のような事実は知られていない. しかし, (11) の右辺における Eisenstein 級数と Dedekind 和との絡みは, 我々の場合にもある程度再現できる (§3).

ひとつ remark を述べる. $\vartheta(u)$ の multiplier も $\theta(z)$ のそれと同様に, K の平方剰余記号を用いて書ける. したがって上の予想は Dedekind 和と平方剰余記号との関係を主張していることにもなる. 3乗剰余記号との関係については, 次のような例がある. $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\rho]$ $(\rho = e^{2\pi i/3})$ とし,

$$\Gamma = \left\{ A \in SL(2, \mathcal{O}) \;\middle|\; \pm A \equiv \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ (\mathrm{mod}\ 3) \right\},$$

$$\Gamma(3) = \left\{ A \in SL(2, \mathcal{O}) \;\middle|\; \pm A \equiv \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \ (\mathrm{mod}\ 3) \right\}$$

とする. $\mathbb{Q}(\rho)$ の3乗剰余記号 $\left(\frac{c}{a}\right)_3$ を用いて, $\chi_3 : \Gamma(3) \longrightarrow \{1, \rho, \rho^2\}$ を

$$\chi_3\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \left(\frac{c}{a}\right)_3, & c \neq 0, \\ 1, & c = 0 \end{cases}$$

で定めると，これは準同型になり，さらに

$$\chi_3(A)=1 \quad \text{for} \quad A=\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすることにより χ_3 も Γ からの準同型に拡張することができる（Patterson [6] 参照）．一方で，$\Phi=\Phi_{\mathcal{O}}$ として，$A\in SL(2,\mathcal{O})$ に対し，

$$\Omega_1(A)=\Phi(A)\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{\rho}{3}\right)+\Phi(A)\left(\tfrac{\rho}{3},-\tfrac{1}{3}\right)$$
$$\qquad+\Phi(A)\left(\tfrac{-1+\rho}{3},\tfrac{1+\rho}{3}\right)+\Phi(A)\left(\tfrac{1+\rho}{3},\tfrac{1-\rho}{3}\right),$$

$$\Omega_2(A)=\Phi(A)\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{\bar\rho}{3}\right)+\Phi(A)\left(\tfrac{\bar\rho}{3},-\tfrac{1}{3}\right)$$
$$\qquad+\Phi(A)\left(\tfrac{-1+\bar\rho}{3},\tfrac{1+\bar\rho}{3}\right)+\Phi(A)\left(\tfrac{1+\bar\rho}{3},\tfrac{1-\bar\rho}{3}\right),$$

$$\Omega(A)=\rho\,\Omega_1(A)-\bar\rho\,\Omega_2(A)$$

とおくと，$\Omega:\Gamma\longrightarrow\mathbb{C}$ は準同型である．いま $\omega>0$ を，$\wp'^2=4\wp^3-1$ をみたす Weierstrass の $\wp$ 関数の周期格子が $\mathcal{O}\omega$ となるようにとれば，任意の $A\in\Gamma$ について

$$\chi_3(A)=\exp\left(\frac{2\pi i}{9\omega^2}\,\Omega(A)\right)$$

が成り立つ．これは，Γ の適当な生成元の系の上で両辺の値を比べることにより確められる．

§3. Dedekind 和を周期とする保型関数．上半空間においても，Eisenstein 級数を用いて閉微分形式を作り，その積分関数として Dedekind 和を周期とする保型関数を構成することができる．

得られる関数は，$\log \eta(z)$ の虚数部 $\mathrm{Im}\log \eta(z)$ と良く似たものになる．初めに $\mathrm{Im}\log \eta(z)$ の構造について振り返っておく．前節の $\theta(z)$ の表示 (13) と同様に，$\eta(z)$ についても，(12) の Eisenstein 級数を用いた表示

(14) $$\log \eta(z) = \frac{i}{4\pi}\int E(z;0,0)\,dz$$

がある．$M = \begin{pmatrix} * & * \\ m & n \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ のとき

$$d(Mz) = \frac{1}{(mz+n)^2}\,dz$$

ゆえ，大雑把に言って $\log \eta(z)$ は，微分形式

(15) $$\sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash SL(2,\mathbb{Z})} d(Mz)$$

の積分関数である．但し，$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \right\}$．したがって (14) の右辺の $\frac{i}{4\pi}$ に注意すれば，$\mathrm{Im}\log \eta(z)$ は大雑把に言って (15) の real part

(16) $$\sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash SL(2,\mathbb{Z})} d(x(Mz))$$

の積分関数となる．ここで $x(Mz)$ は Mz の x 座標．もちろん (15), (16) はそのままでは収束に問題があるから，$y(Mz)^s$ ($\mathrm{Re}\, s > 0$) をつけたものを解析接続して $s = 0$ とおくという手順をとっているわけである．(16) の x 座標のかわりに，上半空間 $\mathbb{H}_3 = \{ z + jv \mid z \in \mathbb{C},\ v > 0 \}$ の z 座標を用いることにより，以下の議論が展開する．なお，v^2 を用いれば，Asai [1]

にある $\log|\eta(z)|$ の類似を得る.

虚二次体Kをひとつ固定する. DをKの判別式とし, $\mathcal{O}=\mathcal{O}_K$ とする(§2ではDに条件が付いていたが, ここでは任意でよい). $M=\begin{pmatrix} * & * \\ m & n \end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{C})$, $u=z+jv\in\mathbb{H}_3$ のとき, Mu の z 座標, v 座標をそれぞれ $z(Mu)$, $v(Mu)$ とかくと,

$$v(Mu)=\frac{v}{|mz+n|^2+|mv|^2},$$

$$d(z(Mu))=\frac{1}{(|mz+n|^2+|mv|^2)^2}\left\{\overline{(mz+n)}^2dz-(\bar{m}v)^2d\bar{z}+2\overline{(mz+n)}\bar{m}v\,dv\right\}$$

となる. そこで $\mathrm{Re}\,s>1$ において,

(17) $$\left(E_{zz}(u,s),\ E_{z\bar{z}}(u,s),\ E_{zv}(u,s)\right)$$

$$=v^s\sum_{\substack{m,n\in\mathcal{O}\\ mn\neq 0}}\left(\overline{(mz+n)}^2,\ -(\bar{m}v)^2,\ 2\overline{(mz+n)}\bar{m}v\right)\left(|mz+n|^2+|mv|^2\right)^{-s-2}$$

として, 3つの Eisenstein 級数を考える. これらはすべて全 s 平面の正則関数に接続される. $\mathbb{H}_3$ 上の微分形式 ω を

(18) $$\omega=E_{zz}(u,0)\,dz+E_{z\bar{z}}(u,0)\,d\bar{z}+E_{zv}(u,0)\,dv$$

で定める. $A\in SL(2,\mathcal{O})$ による $\mathbb{H}_3$ の自己同型 $u\mapsto Au$ を ℓ_A とかくと, ω の作り方から自然に,

(19) $$\ell_A^*\omega=\omega$$

となる. Eisenstein 級数の Fourier 展開を見ると,

$$H(u)=-G_2(0)I(z)-\frac{4\pi}{\sqrt{|D|}}v\sum_{\substack{m,n\in\mathcal{O}\\ mn\neq 0}}\frac{m\bar{n}}{|mn|}K_1\left(4\pi\left|\frac{mn}{\sqrt{D}}\right|v\right)e\left(\frac{mnz}{\sqrt{D}}\right)$$

とおくとき，$dH(u)=-\omega$ となることがわかる．但し $K_t(x)$ は第2種Bessel関数．したがって，微分形式 ω は閉であり，(19)から，$A\in SL(2,\mathcal{O})$ に対して

$$H(u)-H(Au)=\text{定数}$$

となる．証明は省くが次が成り立つ．

定理2． $H(u)-H(Au)=\Phi_{\mathcal{O}}(A)\qquad (A\in SL(2,\mathcal{O}))$．

これから定理1の別証を得る．$H(u)$ に微分作用素

$$v^2\left(4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)-v\frac{\partial}{\partial v}$$

を作用させると0になることも，たとえば[1]中の議論と同様にして示すことができる．

以上の応用として，Dedekind和とL関数の特殊値に関するHecke [4] の結果の類似を得ることもできる．$K\neq\mathbb{Q}(\sqrt{-1}),\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ とする．$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathcal{O})$，$(a+d)^2\neq 4$ とすると，A は $\mathbb{C}$ 上に2つの相異なる固定点 α,α' をもち，$F=K(\alpha)$ は K の2次拡大体となる．$\varepsilon=c\alpha+d$ は F の単数で，$\varepsilon\neq\pm1$，$N_{F/K}(\varepsilon)=1$ である．$\mathfrak{m}=\mathcal{O}\alpha+\mathcal{O}$ とすると $\varepsilon\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$ であるので，

$$L(A,s)=\sum_{0\neq\mu\in\mathfrak{m}/\sim}\frac{\overline{N_{F/K}(\mu)}}{N_{F/\mathbb{Q}}(\mu)^s}\qquad(\mathrm{Re}\,s>2)$$

を考えることができる．ここで $\mu_1,\mu_2\in\mathfrak{m}$ のとき，

$$\mu_1 \sim \mu_2 \iff \mu_1 = \varepsilon^n \mu_2 \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$\mathbb{H}_3$内でαとα'を結ぶ測地線を

$$u = u(t) = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot jt \quad (0 < t \in \mathbb{R})$$

と parameterize すると，$Au(t) = u(|\varepsilon|^2 t)$ である．そこで，

$$Z_A : \quad u = u(t) \quad (t : 1 \to |\varepsilon|^2)$$

とすると，定理2から

$$\int_{Z_A} \omega = \Phi_0(A)$$

となる．左辺の積分も(17), (18)を用いて計算すると，Siegel [11] にあるのと同様な計算で次を得る．

<u>定理3</u>. $\operatorname{sgn}(\log|\varepsilon|)(\alpha - \alpha')L(A, 1) = \Phi_0(A)$.

この§の内容は Sczech と Harder [2], [3] に負うところが大きい．定理3は，Sczech によって，個人的な手紙の中で予想された．上で用いた微分形式ωは，Harder がアデーリックに考察しているものを具体的に書いてみたものである．彼もωの周期積分とL関数の特殊値との関係についての結果を得ている．

References

[1] T. Asai, On a certain function analogous to $\log|\eta(z)|$, Nagoya Math. J., 40 (1970), 193-211.

[2] G. Harder, Period integrals of cohomology classes which are represented by Eisenstein series, Proc. Bombay colloquim 1979, Springer 1981, 41-115.

[3] G. Harder, Period integrals of Eisenstein cohomology classes and special values of some L-functions, Number theory related to Fermat's last theorem (ed. by N. Koblitz), 103-142, Boston-Basel-Stuttgart, Birkhauser 1982.

[4] E. Hecke, Bestimmung der Klassenzahl einer neuen Reihe von algebraischen Zahlkörpern, Math. Werke, 290-312.

[5] T. Kubota, Über diskontinuierlicher Gruppen Picardschen Typus und zugehörige Eisensteinsche Reihen, Nagoya Math. J., 32 (1968), 259-271.

[6] S. J. Patterson, A cubic analogue of the theta series, J. reine angew. Math., 296 (1977), 125-161.

[7] H. Rademacher and E. Grosswald, Dedekind sums, Carus Mathematical Monographs Nr.16, MAA (1972).

[8] R. Sczech, Zur Summation von L-Reihen, Bonner Mathematische Schriften 141, Bonn 1982.

[9] R. Sczech, Dedekindsummen mit elliptischen Funktionen, Invent. math., 76 (1984), 523-551.

[10] R. Sczech, Dedekind sums and power residue symbols, preprint.

[11] C. L. Siegel, Lectures on advanced analytic number theory, Tata Institute Bombay 1961.