数理解析研究所講究録
第572巻 1985年 151-175



# DEDEKIND 和と保型形式

神大・理 平松豊一（Toyokazu Hiramatsu）
神大・理 味村良雄（Yoshio Mimura）
神大・自然科学 高田一郎（Ichiro Takada）

## §1. いろいろなDedekind和

### 1.1 古典的Dedekind和

楕円モジュラー関数に関連して、関数

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau}), \quad Im\,\tau > 0$$

が SL(2, ℤ) による一次変換によって、どういう影響を受けるかという問題は Jacobi 等によってすでに考察されていた。Riemann はこの極限状態を考えて、この変換に関連したいくつかの重要な公式を残した。これを委ねられた Dedekind は、本質的には彼等の仕事を用いて $\log \eta(\tau)$ の変換公式を証明し、その中に現われる項：Dedekind和の表示やその完全な決定を考察し、その相互法則を初めて証明した（[9]）。この和は分数の有限和として書けることより，その初等的研究が期待されうるが，そうした方法による考察は Rademacher によって

完成され，相互法則のいくつかの証明やその数論的性質が得られた（[24]）。そこで，古典的なDedekind和のいくつかの結果をまとめると次のようになる。

（1）変換公式．$SL(2,\mathbb{Z})$ の任意の元 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，

$$\log \eta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \log \eta(\tau) + \frac{1}{2}\log\frac{c\tau+d}{i} + \frac{\pi i}{12}\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ここで，
$$\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{b}{d} & (c=0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{a+d}{c} - 12\,s(d,c) & (c \neq 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

この $s(d,c)$ が Dedekind 和と呼ばれるものである。

（2）表示．（イ）$(h,k)=1,\ k\geqq 1$ に対し，

$$s(h,k) = \sum_{m=1}^{k-1}\left(\left(\frac{m}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hm}{k}\right)\right),$$

ここで，
$$((x)) = \begin{cases} x-[x]-\frac{1}{2} & (x \notin \mathbb{Z} \text{ のとき}) \\ 0 & (x \in \mathbb{Z} \text{ のとき}). \end{cases}$$

（ロ）$(h,k)=1,\ k\neq 0$ に対し，

$$s(h,k) = \frac{1}{4k}\sum_{m=1}^{k-1}\cot\frac{\pi m}{k}\cot\frac{\pi hm}{k}.$$

（3）相互法則．$(h,k)=1,\ h\geqq 1,\ k\geqq 1$ に対し，

$$s(h,k)+s(k,h) = -\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{h}{k}+\frac{1}{hk}+\frac{k}{h}\right).$$

（4）三項関係．$A_i = \begin{pmatrix} * & * \\ c_i & * \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}),\ i=1,2,3$，で，$A_1A_2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，

$$\sum_{i=1}^{3}\Phi(A_i) = 3\,\mathrm{sign}\,(c_1c_2c_3).$$

（5）値．（イ）$2k\cdot(3,k)\cdot s(h,k) \in \mathbb{Z}$ ；

（ロ）$s(h,k)=0 \Leftrightarrow s(h,k)\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow h^2+1\equiv 0 \mod k$ ；

(ハ)　$6k\cdot s(h,k)\equiv 0,\pm1,\pm3 \mod 9$　(ここから missing value の問題が生じる。

(ニ)　任意の $\frac{h}{k}$ に対して，$s(h,k)$ は上，下に有界でない。

(ホ)　$s(h,k)$ は実軸上 dense。

(6)　Jacobi 記号との関係

$$\left(\frac{h}{k}\right)=\exp\{3\pi ik\,(s(1,k)-s(h,k))\}.$$

(7)　格子点．　$(a,b)=(b,c)=(c,a)=1$ で

$$N_3(a,b,c)=\#\left\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 0\leqq x<a,\ 0\leqq y<b,\ 0\leqq z<c, \\ 0<\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}<1 \end{array}\right\}$$

とするとき，

$$N_3(a,b,c)=-s(bc,a)-s(ca,b)-s(ab,c)+\frac{1}{6}abc+\frac{1}{12abc}$$
$$+\frac{1}{4}(ab+bc+ca)+\frac{1}{4}(a+b+c)+\frac{1}{12}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)-2.$$

(8)　ある種の２次形式の類不変量や２次体上のアーベル拡大の類数との関連。

古典的 Dedekind 和の拡張を考える際に，上の性質に注目する必要がある。特に，(1) と (3) が重要である。

1.2　その後のいろいろな拡張

(i)　Apostol ([1],[2]), Carlitz ([5],[6],[7]), Meyer ([17]).

$n$ 次の Bernoulli 多項式を $B_n(x)$ とし，$\overline{B}_n(x)=B_n(x-[x])$ で $n$ 次の Bernoulli 関数を定義する。$((x))=\overline{B}_1(x)$ であることを考慮して，$p(>1)$：奇数，$0\leqq r\leqq p+1$ に対し，

$$S_{p,r}(h,k)=\sum_{m=1}^{k-1}\bar{B}_{p+1-r}\left(\frac{m}{k}\right)\bar{B}_r\left(\frac{hm}{k}\right)$$

とおく。この和に対して，相互法則が示される。またLambert級数

$$G_p(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}\frac{x^n}{1-x^n}$$

で表される関数の変換公式に $S_{p,p}$ が現れる．さらに，Hurwitzの zeta関数とも関連する。

(ii) Carlitz ([8]).

$f\left(\frac{j}{k}\right)=\left(\left(\frac{j}{k}\right)\right)+\frac{1}{2k}$ として，

$$S_n(h_1,\cdots,h_n;k)=\sum_{j_1,\cdots,j_n \bmod k}f\left(\frac{j_1}{k}\right)\cdots f\left(\frac{j_n}{k}\right)f\left(\frac{j_1h_1+\cdots+j_nh_n}{k}\right)$$

を考える。$S_n$の相互法則が示される．$n=1$ のときが古典的なDedekind和である。

(iii) Meyer ([18],[19]), Dieter ([10]), Schoeneberg ([29]).

$$S_{a,b}(h,k)=\sum_{m=1}^{k-1}\left(\left(\frac{m}{k}+\frac{a}{fk}\right)\right)\left(\left(\frac{hm}{k}+\frac{ah+bk}{fk}\right)\right)$$

なる和を考え，これに対応する亜の一般化が得られる．この和は，Kleinの関数 $\sigma_{a,b}(\omega_1,\omega_2)$ の変換公式に現れる。また $S_{a,b}$ に対応する cot表示も得られている。Dieterは更に，$\log\sigma_{a,b}(\omega_1,\omega_2)$ の変換公式を与え，それより $\sigma_{a,b}$ の相互法則を解析的方法と数論的方法の両方で示した。Schoenebergも $\log\sigma_{a,b}$ を abel 積分とみて，その変換公式を与えた。

(iv) Mikolás ([20],[21]).

$m,n\geq 0$, $(a,c)=(b,c)=1$, $\{u\}=u-[u]$, $x,y\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ に

対し，次の3つの和

$$s\binom{a,b}{c}=\sum_{j=0}^{c-1}\bar{B}_m\left(\frac{ja}{c}\right)\bar{B}_n\left(\frac{jb}{c}\right),$$

$$S_c^{a,b}(x,y)=\sum_{j \bmod c}\exp\left\{2\pi i\left(\left\{\frac{ja}{c}\right\}x+\left\{\frac{jb}{c}\right\}y\right)\right\},$$

$$\mathscr{S}_c^{a,b}(x,y)=(e^{2\pi ix}-1)^{-1}(e^{2\pi iy}-1)^{-1}S_c^{a,b}(x,y)$$

を考え，これらの関数を含む沢山の等式を与えた。和 $\mathscr{S}_c^{a,b}(x,y)$ は，

$$\tilde{Q}(\tau,\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+\omega}+\frac{1}{n-\omega}\right)\frac{e^{2\pi in\tau}}{1-e^{2\pi in\tau}}$$

の変換公式に現れる。更に，

$$D_c^{a,b}(w,z)=\sum_{j=1}^{c-1}\zeta\left(w,\left\{\frac{ja}{c}\right\}\right)\zeta\left(z,\left\{\frac{jb}{c}\right\}\right)$$

が極めて一般化されたDedekind和であることを示している。

(v) Rieger ([28]).

代数体への拡張を行った。古典的Dedekind和 $s(h,k)=\sum_{m \bmod k}\bar{B}_1\left(\frac{m}{k}\right)\bar{B}_1\left(\frac{hm}{k}\right)$ を有理数 $\frac{h}{k}$ の関数とみて，Eisenstein の公式

$$\bar{B}_1(x)=\bar{B}_1\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{i}{2m}\sum_{j=1}^{m-1}e^{2\pi ijn/m}\cot\frac{\pi j}{m}$$

を，$x$ が代数的数のときに拡張して，この $\bar{B}_1(x)$ を用いてDedekind和を拡張した。

(vi) Berndt ([4]).

一般Eisenstein級数

$$G(z,s;r,h)=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{2\pi i(mh_1+nh_2)}}{((m+r_1)z+n+r_2)^s}$$

を考え，Dedekind 和

$$S_{\beta\alpha}(d,c)=\sum_{\nu \bmod cd} \exp\left\{2\pi i\left(\frac{\nu\alpha}{c}+\frac{\nu\beta}{d}\right)\right\}\left(\left(\frac{\nu}{|d|c}\right)\right)\left(\left(\frac{\nu d^{-1}}{c}\right)\right)$$

に対し，相互法則を示した。

(vii) Hirzebruch - Zagier ([15],[16],[34]).

位相幾何学との関連で，Dedekind 和の（パラメータに関する）高次元化を扱った。（広田栄子さんの報告を参照）

(viii) L. Goldstein et al. ([11]〜[14]).（§2参照）

(ix) Sczech ([30],[31]).

楕円関数との関連で，Dedekind和の拡張を行った。（伊藤博さんの報告を参照）

N.B.

1) Barner ([3]) は，Dedekind 和を用いて，実2次体の *ring class* に対する ζ－関数や L－関数の特殊値を *explicit* に表わす公式を与えた。また Meyer も Dedekind 和を使って、実2次体の *ring class* の L－関数に対しての Kronecker 極限公式を求め（そこに Dedekind 和が現われる）、これを用いて，2次体上のアーベル拡大の類数を決定した。

2) Wohlfahrt ([33]) は，Dedekind 和がある保型形式の *multiplier* に現れるということを利用して，モジュラー群の部分群の構成を行った。

3) Rédei ([27]) は，多項式 $P_k(x)=(x^k-1)/(x-1)$, $k\in\mathbb{Z}$, を考え，$(m,n)=1$ に対し，

$$P_m(x)F(x)+P_n(x)G(x)=1,\ \deg F<n,\ \deg G<m$$

をみたす多項式 $F, G$ をとったとき，$x=1+t$ を代入して，両辺の $t^r$ の係数を比較して，恒等式の系列を得た。ここで，$r=2$ とすると，Dedekind和の相互法則が得られる。

4) §1.1, (7) の格子点の結果は，Mordell ([22],[23]) による。

## §2. L. Goldstein らの仕事

### 2.1. Hecke 積分

$\eta(z)$ $(z\in\mathfrak{H}^+)$ を Dedekind の eta関数とする。$\eta(z)\neq 0$ だから，$f(z)=\log\eta(z)$ （主枝をとる）とおく。$f(z)$ は $\mathfrak{H}^+$ で正則で，次の性質 (1)－(4) をもつ：

(1) $f(z+1)=f(z)+\frac{\pi i}{12}$ ;

(2) $f(-\frac{1}{z})=f(z)+\frac{1}{2}\log(\frac{z}{i})$ ;

(3) $f(z)=\frac{\pi i z}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{2\pi i n z}$ , $a_n=-\sum_{d|n,d>0}\frac{1}{d}$ ;

(4) $\exists\alpha>0$, $f(z)=O(y^{-\alpha})$ *as* $y\to 0$, *uniformly for* $x$ *in any finite interval.*

従って，(1)＋(2) より，前記の

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=f(z)+\frac{1}{2}\log\left(\frac{cz+d}{i}\right)+\frac{\pi i}{12}\Phi\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\quad\forall\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})$$

を得る。性質(2)が本質的であり，Weil ([32]) は，

$$f(z)\ \xleftrightarrow{\text{Mellin 変換}}\ \zeta(s)\zeta(s+1)\ :\ \textit{appropriate zeta}\ 関数$$

をみて，右辺の関数等式より，(2) を証明した。

さて，上の $f(z)$ をモデルとして，次の Hecke 積分を得る．

定義：$\lambda>0$，$A, B, C, \gamma \in \mathbb{C}$ とする。$\mathfrak{H}^+$ 上の関数 $f(z)$ が $sign\ \{\lambda, A, B, C, \gamma\}$ の Hecke 積分とは，

(I) $f(z+\lambda) = f(z) + \frac{2\pi i A}{\lambda}$ ;

(II) $f(-\frac{1}{z}) = \gamma f(z) + B \log(\frac{z}{i}) + C$ ;

(III) (I)より，$f(z) - \frac{2\pi i A z}{\lambda}$ は周期 $\lambda$ をもつ。そこで，

$$f(z) = \frac{2\pi i A z}{\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}} ;$$

とくに $f(z)$ は $\mathfrak{H}^+$ で正則である。

(IV) $\exists \alpha>0$，$f(x+iy) = O(y^{-\alpha})$ as $y \to 0$, uniformly for $x$ in a finite interval.

($\gamma = \pm 1$ とできる)。

例. $\log \eta(z) \in \{1, \frac{1}{24}, \frac{1}{2}, 0, 1\}$ ;

$\log \theta(z) \in \{2, 0, \frac{1}{2}, 0, 1\}$

さて，次のようにおく；

$$\phi_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

$$\Phi_f(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s) \phi_f(s).$$

次の[I]～[III]が成立する．

[I] $\Phi_f(s)$ は全 s 平面に有理型関数として解析接続でき，

$$\Phi_f(s) - \frac{B}{s^2} - \frac{C}{s} + \frac{2\pi A \gamma}{\lambda}\frac{1}{s-1} - \frac{2\pi A}{\lambda}\frac{1}{s+1}$$

は finite genus の整関数である。

[II] $\Phi_f(-s) = \gamma\, \Phi_f(s)$.

[III] $f(z) \overset{1対1}{\longleftrightarrow} \Phi_f(s)$.

例. $f(z) = \log \eta(z) \longleftrightarrow \phi_f(s) = -\zeta(s)\zeta(s+1)$ (Weil) ;

$f(z) = \log \theta(z) \longleftrightarrow \phi_f(s) = -2^{-s}\{-5+2(2^s+2^{-s})\}\zeta(s)\zeta(s+1)$

(Ogg).

2.2 Hecke積分 $f_\chi(z)$

$\chi$ を, primitive Dirichlet character mod $f$ $(f>1)$ とし,

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} , \quad Re\, s > 1 ;$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \chi(-1)=1 \text{ のとき} \\ 1 & \chi(-1)=-1 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$R(s,\chi) = \left(\frac{\pi}{f}\right)^{-\frac{s+\varepsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\varepsilon}{2}\right) L(s,\chi)$$

とするとき,

$$R(1-s,\bar{\chi}) = \frac{i^{\varepsilon} f^{1/2}}{\tau(\chi)} R(s,\chi) .$$

ここで, $\tau(\chi)$ は Gauss 和を表わす。そこで,

$$\phi(s) = L(s,\chi) L(s+1,\bar{\chi}),$$

$$\phi(s) \xrightarrow{\text{Mellin}} f_\chi(z)$$

とする。そのとき,

定理 1 $f_\chi(z)$ は Hecke積分で,

$$f_\chi(z) \in \begin{cases} \{f,0,0,0,1\} & \chi(-1)=1 \text{ のとき}, \\ \{f,0,0,iL(1,\bar{\chi})^2 f/\pi\tau(\chi),-1\} & \chi(-1)=-1 \text{ のとき}. \end{cases}$$

系 $G(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ とおく.

(1) $\chi(-1)=1$ なら

$$f_\chi\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f_\chi(z) \qquad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(f) ;$$

(2) $\chi(-1)=-1$ なら，

$$f_\chi\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\pm f_\chi(z)+\Phi_\chi\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\qquad \forall\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G(f).$$

ここで，$\chi$ は real, odd character とする。定理 1 より，

$$f_\chi\left(-\frac{1}{z}\right)=-f(z)+\frac{if}{\pi\tau(\chi)}L(1,\chi)^2.$$

$z=i$ とおいて，

$$f_\chi(i)=\frac{if}{2\pi\tau(\chi)}L(1,\chi)^2.$$

一方，$K_f$ を，$\chi$ に対応する２次体とすると，$\chi$ は導手 $f$ の odd 指標ゆえ，$K_f=\mathbb{Q}(\sqrt{-f})$ となる。$|f|>4$ とすると，$K_f$ の類数 $h_f$ は

$$h_f=\frac{f^{1/2}}{\pi}L(1,\chi)$$

だから，次を得る：

$$f_\chi(i)=\frac{i\pi}{2\tau(\chi)}h_f^2.$$

$f_\chi(i)>c$ となる effectively determined constant $c$ があるか？

（Goldfeld - Gross - Zagier と対比，参照）

2.3 Dirichlet の類数公式の一般化

以下で，$f_\chi(z)$ に関する一般な変換公式より，$\Phi_\chi\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ を決定し，それが Dirichlet の類数公式の一般化を与えることを示そう。次を考える：

$$\Gamma(f)^*=\langle\Gamma(f),S\rangle=\Gamma(f)\cup\Gamma(f)S,\quad S=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

<u>定理 2</u>. $\Gamma(f)^*\ni\sigma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $c>0$ に対し，

$$f_\chi(\sigma(z)) = \begin{cases} f_\chi(z) & \sigma \in \Gamma(f) \\ -f_\chi(z) + \pi i\, S_\chi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \sigma \in \Gamma(f)S. \end{cases}$$

ここで，$S_\chi$ は Dedekind 和の一種の拡張で，次式で与えられる：

$$S_\chi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau(\chi)} \sum_{p \bmod cf} \sum_{l \bmod f} \chi(p)\chi(l) \left(\left(\frac{p}{cf}\right)\right)\left(\left(\frac{cl+pa}{cf}\right)\right).$$

証明には，下記のような合同 zeta 関数の関数等式が使われる： $x \in \mathbb{R}^\times$，$\varepsilon = 0, 1$ とし，

$$\nu_\varepsilon(x) = \left(\frac{x}{|x|}\right)^\varepsilon$$

とおく。$h, k \in \mathbb{Z}$，$k \neq 0$ に対して，

$$\zeta_\varepsilon(s; h, k) = \sum_{n=-\infty,\, n \equiv h \bmod k}^{\infty}{}' \frac{\nu_\varepsilon(n)}{|n|^s}, \quad \mathrm{Re}\, s > 1$$

とする。$h = k = 1$，$\varepsilon = 0$ のとき，$2\zeta(s)$ と一致する．また，

$$\zeta_1(0; p, cf) = -2\left(\left(\frac{p}{cf}\right)\right)$$

が成立する。

$$F_{p,q,\varepsilon,k}(s) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-s} \Gamma(s)\, \zeta_\varepsilon(s; p, k)\, \zeta_\varepsilon(s+1; q, k)$$

とおくとき，次の関数等式

$$F_{p,q,\varepsilon,k}(s) = \frac{1}{|k|} \sum_{\alpha,\beta \bmod k} e^{2\pi i(\alpha p + \beta q)/|k|} F_{\beta,\alpha,\varepsilon,k}(-s)$$

が成立する．

さて，定理 1 より，$G(f) \cap \Gamma(f)S \ni \sigma$（odd という）に対し，

$$f_\chi(\sigma(z)) = -f_\chi(z) + \frac{if}{\pi\tau(\bar\chi)} L(1, \bar\chi)^2.$$

これに定理 2 を結びつけて，

$$L(1, \chi)^2 = \frac{\pi^2}{f} \sum_{p \bmod cf} \sum_{l \bmod f} \bar\chi(p)\bar\chi(l) \left(\left(\frac{p}{cf}\right)\right)\left(\left(\frac{cl+pa}{cf}\right)\right).$$

ここで

$$\chi(n) = \left(\frac{-f}{n}\right) \qquad (\text{Kronecker 記号})$$

とする. $\chi$ は odd, primitive, real Dirichlet character mod $f$ で,

$$L(1,\chi) = \frac{2\pi h_f}{w_f\sqrt{f}} \qquad (\text{Dirichlet}).$$

以上より, 次の定理を得る.

<u>定理3.</u> $G(f) \ni \sigma$ : odd に対し,

$$h_f^2 = \frac{w_f^2}{4}\sum_{p \bmod cf}\sum_{\ell \bmod f}\left(\frac{-f}{p}\right)\left(\frac{-f}{\ell}\right)\left(\left(\frac{p}{cf}\right)\right)\left(\left(\frac{c\ell+pa}{cf}\right)\right)$$

を得る. ここで, $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。

特に, $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると

$$h_f^2 = \left\{-\frac{w_f}{2f}\sum_{p=1}^{f-1} p\left(\frac{-f}{p}\right)\right\}^2.$$

これは, Dirichlet の類数公式に他ならない. 従って定理はその一般化に相当する。

## §3. $\Gamma(N)$ に関する Dedekind 和

### 3.1 一般な第一種 Fuchs 群に関する Dedekind 和

Kronecker の第一極限公式

$$\lim_{s\to 1}\left\{y^s\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' |m+nz|^{-2s} - \frac{\pi}{s-1}\right\} = 2\pi\left(c - \log 2 - \log(\sqrt{y}|\eta(z)|^2)\right)$$

を一般な第一種 Fuchs 群の場合に拡張して, Dedekind 和の一般化を得る ($c$ は Euler の定数)。即ち,

$\Gamma$ : 第一種 Fuchs 群, $\kappa$ : $\Gamma$ の cusp

とするとき，

$(\Gamma, \kappa)$ に対する極限公式 $\longrightarrow$ $\eta(z)$ に類似な関数

$\longrightarrow$ 一般化されたDedekind和．

(A) cusp における Eisenstein 級数

$\kappa_1, \cdots, \kappa_h$ ：$\Gamma$ の非同値な cusp たち，

$\sigma_i(\infty) = \kappa_i$ ，$\sigma_i \in SL(2, \mathbb{R})$ ，$(i = 1, 2, \cdots, h)$ ，

$\sigma_i^{-1}\Gamma_i\sigma_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{Z} \right\}$，　$z = x + iy \in \mathfrak{H}^+$，$y(z) = y$

とする。cusp $\kappa_i$ に関する Eisenstein 級数は，

$$E_i(z, s) = \sum_{\sigma \in \Gamma_i \backslash \Gamma} y(\sigma_i^{-1}\sigma z)^s, \quad Re\ s > 1$$

で定義される。

<u>定理A</u>．$E_i(z,s)$ は全 $s$－平面に有理型関数として解析接続でき，$[0,1]$ に simple poles をもつ．$s=1$ には常に pole をもつ．

$E_i(z,s)$ の基本性質：

1) $E_i(\sigma(z), s) = E_i(z, s) \qquad \forall \sigma \in \Gamma$ ；

2) $\Delta E_i(z, s) = s(s-1) E_i(z, s)$，　但し，$\Delta = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ ；

3) $E_i(\sigma_j(z), s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{ij,m}(y, s)\, e^{2\pi i m x}$ ；

ここで，

$$a_{ij,m}(y, s) = \begin{cases} \delta_{ij} y^s + \phi_{ij}(s) y^{1-s}, & m = 0, \\ 2\pi^s |m|^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)^{-1} y^{\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)\, \phi_{ij,m}(s), & m \neq 0, \end{cases}$$

$$\phi_{ij,m}(s) = \sum_c \frac{1}{|c|^{2s}} \left( \sum_d e^{2\pi i \frac{md}{c}} \right), \quad \left( \begin{matrix} c > 0 \\ d \bmod c \end{matrix}, \ \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \sigma_i^{-1}\Gamma\sigma_j \right)$$

$$\phi_{ij}(s) = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \phi_{ij,0}(s)$$

$$K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi u) = \frac{1}{2}\pi^{-s}|u|^{\frac{1}{2}-s}\Gamma(s)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i u t}}{(1+t^2)^s}\,dt \qquad (u>0)$$

ここで，$E_i(z,s)$ に関する極限公式を作るために，$a_{ij,m}(y,1)$ を求める $(m\neq 0)$。

$$K_{\frac{1}{2}}(2\pi|m|y) = (2\pi)^{-1}(|m|y)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i|m|ty}}{(t^2+1)}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}(|m|y)^{-\frac{1}{2}} e^{-2\pi|m|y}$$

$$\phi_{ij,m}(1) = \lim_{s\to 1} \sum_c \frac{1}{|c|^{2s}} \sum_d e^{2\pi i \frac{md}{c}}$$

従って，

$$a_{ij,m}(y,1) = 2\pi|m|^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)\phi_{ij,m}(1)$$

$$= \pi e^{-2\pi|m|y}\phi_{ij,m}(1) \qquad (m\neq 0).$$

(B)　$(\Gamma, \kappa_i)$ に関する極限公式

$a_{ij,0}(s,y)$ は $s=1$ で simple pole をもち，$a_{ij,m}(s,y)$ $(m\neq 0)$ は $s=1$ で連続ゆえ，

$$\lim_{s\to 1}\{E_i(\sigma_j z,s) - a_{ij,0}(y,s)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' a_{ij,m}(y,1)e^{2\pi i m x}$$

$$= \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' e^{(-2\pi|m|x + 2\pi i m x)}\phi_{ij,m}(1)$$

$$= \pi\sum_{m=1}^{\infty}\phi_{ij,m}(1)q^m + \pi\sum_{m=1}^{\infty}\phi_{ij,-m}(1)q'^m, \quad q=e^{2\pi i z},\ q'=e^{-2\pi i\bar{z}},$$

$$= \pi\sum_{m=1}^{\infty}\phi_{ij,m}(1)q^m + \pi\sum_{m=1}^{\infty}\overline{\phi_{ij,m}(1)q'^m}.$$

次に，$a_{ij,0}(y,s)$ を explicit に表わそう；

$$\phi_{ij,0}(s) = \frac{\alpha_{ij}}{s-1} + \beta_{ij} + (\text{higher order terms});$$

$$y^{1-s} = 1 + (\log y^{-1})(s-1) + (\text{higher order terms});$$

$$\Gamma(s-\tfrac{1}{2})/\Gamma(s) = \sqrt{\pi}\,(1-(2\log 2)(s-1) + \cdots).$$

$$a_{ij,0}(y,s) = \frac{c_{ij}}{s-1} + d_{ij} + (\textit{higher order terms})$$

とすると

$$a_{ij,0}(y,s) = \sqrt{\pi}\,(1+(\log y^{-1})(s-1)+\cdots)\cdot\sqrt{\pi}\,(1-(2\log 2)(s-1)+\cdots)$$
$$\times\left(\frac{\alpha_{ij}}{s-1}+\beta_{ij}+\cdots\right)+(\delta_{ij}\,y+\cdots)$$

$$c_{ij} = \pi\alpha_{ij}\ ,\quad d_{ij} = \pi(\beta_{ij}+\alpha_{ij}\log y^{-1} - 2\alpha_{ij}\log 2)+\delta_{ij}\,y\,.$$

よって,

$$\lim_{s\to 1}\left\{\frac{1}{2\pi}E_i(\sigma_j z, s) - \frac{\alpha_{ij}}{2(s-1)}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\beta_{ij} - \alpha_{ij}\log 2 + \alpha_{ij}\left\{\frac{1}{2}\log y^{-1} + \frac{y}{2\pi\alpha_{ij}}\delta_{ij}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\alpha_{ij}}\sum_{m=1}^{\infty}\phi_{ij,m}(1)\,q^m + \frac{1}{2\alpha_{ij}}\sum_{m=1}^{\infty}\overline{\phi_{ij,m}(1)\,q^{m}}\right\}.$$

ここで, $\alpha_{ii}=\alpha_i$, $\beta_{ii}=\beta_i$ とおいて,

$$\log\eta_{\Gamma,i}(z) = -\frac{z}{4\pi i\alpha_i} - \frac{1}{2\alpha_i}\sum_{m=1}^{\infty}\phi_{ii,m}(1)\,q^m$$

で, $(\Gamma,\kappa_i)$ に関する eta 関数 $\eta_{\Gamma,i}$ を定義する。そのとき,

<u>定理 $B_1$</u>

$$\lim_{s\to 1}\left\{\frac{1}{2\pi}E_i(\sigma_i(z),s) - \frac{\alpha_i}{2(s-1)}\right\} = \frac{1}{2}\beta_i - \alpha_i\log 2 - \alpha_i\log|y^{\frac{1}{2}}\eta_{\Gamma,i}(z)^2|.$$

<u>定理 $B_2$</u> $\sigma_i^{-1}\Gamma\sigma_i \ni \sigma$ に対し,

$$\log\eta_{\Gamma,i}(\sigma(z)) = \log\eta_{\Gamma,i}(z) + \frac{1}{2}\log(cz+d) + \pi i\,S_{\Gamma,i}(\sigma).$$

ここで, $\sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$, $S_{\Gamma,i}(\sigma)$ は実数で, s に依存しない。これを $(\Gamma,\kappa_i)$ に *attach* した Dedekind 和という。

N.B. 1) $\phi_{ij}(s) = \frac{\alpha_{ij}}{s-1}+\beta_{ij}+\cdots$ とするとき, Maass-Selberg *relation* より, $\alpha_{ij} = 1/\pi v(\mathfrak{h}^+/\Gamma)$.

2) $S_{\Gamma,i}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ は有理数。一般に, *arithmetic subgroup*

$\Gamma$ に対し，$S_{\Gamma,i}(\sigma)$　$(\sigma\in\Gamma)$ は代数的か？

3）いかなる体の *appropriate zeta* 関数が $\log\eta_{\Gamma,i}(z)$ に対応するか？

<u>定理 $B_3$</u>　$\sigma_i^{-1}\Gamma\sigma_i \ni \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，

$$\eta_{\Gamma,i}(\sigma(z)) = v(\sigma)\sqrt{cz+d}\;\eta_{\Gamma,i}(z)$$

$$v(\sigma) = e^{\pi i S_{\Gamma,i}(\sigma)}.$$

3.2　$\Gamma(N)$ に関する Dedekind 和とその相互法則

(A)　極限公式と $\log\eta_N$ について

まず次の Eisenstein 級数を導入する。$g, h\in\mathbb{Z}$，$(g,h,N)=1$ のとき，

$$E_{g,h}(z,s;N) = \frac{\delta(N)}{2}\sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z}\\ \binom{c}{d}\equiv\binom{g}{h} \bmod N\\ (c,d)=1}}{}' \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}},$$

$$E^*_{g,h}(z,s;N) = \frac{\delta(N)}{2}\sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z}\\ \binom{c}{d}\equiv\binom{g}{h} \bmod N}}{}' \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}},\qquad \delta(N)=\begin{cases}1 & (N\leq 2)\\ 2 & (N>2)\end{cases}$$

簡単な計算により，$\Gamma=\Gamma(N)$ の *cusp* $\kappa_j=\alpha/\beta$，$(\alpha,\beta)=1$，に関する Eisenstein 級数 $E_j(z,s)$ は $E_{-\beta,\alpha}(z,s;N)$ であることが分る。よって $E_{g,h}(z,s;N)$ を *Fourier* 展開する。$\mu(n)$ を *Möbius* 関数として，

$$E_{g,h}(z,s,N) = \sum_{\substack{a=1\\ (a,N)=1}}^{N}\sum_{\substack{n=1\\ an\equiv 1(N)}}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^{2s}}E^*_{ag,ah}(z,s;N).$$

を得る。一方，

$$E^*_{g,h}(z,s;N) = \frac{\delta(N)y^s}{2}\Big[\theta_N(g)\sum_{\substack{d\in\mathbb{Z}\\ d\equiv h(N)}}{}'|d|^{-2s} + \sum_{\substack{c\in\mathbb{Z}\\ c\equiv g(N)}}{}'\sum_{\substack{d\in\mathbb{Z}\\ d\equiv h(N)}}|cz+d|^{-2s}\Big],$$

ここで $\theta_N(g)$ は $g\equiv 0 \bmod N$ のとき 1，他では 0 とする。

[ ] 内第二項の内側に *Poisson* 和公式を適用して，

$$\frac{y^{1-2s}}{N}\sum_{\substack{c\in\mathbb{Z}\\ c\equiv g(N)}}{}' |c|^{1-2s}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i m(cx+h)/N}\,I\left(s, -\frac{2\pi m|c|y}{N}\right), \quad I(s,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iuv}}{(u^2+1)^s}du$$

として，

$$E^*_{g,h}(z,s;N)=\frac{\delta(N)}{2}\Big[y^s\theta_N(g)\sum_{\substack{d\in\mathbb{Z}\\ d\equiv h(N)}}{}'|d|^{-2s}+\frac{y^{1-s}}{N}I(s,0)\sum_{\substack{c\in\mathbb{Z}\\ c\equiv g(N)}}{}'|c|^{1-2s}\Big]$$
$$+\frac{y^{1-s}\delta(N)}{2N}\sum_{n\in\mathbb{Z}}{}' e^{2\pi i n x/N}\,I\left(s,-\frac{2\pi n y}{N}\right)\sum_{\substack{c|n\\ c\equiv g(N)}}|c|^{1-2s}e^{2\pi i n h/cN}$$

となる。従って，

$$E_{g,h}(z,s;N)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_{m,g,h}(y,s;N)e^{2\pi i m x/N}$$

とするとき，

$$a_{0,g,h}(y,s;N)=\frac{\delta(N)}{2}\sum_{\substack{a=1\\ (a,N)=1}}^{N}\sum_{\substack{n=1\\ an\equiv 1(N)}}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^{2s}}\Big[y^s\theta_N(ag)\sum_{\substack{d\in\mathbb{Z}\\ d\equiv ah(N)}}{}'|d|^{-2s}+\frac{y^{1-s}}{N}I(s,0)$$
$$\times\sum_{\substack{c\in\mathbb{Z}\\ c\equiv ag(N)}}{}'|c|^{1-2s}\Big]$$

$$a_{m,g,h}(y,s;N)=\frac{y^{1-s}\delta(N)}{2N}\sum_{\substack{a=1\\ (a,N)=1}}^{N}\sum_{\substack{n=1\\ an\equiv 1(N)}}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^{2s}}I\left(s,-\frac{2\pi m y}{N}\right)\sum_{\substack{c|m\\ c\equiv ag(N)}}|c|^{1-2s}e^{2\pi i a h m/cN}$$

ここで，$E_i(z,s)$ の定義と，$\Gamma(N)\triangleleft SL_2(\mathbb{Z})$ であることより，$\kappa_1=\infty=1/0$ とすると，$E_i(\sigma_i z,s)=E_1(Nz,s)=E_{0,1}(Nz,s;N)$ となる。よって $\Gamma(N)$ に関する $\eta$-関数は cusp によらず唯一つだけ存在する。それを簡単に $\eta_N$ と記し，定理 $B_1$ における $\alpha_i,\beta_i,\phi_{i,i,m}$ も夫々 $\alpha_N,\beta_N,\phi_{N,m}$ と記すことにすると

$$a_{m,0,1}(Ny,s;N)=\begin{cases} y^s+\sqrt{\pi}\dfrac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\phi_{N,0}(s)y^{1-s} & (m=0)\\ 2\pi^s|m|^{s-\frac{1}{2}}\Gamma(s)^{-1}\sqrt{y}\,K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)\phi_{N,m}(s) & (m\neq 0)\end{cases}$$

となる。$I(s,0)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})\Gamma(s)^{-1}$ に注意して，

$$\phi_{N,0}(s)=\delta(N)N^{1-3s}\frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)}\prod_{p|N}(1-p^{-2s})^{-1}$$

となる。従って，

$$\alpha_N=\frac{3\delta(N)}{\pi^2N^2}\prod_{p|N}(1-p^{-2})^{-1},$$

$$\beta_N = \frac{6\delta(N)}{\pi^2 N^2} \prod_{p|N} (1-p^{-2})^{-1} \left( C - \log N - \prod_{p|N} \frac{\log p}{p^2-1} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right)$$

を得る（Cは Euler の定数）。$m \neq 0$ の場合も同様にして，

$$\phi_{N,m}(s) = \frac{\delta(N)}{2N^s} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,N)=1}}^{N} \sum_{\substack{n=1 \\ an\equiv 1(N)}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{2s}} \sum_{\substack{c|m \\ c\equiv 0\,(N)}} |c|^{1-2s} e^{2\pi i am/cN}$$

を得る。今，

$$C_{N,r} = \frac{\pi^2}{6} \prod_{p|N} (1-p^{-2}) \sum_{\substack{a=1 \\ (a,N)=1}}^{N} \sum_{\substack{n=1 \\ an\equiv 1(N)}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} \cos \frac{2\pi ar}{N}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
\log \eta_N(z) + \frac{z}{4\pi i\alpha_N} &= -\frac{1}{2\alpha_N} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{N,m}(1) e^{2\pi imz} \\
&= -\frac{N}{2} \sum_{m=1}^{\infty} e^{2\pi imz} \sum_{\substack{c|m \\ c\equiv 0(N)}} |c|^{-1} \cdot \frac{\pi^2}{6} \prod_{p|N} (1-p^{-2}) \sum_{\substack{a=1 \\ (a,N)=1}}^{N} \sum_{\substack{n=1 \\ na\equiv 1(N)}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} e^{2\pi iam/cN} \\
&= -N \sum_{m=1}^{\infty} e^{2\pi imz} \sum_{\substack{0<c|m \\ c\equiv 0(N)}} \frac{1}{c} C_{N,\frac{m}{c}} = \sum_{d=1}^{\infty} C_{N,d} \log(1-e^{2\pi idNz}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{N-1} C_{N,Nk-r} \log(1-e^{2\pi i(Nk-r)Nz}) = \sum_{r=0}^{N-1} C_{N,r} \log \prod_{\substack{m=1 \\ m\equiv -r(N)}}^{\infty} (1-e^{2\pi imNz})
\end{aligned}$$

<u>定理</u>　$\Gamma(N)$ の cusp $\kappa_i$ に関する Eisenstein 級数を $E_i(z,s)$ とするとき，

$$\lim_{s\to 1} \left( \frac{1}{2\pi} E_i(\sigma_i z, s) - \frac{\alpha_N}{2(s-1)} \right) = \frac{1}{2}\beta_N - \alpha_N \log 2 - \alpha_N \log|\sqrt{y}\, \eta_N(z)^2|$$

である。ここで，$\alpha_N, \beta_N, C_{N,r}$ は上のものとして，

$$\log \eta_N(z) = -\frac{z}{4\pi i\alpha_N} + \sum_{r=0}^{N-1} C_{N,r} \log \prod_{\substack{m=1 \\ m\equiv -r(N)}}^{\infty} (1-e^{2\pi imNz})$$

（B）$\Gamma(N)$ に関する Dedekind 和について

$$\begin{aligned}
\log \eta_N(z) + \frac{z}{4\pi i\alpha_N} &= -\sum_{d=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} C_{N,d} \frac{e^{2\pi idrNz}}{r} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \zeta(2) \prod_{p|N} (1-p^{-2}) \sum_{\substack{A=1 \\ (A,N)=1}}^{N} \sum_{\substack{n=1 \\ An\equiv 1(N)}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} \left( \sum_{d=1}^{\infty} \zeta_N^{Ad} Q^{rd} + \sum_{d=1}^{\infty} \zeta_N^{-Ad} Q^{rd} \right)
\end{aligned}$$

である。（$\zeta_N = e^{2\pi i/N}$, $Q = e^{2\pi iNz}$）。これと，$\zeta = \zeta_N, \zeta_N^{-1}$ に対しての

$$\mathrm{Im} \sum_{d=1}^{\infty} \zeta^{Ad} Q^{rd} = \mathrm{Im} \frac{\zeta^A Q^r}{1-\zeta^A Q^r} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{1-\zeta^A Q^r} - \frac{1}{1-\zeta^{-A} Q^r} \right)$$

より次の補助式を得る：

$$Im\ \log \eta_N(z) = \frac{z+\bar{z}}{8\pi\alpha_N} - \frac{1}{4i}\zeta(2)\prod_{p|N}(1-p^{-2})$$
$$\times \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sum_{\substack{A=1\\(A,N)=1}}^{N}\sum_{\substack{n=1\\An\equiv 1(N)}}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}\left(\frac{1}{1-\zeta_N^A Q^r}-\frac{1}{1-\zeta_N^{-A}\bar{Q}^r}+\frac{1}{1-\zeta_N^{-A}Q^r}-\frac{1}{1-\zeta_N^A\bar{Q}^r}\right).$$

定理 $B_2$ において定義された $\eta_N(z)$ の変換公式の中に現われる Dedekind 和を $S_N(\sigma)$ と記し，以下で $\sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma(N)$ に対して，$S_N(\sigma)$ を具体的に表わす。

case I（$c\neq 0$ の場合）

$z=-\frac{d}{c}+\frac{i}{c^2u}$ とおくと，$S_N(\sigma)$ が $z$ に無関係であるので，

$$S_N(\sigma)=\frac{1}{\pi}\lim_{u\to+0} Im\left[\log\eta_N\left(\frac{a}{c}+iu\right)-\log\eta_N\left(-\frac{d}{c}+\frac{i}{c^2u}\right)-\frac{1}{2}\log\frac{i}{cu}\right)$$

となる。以下，右辺の各項の値を，上の補助式を用いて具体的に決定していく。まず $u>0$ より

$$Im\ \log\frac{i}{cu} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\, c\ .$$

次に $z=-\frac{d}{c}+\frac{i}{c^2u}$ のとき，$Q=e^{-\frac{2\pi N}{c^2}\frac{1}{u}}e^{-\frac{2\pi Nd}{c}i}\to 0\ (u\to 0)$ だから，上の補助式より，次を得る：

$$\lim_{u\to+0} Im\ \log\eta_N\left(-\frac{d}{c}+\frac{i}{c^2u}\right) = -\frac{d}{4\pi\alpha_N c}\ .$$

最後に $z=\frac{a}{c}+iu$ の場合を考察する。$W=e^{2\pi iNa/c}$ とおくと，$Q=We^{-2\pi uN}\to W$（$u\to 0$ のとき）となることと，一般に，$\eta^k=1$，$\eta\neq 1$ ならば

$$\frac{1}{1-\eta} = -\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} j\eta^j$$

であり，$(\zeta^A W^r)^{|c|N}=1$ に注意すると，$\zeta^A W^r\neq 1$ のとき，

$$\lim_{u\to 0}\left[\frac{1}{1-\zeta^A Q^r}-\frac{1}{1-\zeta^{-A}\bar{Q}^r}\right] = -\frac{1}{|c|N}\sum_{j=0}^{|c|N-1} j\left(\zeta^{Aj}W^{rj}-\zeta^{-Aj}W^{-rj}\right)$$

を得るが，$\zeta^A W^r=1$ のときも上式は共に 0 となって成り立つ。

結局，補助式右辺の最後のカッコの中は

$$-\frac{2i}{|c|N}\sum_{j=0}^{|c|N-1} j\left(\sin\left(\frac{2\pi Naj}{c}r+\frac{2\pi jA}{N}\right)+\sin\left(\frac{2\pi Naj}{c}r-\frac{2\pi jA}{N}\right)\right)$$
$$=\frac{-4i}{|c|N}\sum_{j=0}^{|c|N-1} j\cos\frac{2\pi jA}{N}\sin\frac{2\pi Najr}{c}$$

に等しくなり，

$$\lim_{u\to+0}\mathrm{Im}\log\eta_N\left(\frac{a}{c}+iu\right)$$
$$=\frac{a}{4\pi\alpha_N c}+\frac{1}{|c|N}\sum_{j=0}^{|c|N-1} j\,\zeta(2)\prod_{p|N}(1-p^{-2})\sum_{\substack{A=1\\(A,N)=1}}^{N}\sum_{\substack{n=1\\An\equiv1(N)}}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}\cos\frac{2\pi jA}{N}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\pi Najr}{c}}{r}$$
$$=\frac{a}{4\pi\alpha_N c}-\frac{\pi}{|c|N}\sum_{j=0}^{|c|N-1} j\,C_{N,j}\left(\left(\frac{Naj}{c}\right)\right)$$

を得る。以上まとめて，

$$S_N(\sigma)=\frac{a+d}{4\pi^2\alpha_N c}-\frac{1}{4}\frac{c}{|c|}-\frac{1}{|c|N}\sum_{j=0}^{|c|N-1} j\,C_{N,j}\left(\left(\frac{Naj}{c}\right)\right).$$

case II （$c=0$ の場合）

$\sigma=\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}$ となるので，

$$\log\eta_N(\sigma z)+\frac{z+b}{4\pi i\alpha_N}=-\sum_{d,r=1}^{\infty}C_{N,d}\frac{e^{2\pi idrN(z+b)}}{r}$$
$$\log\eta_N(z)+\frac{z}{4\pi i\alpha_N}=-\sum_{d,r=1}^{\infty}C_{N,d}\frac{e^{2\pi idrNz}}{r}$$

と，$\log\eta_N$ の変換公式より

$$S_N(\sigma)=\frac{b}{4\pi^2\alpha_N}$$

を得る。case I, II をまとめて，

<u>定理</u>　$\sigma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma(N)$ に対し Dedekind 和 $S_N(\sigma)$ は次で与えられる。

$$S_N(\sigma)=\begin{cases}\dfrac{b}{4\pi^2\alpha_N} & (c=0)\\[2ex] \dfrac{a+d}{4\pi^2\alpha_N c}-\dfrac{1}{4}\dfrac{c}{|c|}-\dfrac{1}{|c|N}\displaystyle\sum_{j=0}^{|c|N-1} j\,C_{N,j}\left(\left(\frac{Naj}{c}\right)\right) & (c\neq0)\end{cases}$$

ただし，$\alpha_N = \frac{3\delta(N)}{\pi^2 N^2} \prod_{p|N} (1-p^{-2})^{-1}$

$$C_{N,j} = \frac{\pi^2}{6} \prod_{p|N} (1-p^{-2}) \sum_{\substack{A=1 \\ (A,N)=1}}^{N} \sum_{\substack{n=1 \\ An\equiv 1\,(N)}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} \cos\frac{2\pi A j}{N} .$$

今，$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$ に対し，$\Phi_N(\sigma) = 12(S_N(\sigma) + \frac{1}{4}\,\mathrm{sign}\, c)$ とおく。$\sigma_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$ $(i=0,1,2)$ を $\sigma_0 = \sigma_1\sigma_2$ となるようにとると，変換公式より

$$\frac{1}{2}\Big\{(\mathrm{sign}\, c_0)^2 \log\frac{|c_0|z + d_0\,\mathrm{sign}\, c_0}{i} - (\mathrm{sign}\, c_1)^2 \log\frac{|c_1|z + d_1\,\mathrm{sign}\, c_1}{i}$$
$$- (\mathrm{sign}\, c_2)^2 \log\frac{|c_2|z + d_2\,\mathrm{sign}\, c_2}{i}\Big\} = \frac{\pi i}{12}(\Phi_N(\sigma_1) + \Phi_N(\sigma_2) - \Phi_N(\sigma_0))$$

を得る。[26] の (71.61) より左辺 { } の中は

$$\frac{\pi i}{2}\,\mathrm{sign}(c_0 c_1 c_2)$$

に等しくなる。結局，次が成り立つ：

<u>定理</u>（三項関係）

$\sigma_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$ $(i=0,1,2)$ で $\sigma_0 = \sigma_1\sigma_2$ のとき，

$$\Phi_N(\sigma_1) + \Phi_N(\sigma_2) - \Phi_N(\sigma_0) = 3\,\mathrm{sign}(c_0 c_1 c_2).$$

(C) $C_{N,j}$ の値といくつかの $\eta_N$ の具体的な形について

$N \leqq 2$ の場合，$C_{1,j} = 1$，$C_{2,j} = (-1)^j$ である。

$$\xi_1 = \zeta(2) \prod_{p|N} (1-p^{-2}), \quad a\bar{a} \equiv 1 \bmod N, \quad S_a = \xi_1 \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv \pm a\,(N)}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2}$$

とおく。以下，$N > 2$ とする。

$$C_{N,j} = \xi_1 \sum_{\substack{a=1 \\ (a,N)=1}}^{N} \sum_{\substack{n=1 \\ an\equiv 1\,(N)}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} \cos\frac{2\pi a j}{N} = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,N)=1}}^{[N/2]} S_a \cos\frac{2\pi \bar{a} j}{N}$$

となる。

$\chi_l$ $(l=1,\cdots,\frac{1}{2}\varphi(N))$ を mod N の指標で、$\chi_l(-1)=1$ となっているものとし、$\chi_1$ は主指標とする。

$$\xi_l = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_l(n)}{n^2}$$

とおくと，$\xi_1$ は上で定めたものと一致する。$\chi(a)=-\chi(a)$ より，

$$\xi_l = \sum_{a=1}^{[N/2]} \chi_l(a) \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv \pm a(N)}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{a=1}^{[N/2]} \chi_l(a) \sum_{n\equiv a(N)} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{N^2} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,N)=1}}^{[N/2]} \frac{\chi_l(a)}{\sin^2 \frac{a\pi}{N}}$$

となり，$\xi_l \in \mathbb{Q}(e^{2\pi i/N}, e^{2\pi i/\varphi(N)})$ となることが分る。一方．

$$\xi_1/\xi_l = \xi_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_l(n)\mu(n)}{n^2} = \xi_1 \sum_{a=1}^{[N/2]} \chi_l(a) \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv \pm a(N)}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \sum_{a=1}^{[N/2]} \chi_l(a) S_a$$

すなわち，$(l=1,\cdots,\frac{1}{2}\varphi(N)\ ;\ a=1,\cdots,[N/2],\ (a,N)=1$ と動かし$)$ これを $S_a$ について解いて，$C_{N,j}$ の値が計算できる。とくに $S_a$ が，従って $C_{N,j}$ が，従って Dedekind 和 $S_N(\sigma)$ が円分体の数であることが分る。もう少し詳しい計算をすることにより，$C_{N,j}$ が有理数であることが示される。

例．$C_{3,j} = \cos \frac{2\pi j}{3}$，　$C_{4,j} = \cos \frac{\pi j}{2}$

$$C_{5,j} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cos \frac{2\pi j}{5} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cos \frac{4\pi j}{5}, \quad C_{6,j} = \cos \frac{\pi j}{3}$$

例　$\eta_1(z) = \eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)$

$$\eta_2(z) = q^{-\frac{1}{8}} \frac{\eta(4z)^2}{\eta(2z)} = \frac{1}{2} q^{-\frac{1}{8}} \vartheta_2(2z)$$

$$\eta_3(z)^2 = q^{-\frac{2}{3}} \frac{\eta(9z)^3}{\eta(3z)}$$

$$\eta_4(z) = q^{-\frac{1}{12}} \frac{\eta(32z)^2}{\eta(16z)} = \frac{1}{2} q^{-\frac{1}{12}} \vartheta_2(16z).$$

## References


[1] T. M. Apostol, Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series, Duke Math. J., 17 (1950), 147-157.

[2] T. M. Apostol, Theorems on generalized Dedekind sums, Pacific J. Math., 2 (1952), 1-9.

[3] K. Barner, Über die Werte der Ringklassen-L-Funktionen reelle-quadratischer Zahlkörper an natürlichen Argumentstellen, J. Number Theory, 1 (1969), 28-64.

[4] B. C. Berndt, Generalized Eisenstein series and modified Dedekind sums, J. Reine Angew. Math., 272 (1975), 182-193.

[5] L. Carlitz, Some theorems on generalized Dedekind sums, Pacific J. Math., 3 (1953), 513-522.

[6] L. Carlitz, The reciprocity theorem for Dedekind sums, Ibid., 523-527.

[7] L. Carlitz, Dedekind sums and Lambert series, Proc. Amer. Math. Soc., 5 (1954), 580-584.

[8] L. Carlitz, A note on generalized Dedekind sums, Duke Math. J., 21 (1954), 399-404.

[9] R. Dedekind, Erläuterungen zu zwei Fragmenten von Riemann, Dedekind's Gesammelte Math. Werke, 1930, vol. 1, 159-173.

[10] U. Dieter, Das Verhalten der Kleinschen Funktionen log $\sigma_{g,h}(\omega_1,\omega_2)$ gegenüber Modultransformationen und verallgemeinerte Dedekindsche Summen, J. Reine Angew. Math., 201 (1959), 37-70.

[11] L. J. Goldstein, Dedekind sums for a Fuchsian group I, Nagoya Math. J., 50 (1973), 21-47.

[12] L. J. Goldstein and P. de la Torre, On the transformation of log $\eta(\tau)$, Duke Math. J., 41 (1974), 291-297.

[13] L. J. Goldstein and M. Razer, A generalization of Dirichlet's class number formula, Ibid., 43 (1976), 349-358.

[14] L. J. Goldstein and M. Razer, The theory of Hecke integrals, Nagoya Math. J., 63 (1976), 93-121.

[15] F. Hirzebruch, The signature theorem : reminiscences and recreation, in Prosprcts in Math., Ann. of Math. Studies No.70, Princeton Univ. Press (1971), 3-31.

[16] F. Hirzebruch and D. Zagier, The Atiyah-Singer Theorem and Elementary Number Theory, Math. Lecture Series 3, Publish or Perish, Inc., Boston, 1974.

[17] C. Meyer, Über einige Anwendungen Dedekindscher Summen, J. Reine Angew. Math., 198 (1957), 143-203.

[18] C. Meyer, Die Berechnung der Klassenzahl Abelscher Körper über quadr. Zahlkörpern, Akademie-Verlag, Berlin, 1957.

[19] C. Meyer, Bemerkungen zu den allgemeinen Dedekindschen Summen, J. Reine Angew. Math., 205 (1960), 186-196.

[20] M. Mikolás, On certain sums generating the Dedekind sums and their reciprocity laws, Pacific J. Math., 7 (1957), 1167-1178.

[21] M. Mikolás, Über gewisse Lambertsche Reihen, I : Verallgemeinerung der Modulfunktion $\eta(\zeta)$ und ihrer Dedekindschen Transformationsformel, Math. Z., 68 (1957), 100-110.

[22] L. J. Mordell, On the reciprocity formula for Dedekind sums, Amer. J. Math., 73 (1951), 593-598.

[23] L. J. Mordell, Lattice points in a tetrahedron and generalized Dedekind sums, J. Indian Math. Soc., 15 (1951), 41-46.

[24] H. Rademacher and A. Whiteman, Theorems on Dedekind sums, Amer. J. Math., 63 (1941), 377-407.

[25] H. Rademacher and E. Grosswald, Dedekind Sums, The Math. Association of America, 1972.

[26] H. Rademacher, Topics in Analytic Number Theory, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1973.

[27] L. Rédei, Elementarer Beweis und Verallgemeinerung einer Reziprozitätsformel von Dedekind, Acta Sci. Math. (Szeged), 12(B) (1950), 236-239.

[28] G. J. Rieger, Dedekindsche Summen in algebr. Zahlkörpern, Math. Ann., 141 (1960), 377-383.

[29] B. Schoeneberg, Verhalten von speziellen Integralen 3. Gattung bei Modultransformationen und verallgemeinerte Dedekindsche Summen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 30 (1967), 1-10.

[30] R. Sczech, Dedekindsummen mit elliptischen Funktionen, Invent. Math., 76 (1984), 523-551.

[31] R. Sczech, Dedekind sums and power residue symbols, Univ. of Maryland, TR85-4, January 1985, 32p.

[32] A. Weil, Sur une formule classique, J. Math. Soc. Japan, 20 (1968), 400-402.

[33] K. Wohlfahrt, Über Dedekindsche Summen und Untergruppen der Modulgruppe, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 23 (1959), 5-10.

[34] D. Zagier, Higher-dimensional Dedekind sums, Math. Ann., 202 (1973), 149-172.