

複素領域における微分方程式の解の特異性について

— « Regardez les singularités : il n'y a que ça qui compte. »

Gaston Julia —

京大数理研 米村明芳 (Akiyoshi Yonemura)

0. Introduction

まずはじめに、講究録が非公式出版であることに鑑み、かなり非公式的に書くことをお断りしておきます。

複素領域で(偏)微分方程式(系)を考える。ある領域でその係数は正則(有理型)と仮定する。まず、局所的に考えて、各点で形式的に解けることは勿論、大前提である。更に、必要な条件を置いて、解が一意的であるとか、有限次元であるとか、かなりたっていることが望ましい。ある1点で、方程式が1つの函数要素を定めるとしよう。函数関係不変の原理により、解は接続される限り解である。従って、二点での中心問題の1つは、この解がどこまで接続されるか、即ち、逆にいうと、解の特異性はどこにあらわれるか、である。この方向の研究は、最終的には大域理論を目指している。

常微分方程式では、古くからこのような視点から研究は行われてきた。局所解の一意存在を保証するのは、Cauchyの定理である。線型の場合、解の特異性は方程式の特異性であ

り、解が有限次元であることから、解の多価性を調べる尺度として、モノドロミ一群などがあるが、これに関して、Riemann-Hilbert (-Birkhoff) の問題などがあり、これらに関する研究は数多くあったし、今後もあり続けるだろう。非線型の場合には、一般には特異点の位置は方程式からは決らない、即ち、動く特異点が存在する。そこで、動く特異点をもたない方程式—これは線型方程式の一般化とも考えられる—は、どんなものが、どのような問題が考えられる。これが Painlevé 等に取りあげられたことは周知である。

以下、線型常微分方程式の多変数への拡張という視点から、偏微分方程式について概説したい。

尚、非線型偏微分方程式についての Cauchy 問題で、非線型性により特異性のあらわれる現象については、梶谷氏の仕事 [8] を参照して欲しい。

拡張の仕方は大きく2通り考えられる。1つは、単独の方程式に対して Cauchy 問題を考える (I)、もう1つは、完全積分可能系を考えること (II)、である。* III 章では、(I) に関連した問題について言及する。

最後に、話しをする機会を与えて下さった、田島、青木両氏に感謝致します。

I. 単独方程式に対する Cauchy 問題

§1. 常微分方程式について次の結果はよく知られている;
 Ω を領域 $\subset \mathbb{C}$, $a_j \in \mathcal{O}(\Omega)$, $P(z, \frac{d}{dz}) = \sum_{j=0}^m a_j(z) (\frac{d}{dz})^j$ とする。

このとき,

$$\langle P(z, \frac{d}{dz}) u(z) = 0 \ (\Omega \subset \mathbb{C}) \Rightarrow u \text{ の特異性 } \subset \{z; a_m(z) = 0\} \rangle.$$

これを拡張すると, 次のようになる。 Ω 領域 $\subset \mathbb{C}^n$, Ω 上で定義された正則微分作用素 $P(z, D)$, S を非特異超曲面 $\subset \Omega$ とする。

定理 1 (Y. Hamada)

$$\left\{ \begin{array}{l} P(z, D) u(z) = 0, \ u(z) \in \mathcal{O}(\widetilde{\Omega - S}) \\ u(z) \text{ は } S \text{ 上に特異性をもつ} \end{array} \right. \Rightarrow S \text{ は特性面.}$$

証明は, [18] を参照。

常微分の場合, 局所正則解は方程式の特異点 $a_m^{-1}(0)$ にぶつかるとなれば限りどこまでも接続できる。しかし, 次の例は, 偏微分方程式では, そうならぬことを示している。

例 2 (Y. Hamada) 無限遠点から流山にむく特異性

$$P(t, x; D_t, D_x) = D_t - x^2 D_x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P u = 0 \\ u|_{t=0} = f(x) \end{array} \right. \Rightarrow u(t, x) = f\left(\frac{x}{1-tx}\right)$$

勿論, $1-tx=0$ は特性曲面である。尚, T. Aoki [2] の理論から, このような特異性の出るひとつの理由は与えらるゝと

うである。ここでは次の事実に注意するに止める: $t=0$ のとき, $x=x_0$ を通る特性曲線 $x = \frac{x_0}{x_0 t + 1}$ が有限時間 $t = -\frac{1}{x_0}$ で爆発すると, 特異性のあるおける特性曲線 $1-tx=0$ は ∞ を通る特性曲線と考えるべきこと。

しかし, 例えは次の事は成立する。

定理 3.

$P(D)$: 定数係数偏微分作用素 $\Rightarrow \exists 1$ 解 $\in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$
 初期面は非特性, 初期条件 $\in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n-1})$

証明は, J. Leray [9] LEMME 9.1 p.339 をみればおぼろげである。

§2. Cauchy 問題について考えよう。大域的には例2が示すように、特異点は今までの特性曲面であるとしかることは以外はおかしくない曲面上にあるおぼろげにしてしまう。従って、まあ、初期面 Σ の近傍で局所的に考えよう。勿論、出発点となるのは、Cauchy-Kowalewskiの定理であり、この定理の条件がなりたっていない時に、 Σ の近傍にあるおぼろげ解の特異性について調べることが問題になる。

このような視点から、Cauchy問題をはじめと扱ったのは、J. Leray である。彼は、Problème de Cauchy I [9] の序文の冒頭で、「我々は、複素領域での線型 Cauchy問題を大域的に研究しようと思う」と述べ、線型常微分の初期値問題の解の

基本性質を拡張しようとし、次の主目標を述べた。

「解の特異性は、初期条件の特異性から出発する *caractéristiques* 又は、初期面に接する *caractéristiques* に含まれる。」
 彼自身は、Problème de Cauchy I と VI でこの原理の後半を明らかにした。即ち;

定理4 (J. Leray)

初期面 S が、余次元1の特異的からなる部分多様体 T をもつとき、正則な条件及び右辺の Cauchy 問題の解の特異性は T から出発する特性面に含まれ、代数的に分岐し、しかも、この解は一変化できる。 └

重要な定理であるのに、あまり知られてないと思うので、explicitな命題を述べておく。

定理4' (L. Garding, T. Kotaké et J. Leray)

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 領域, $S := \{z \in \Omega; \lambda(z) = 0\}$, $d\lambda(z) \neq 0$ (S 上),
 $\lambda \in \mathcal{O}(\Omega)$, $T := \{z \in \Omega; \lambda(z) = p(z, d\lambda(z)) = 0\}$ が S の部分多様体とし, $p(z, d\lambda(z))$ は T 上頂度 q 回消えるとする。
 ($p(z, \zeta)$ は $P(z, D)$ の主要表象) 更に, $\otimes d_z p(z, d\lambda(z))$ は $z \in T$ のとき, T に接しない, とする。このとき, K を T から出発する *caractéristiques* 全体は Ω の部分多様体となり, K は T 上で S と q 次の接触をする。 $K := \{k(z) = 0\}$ とおくと,

$$\left[\begin{array}{l} u(z) = [k(z)]^{m-1} H_1([k(z)]^{\frac{1}{1+q}}, z) + H_2(z) \\ = z^m, \quad H_1, H_2 \text{ は正則}, \quad m = P(z, D) \text{ の階数.} \end{array} \right]$$

条件④は、余接束内で $T_S^* \Omega|_T$ ($\subset \text{Ch}(P)$) を "flow-out" して Lagrangien を作る時、これが section の像となる、213 のために必要なる条件で、これが無いと上の定理は一般には成り立たない。

例5 (JLeray)

$$P(z, D) = z_1 D_1 + z_2 D_2, \quad S = \{z_1^2 - z_2 = 0\}. \quad \text{このとき}$$

$$T = \{0\}, \quad d_S P(z, d)(z)|_T = 0$$

$$\text{このとき, } \begin{cases} P(z, D) u(z) = 1 \\ u(z_1, z_1^2) = w(z_1) \end{cases} \quad \text{の解は次のよりになる。}$$

$u(z) = w\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + \log\left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)$. このとき、 w の正則域が $|z_1| < 1$ であるとすると、 $u(z_1, z_2)$ の正則域は、 $|z_2| < |z_1|$ となり、(原点の近傍)-超曲面とはなっていない、しかも解は無数多価。

定理4. 4の証明については、[3]を参照。

§3 特異(分岐) Cauchy問題 あるいは、三兵田の問題。

Lerayの原理の前半を考える。これが普通上の標題の多価問題である。 $S = \{x_0 = 0\}$, $T = \{x_0 = x_1 = 0\}$. Ω を \mathbb{C}^{n+1} の0の近傍とし、 $w_h(x') \in \mathcal{O}(\overline{\Omega \cap S - T})$ ($0 \leq h < m$) に対し、

$$\begin{cases} P(x, D) u(x) = 0 & P \text{ は } m \text{ 階, } S \text{ 非特性} \\ D_0^h u \big|_{x_0=0} = w_h(x') & (0 \leq h \leq m) \end{cases}$$

を考へる。 $y \in \Omega \cap S - T$ の近傍では, Cauchy-Kowalewski の定理により正則函数の germe が定まる。二つの接続を調べるのが問題である。Leray 自身は, Problème de Cauchy ∇ 2, この問題を扱う予定であつたらしい。彼の方法は, 上の問題を正則な問題に帰着させる積分変換を考へ, その逆変換の特異性を調べようとしていたようにみえる。結局, ∇ は出発しなかつたために詳しいことはあからない。distribution を使つた関数解析的微分方程式全盛期であつたためか, J. Leray のこれらの仕事は脚光を浴びなかつたように思へる。彼自身の方法も難点を極めた。それを全く初等的かつ強力な方法で示したのが, 浜田雄策教授であつた。1969年, [4] において, 単純特性という条件の下で, Leray の原理の前半が正しいことが示された。ここに用いられた手法は, Ludwig 等によつて双曲型方程式の解析に用いられてゐた, 幾何光学の方法といつてよいと思ふ。定理の主張は偏微分方程式の一般論の中で, 最も美しいものの一つである。explicité ということと, 一般的ということの, ギリギリの接触にたつてゐる。浜田教授の仕事以後, この方法は C. Wagschal 等により整理拡張され, 今は進行中である。今の所, 最終的な結果は,

C. Wagschal による [17]。ここでは、特性根がすべて正則という仮定の下で解の表示が与えられている。この特異性を調べることに残っているが、まもなく出版されるであろう。この分野では、G. Nakamura, J. Urabe, T. Kobayashi 氏等、多くの日本人が活躍している(た?)。

最後にひとつ注意を添える。上に述べた人達の結果は、いつも、原点の近傍から余次元 1 (複素) の超曲面を除いた残りでの多価解析函数解の存在を示しているが、一般にはそうならない。

例 6 (Y. Hamada)

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_0^2 - D_1 D_2) u = 0 \\ u|_{x_0=0} = w(x') := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_n \sqrt{x_2 + c_n}} \right\} \cdot \frac{1}{x_1} \quad (|x'| < \frac{1}{2}) \\ D_0 u|_{x_0=0} = 0 \quad (w(x') \text{ は } |x'| < \frac{1}{2} \text{ で正則。}) \end{array} \right.$$

$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{|z|=1\}$, δ_n はある選び方が決まってくる定数 (> 0)。

この解 $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{x_2 + c_n}}{\delta_n [4x_1(x_2 + c_n) - x_0^2]}$ は、 $\mathcal{D} = \{x; |x| < \frac{1}{2}, |x_0^2 - 4x_1 x_2| < 4|x_1|\}$ で正則であり、 $\mathcal{F} = \{x; |x| < \frac{1}{2}, |x_0 - 4x_1 x_2| \geq 4|x_1|\}$ へは解析接続できない。

$x_0 = x_1 = 0$ を通る特性曲面は、 $4x_1(x_2 + c) - x_0^2 = 0$, $x_1 = 0$ であり、媒介変数 c を含む。即ち、無限にある。各特性曲面上に特異性をもつ解は存在するから、 c を実 1 次元動かすことにより、実余次元 1 の特異性の「カバ」が出来る。これが、自

然境界を作り、解はとれを越えて接続できなくなる。

Leray の原理の前半は確かに正しいが、状況は相当に複雑である。特性根が正則で包含的の時は、T. Kobayashi [10] 氏により解析されたといいられるが、この場合も、Y. Hamada-G. Nakamura [7] にあるように、無限遠点から流れこむ特異性がある。非包含的の時は、特異性はもっと増え、かなり複雑になると思える。その原因は、多重相関数が有限個で閉じないことによる。実際、C. Wagschal [17] の解の表示は無限積分の無限和である。又、J. Urabe [16] 氏により Tricomi 型及びとれに関連する作用素についてこの解析がなされたといいられるが、とれには超幾何函数のモッドロシ-などの性質が用いられて、かなり複雑である。こらみてくると、一般の作用素に対してよい結果がとれるか、とこののは、少なくとも筆者には疑問である。渡田教授の方法は、実双曲型方程式の解析にも有効であることはいままでにもなっているが、最近の西和田氏の仕事では lacuna の研究にも用いられたり、感は、溝畑教授により違った角度から研究されたといいることには注意しておく（有理伝播 (meromorphic propagation) \Rightarrow Levi 条件。この逆は、De Paris による）。

II 完全積分可能系

§1 1階

この場合、常微分方程式の時と同じようなことがなりたつ。従って、もっと細い情報についての一般化と113ことが問題になる。確定、不確定特異点、モドロミ一群、Riemann-Hilbert - (Birkhoff) が中心問題となるだろう。最近、H. Majima [11] 氏により、ひとつの結着はついたよりにみえる。

§2 高階

I-§1で述べたことを拡張すると、次の様に定式化できる。

X : 複素多様体. \mathcal{M} : 微分方程式系. S : 超曲面 $\subset X$

問題7 \mathcal{M} の solution が S 上に特異性をもつならば、 S は特性か? (c.a.d. $T_S^* X \subset \text{Ch}(\mathcal{M})$) .

まず、方程式系が大域的に与えられる、更に、決定系があるときにかきかえる。

問題8 $P(x, D) = (P_{ij}(x, D))_{p \times q}$: Ω 上の微分方程式系, $K \in \Omega$ の超曲面と L , $\exists u \in \mathcal{O}(\Omega - K)^q$, K 上に特異性をもつとする。 $Pu = 0 \Rightarrow K$: 特性か?

このとき、 $m = \sup_{\pi \in \Theta_q} \sum_{i=1}^q m_i(\pi)$ ($\pi \in \Theta_q$) とおくと、 $\det(p_{ij}(x, \xi))$ の m 次斉次部を $p(x, \xi)$ とおくと、 $\text{Ch}(P) = \{p(x, \xi) = 0\}$ である (E. Andronikof [1]) .

III. おまけ.

§1. 解の解析接続について

$\ll P(z, D)u(z) = 0$ が $\Omega (\subset \mathbb{C}^n)$ で成りた、 z なるとき ($u \in \mathcal{O}(\Omega)$), P と $\partial\Omega$ のどのような条件の下で $u(z)$ が $\partial\Omega$ を越えて解析接続できるか? \gg という問題がある。これに関して Y. Tsuno [15] 氏をあげるに止める。(実は、僕はよく知りません。) 又、田島氏の仕事 [13] は、これと関係があるように見える。

§2. 特解構成の問題

$\ll K(\Omega)$ 超曲面, $P(z, D): \Omega$ 上の微分作用素とする。 K と P のある条件の下で, $\exists \Omega_1 \subset \Omega$, $\forall f \in \mathcal{O}(\widetilde{\Omega - K})$, $\exists u \in \mathcal{O}(\widetilde{\Omega_1 - K})$: $P(z, D)u(z) = f(z)$ \gg という問題がある。これは、特異 Cauchy 問題を扱うときに部分的に出でくる。以前から知られていたのは、 K : 非特性 [18], K : 特性多重度一定 [6] であった。あと、Fuchs 型の退化特性曲面に対しても H. Tahara [4] 氏により知られていた。最近、Ouchi 氏 [12] により、特性のうちかなり広いクラス K に対して成り立つことが示された。次に一般の曲面についてはどうだろうか? 一般には $u(z)$ の特異性は、 K よりもひらがることを許さなければならぬことを、次の例が示している。

例9.

$$(2y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}) u(x, y) = \frac{1}{x}$$

このとき $u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y^2-x}} \log \frac{y-\sqrt{y^2-x}}{y+\sqrt{y^2-x}} + f(x-y^2)$
 が一般解である。

右辺の特異性 = $\{x=0\}$ だが, 解の特異性 = $\{x=0, x=y^2\}$

定理4 (ou 4') との類似から次の予想ができる。

予想10

$K \subset \Omega$ 超曲面, K 内の $P(z, D)$ に Ω の特性直全体 L が
 余次元1の部分多様体をなすとする。このとき, L を通
 る特性面を H とする ($Th 4'$ の \otimes と同じような条件はおく
 べきである。) このとき, $\exists \Omega'$, $\forall f \in \mathcal{O}(\widetilde{\Omega-E})$, $\exists u \in$
 $\mathcal{O}(\widetilde{\Omega'-(K \cup H)})$; $P(z, D)u(z) = f(z)$.

IV 参考文献

- [1] E. Andronikof. : Systèmes déterminés d'équations aux
 dérivées partielles.
 Sémin. J. Vaillant, Univ. de Paris VI Octobre 1981
- [2] T. Aoki : dans ce volume.
- [3] L. Garding, T. Kotake et J. Leray : Bull. Soc. math. France
 , 92, 1964, pp 263 à 361.

- [16] J. Urabe : J. Math. Kyoto Univ. 21-3 (1981)
pp 517-535.
- [17] C. Wagschal : J. Math. pures et appl. 62, 1983, pp 99-127.
- [18] 朱村明孝 : 京大修士論文 (1981)