数理解析研究所講究録
第573巻 1985年 42-110

2-超函数のRadon変換と
その応用について

東大・理　野呂正行 (*)

(Masayuki Noro)

目次

---

*) 現在の所属は富士通・国際研

要旨

超函数を正則函数の境界値としてとらえる，という考えは，Kataoka[8]によるRadon変換の理論によって，より明らかなものとされ，金子[3]によってさらに直観的で，わかり易いものとなった。この修論では，Kashiwara-Laurent[7]による2-超函数を，同様に$C\mathcal{O}$(正則パラメタをもつmicrofunction)の境界値として把握することを試みる。

まずいくつかのコホモロジー消滅定理によって，Kataoka[8]と同様にして2-超函数のコホモロジー的Radon変換が得られ，それと$C\mathcal{O}$のθ-変数に関する曲面Radon分解により2-超函数は$C\mathcal{O}$の境界値としてかなり明確にとらえられる。これにより，2-超函数に対する種々の基本的演算が初等的に定義され，その2-特異スペクトルの評価も得られる。これらの応用として，Kashiwara-Laurent[7]に述べられている"théorème de Holmgren microlocal"が金子[3]と全く同様にして初等的，直観的に証明される。

§1 2-microfunctions と cohomological Radon transformations

M を real analytic manifold, $\Lambda \subset \sqrt{-1}T^*M$ を homogenious involutory submanifold とする。このとき, Kashiwara-Laurent [7] によって, $\mathcal{A}^2_\Lambda$ (2-real analytic function), $\mathcal{B}^2_\Lambda$ (2-hyperfunction), $\mathcal{C}^2_\Lambda$ (2-microfunction) なる sheaves が定義されている。以下で Λ が特殊な場合において, Kataoka [8] と同様の方法で, $\mathcal{B}^2_\Lambda$, $\mathcal{C}^2_\Lambda$ を cohomological Radon transformation によって把握することを考える。

1.0 準備

以下では次の状況で考える。

$$M = \mathbb{R}^p_u \times \mathbb{R}^q_x \hookrightarrow \mathbb{C}^p_w \times \mathbb{C}^q_z = X$$

($w = u + iv$, $z = x + iy$; それぞれの dual variable を $\tau = t + is$, $\zeta = \xi + i\eta$ とする)

$$N = \mathbb{R}^p_u \times \mathbb{C}^q_z \hookrightarrow X.$$

$$\Lambda = \{(u, x; \sqrt{-1}(t\,du + 0\,dx))\} \simeq \sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \subset \sqrt{-1}T^*M$$

$$\tilde{\Lambda} = T^*_N X = \sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q$$

すなわち $\Lambda \hookrightarrow \tilde{\Lambda}$ で $\tilde{\Lambda}$ は Λ の部分複素化である。
この状況で、$\pi : {}^N\tilde{X}^* \to X$ (${}^N\tilde{X}^*$: コモノイダル変換)
とするとき、$\mathcal{C}_{N|X} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{H}^p_{T^*_N X}(\pi^{-1}\mathcal{O}_X)^a \otimes \omega$
は z を正則パラメタにもつ microfunction の sheaf となる。(a: antipodal map, ω: orientation sheaf. 以下支障がない限り省略する。) これを $\mathcal{CO}$ と書くとき、$\mathcal{A}^2_\Lambda$, $\mathcal{B}^2_\Lambda$, $\mathcal{C}^2_\Lambda$ は次のように定義される。

$$\mathcal{A}^2_\Lambda = \mathcal{CO}|_\Lambda, \quad \mathcal{B}^2_\Lambda = \mathcal{H}^q_\Lambda(\mathcal{CO})$$

$$\mathcal{C}^2_\Lambda = \mathcal{H}^q_{T^*_\Lambda \tilde{\Lambda}}(\pi^{-1}\mathcal{CO})^a \otimes \omega \quad (\pi : {}^\Lambda\tilde{\tilde{\Lambda}}^* \to \tilde{\Lambda}).$$

以後 Δを $\sqrt{-1}(T^*\mathbb{R}^p\setminus\mathbb{R}^p)\times\mathbb{R}^q$ に制限して考えることとし，さらにそれを $\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ とみなすことにする。

1.1. 消滅定理

この節では，のちに必要となる，いくつかの cohomology 消滅定理を証明する。

1°　$N = \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^l \hookrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^l = X$　　$N_0 = \mathbb{R}^p \hookrightarrow \mathbb{C}^p = X_0$

このとき ${}^{N}\widetilde{X}^* \simeq {}^{N_0}\widetilde{X}_0^* \times \mathbb{C}^l$　${}^{N_0}\widetilde{X}_0^* = (\mathbb{C}^p \setminus \mathbb{R}^p) \sqcup \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$

$\pi : {}^{N}\widetilde{X}^* \to X$　とする。

定理 1 1 1　$U \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$: open, proper convex

$D \subset \mathbb{C}^l$: Stein open

$\Longrightarrow H^j(U \times D, \mathcal{C}) = 0 \quad (j \geq 1)$

証明)　$\mathcal{C} = \mathcal{H}^p_{S_N^*X}(\pi^{-1}\mathcal{O}_X) = \mathbb{R}\Gamma_{S_N^*X}(\pi^{-1}\mathcal{O})[p]$

(純 p 余次元性) より

$$H^j(U \times D, \mathcal{C}) = H^{j+p}_{U\times D}(\widetilde{U} \times D, \pi^{-1}\mathcal{O})$$

($\widetilde{U} = \Omega \sqcup U$; Ω open $\subset \mathbb{C}^p \setminus \mathbb{R}^p$ で $\widetilde{U}$: open in ${}^{N_0}\widetilde{X}_0^*$)

そこで次の long exact sequence を考える。

$\to H^j_{U\times D}(\widetilde{U} \times D, \pi^{-1}\mathcal{O}) \to H^j(\widetilde{U} \times D, \pi^{-1}\mathcal{O}) \to H^j(\Omega \times D, \mathcal{O}) \to \cdots$

まず $H^j(\Omega \times D, \mathcal{O})$ であるが，これについては次の

補題がある.

補題 1.1.2 ((c.f 小松[10], Douady [2] etc))
$X=\mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^q\times\mathbb{R}^r$. $W\subset\mathbb{C}^p$ $D\subset\mathbb{C}^q\times\mathbb{R}^r$: open
かつ $H^j(D,\mathcal{O}\mathcal{E})=0$ $(j\geq 1)$, $\dim_{\mathbb{C}} H^k(W,\mathcal{O})<+\infty$
$\Rightarrow$. $H^k(W\times D,\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E})\simeq H^k(W,\mathcal{O})\otimes_{\mathbb{C}}\Gamma(D,\mathcal{O}\mathcal{E})$.

証明) まず, 一般に $D\subset\mathbb{C}^q\times\mathbb{R}^r$ open に対し,
$\Gamma(D,\mathcal{O}\mathcal{E})$ は Frechet nuclear である. よって
小松[10] etc によって, $\cdot\hat{\otimes}\Gamma(D,\mathcal{O}\mathcal{E})$ は,
Frechet Spaces の topological short exact
Sequence に対しては exact functor で, また一般
に left exact でもある. よって. $\mathcal{E}(U)\hat{\otimes}\mathcal{E}(V)\simeq\mathcal{E}(U\times V)$
により. (U. V. open). $\mathcal{E}(W)\hat{\otimes}\mathcal{O}\mathcal{E}(D)\simeq\mathcal{E}\mathcal{O}\mathcal{E}(U\times D)$
$\mathcal{O}(U)\hat{\otimes}\mathcal{O}\mathcal{E}(D)\simeq\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E}(U\times D)$ がいえている。

さて, X上に
$$0\to\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E}\hookrightarrow\mathcal{E}^{(0,0)}\mathcal{O}\mathcal{E}\xrightarrow{\bar\partial}\cdots\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{E}^{(0,p)}\mathcal{O}\mathcal{E}\to 0$$
なる resolution (Partial Dolbeault resolution) が存
在することが上で述べたことからわかり, しかも,
$H^j(D,\mathcal{O}\mathcal{E})=0$ $(j\geq 1)$ より $H^j(W\times D,\mathcal{E}^{(0,\cdot)}\mathcal{O}\mathcal{E})=0$

$(j \geq 1)$ がいえる。(これは Andreotti-Grauert [1] によってもいえるし、また以下の議論を使ってもいえる)

よって $H^j(\overline{W}\times D, \mathcal{O}\mathcal{E}) \simeq H^j(\Gamma(\overline{W}\times D, \mathcal{E}^{(0,\cdot)}\mathcal{O}\mathcal{E}))$

$= H^j(\Gamma(\overline{W}, \mathcal{E}^{(0,\cdot)})\hat{\otimes}\Gamma(D, \mathcal{O}\mathcal{E}))$

ここで次の図式を考える。

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr] & & & & & \\
 & & Z^{k-1} \arrow[dr] & & & & \\
\cdots \arrow[rrr] & & & \Gamma(\overline{W}, \mathcal{E}^{(0,k-1)}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \Gamma(\overline{W}, \mathcal{E}^{(0,k)}) \arrow[r] & \Gamma(\overline{W}, \mathcal{E}^{(0,k+1)}) \arrow[r] & \cdots \\
 & & 0 \arrow[rr] & & B^k \arrow[r] \arrow[d] & Z^k \arrow[u] \arrow[r] & H^k(\overline{W}, \mathcal{O}) \arrow[r] & 0 \\
 & & & & 0 & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

仮定より $\dim_{\mathbb{C}} H^k(\overline{W}, \mathcal{O}) < +\infty$ だから 小松[9] 定理(IV.3.49)(Schwartzの補題)により B^kは閉。

よって $0 \to Z^k \hat{\otimes} \Gamma(D, \mathcal{O}\mathcal{E}) \to \Gamma(\overline{W}\times D, \mathcal{E}^{(0,k)}\mathcal{O}\mathcal{E}) \to B^{k+1} \hat{\otimes} \Gamma(D, \mathcal{O}\mathcal{E}) \to 0$

$0 \to B^k \hat{\otimes} \Gamma(D, \mathcal{O}\mathcal{E}) \to Z^k \hat{\otimes} \Gamma(D, \mathcal{O}\mathcal{E}) \to H^k(\overline{W}, \mathcal{O}) \hat{\otimes} \Gamma(D, \mathcal{O}\mathcal{E}) \to 0$

はexact ここで

$Z^{k-1} \hat{\otimes} \Gamma(D, \mathcal{O}\mathcal{E}) \simeq \ker(\Gamma(\overline{W}\times D, \mathcal{E}^{(0,k-1)}\mathcal{O}\mathcal{E}) \to \Gamma(\overline{W}\times D, \mathcal{E}^{(0,k)}\mathcal{O}\mathcal{E}))$ より

$B^k \hat{\otimes} \Gamma(D, \mathcal{O}\mathcal{E}) \simeq \mathrm{Im}(\Gamma(\overline{W}\times D, \mathcal{E}^{(0,k-1)}\mathcal{O}\mathcal{E}) \to \Gamma(\overline{W}\times D, \mathcal{E}^{(0,k)}\mathcal{O}\mathcal{E}))$

よって補題は示された。 //

上の補題により、$\dim_{\mathbb{C}} H^k(\Omega, \mathcal{O}) < +\infty$ ならば

$H^k(\Omega\times D, \mathcal{O}) \simeq H^k(\Omega, \mathcal{O}) \otimes \Gamma(D, \mathcal{O})$ ここで

Malgrange の定理より $k \geq p \Rightarrow H^k(\Omega, \mathcal{O}) = 0$

$\therefore j \geq p+1 \Rightarrow H^j_{U\times D}(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{O}) \simeq H^j(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{O})$

よって $j \geq p+1$ のとき $H^j(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{O}) = 0$ をいえばよい。

$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{L}^\cdot$ を $\mathcal{O}$ の flabby resolution とする。

このとき $0 \to \pi^{-1}\mathcal{O} \to \pi^{-1}\mathcal{L}^\cdot$ は一つの resolution であるが実は $H^j(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{L}^k) = 0$ $({}^\forall j \geq 1,\ {}^\forall k \geq 0)$

証明) $\to H^j_{U\times D}(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{L}^k) \to H^j(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{L}^k) \to H^j(\Omega\times D, \mathcal{L}^k) \to \cdots$

なる long exact sequence に対して, $\mathcal{L}^k$ が flabby より $H^j(\Omega\times D, \mathcal{L}^k) = 0$ $(j \geq 1)$. さらに次の補題がある。

補題 (S-K-K prop 1.2.4) $N \supset M$: manifolds

$\mathcal{F}$: a sheaf on N. $U \subset S^*_M N$: open proper convex

$\pi : {}^M\widetilde{N}^* \to N$ とするとき

$H^j(U, R\Gamma_{S^*_M N}(\pi^{-1}\mathcal{F})) \simeq \varinjlim_{Z} H^j_Z(N, \mathcal{F})$ ただし

Z は 1) Z : locally closed in N. $Z \supset \pi(U)$

2) $\overline{Z-M}$ in ${}^M\widetilde{N}^* \cap U = \phi$ を満たす。

この補題により $H^j_{U\times D}(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{L}^k) \simeq \varinjlim_{Z} H^j_Z(N, \mathcal{L}^k) = 0$ $(j \geq 1)$ ($\because$ $\mathcal{L}^k$: flabby) よって $H^j(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{L}^k)$ も $j \geq 1$ で消える。 //

よって $H^j(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{O}) \simeq H^j(\Gamma(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{L}^{\bullet}))$

以下で右辺を調べる。

一般に $M=\mathbb{R}^m \simeq \{0\}\times\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^\ell_x\times\mathbb{R}^m_t = N$

F : sheaf on N. $\pi: {}^M\widetilde{N}^* = ((\mathbb{R}^\ell\setminus\{0\})\sqcup S_\xi^{\ell-1})\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^m$. $U\subset S_\xi^{\ell-1}\times\mathbb{R}^m = S_M^*N$: open. proper convex とし, $S_\xi^{\ell-1}\hookrightarrow \mathbb{R}^\ell\setminus\{0\}$ (単位球面) と見なす。

このとき $\Omega\subset(\mathbb{R}^\ell\setminus\{0\})\times\mathbb{R}^m$ を

$\Omega = \{(x,t)\,;\ \exists(\xi,t)\in U$ s.t $\langle x,\xi\rangle \geq 0\}$

$= U^{aoc}$ (a: antipodal, o: polar, c: 補集合)

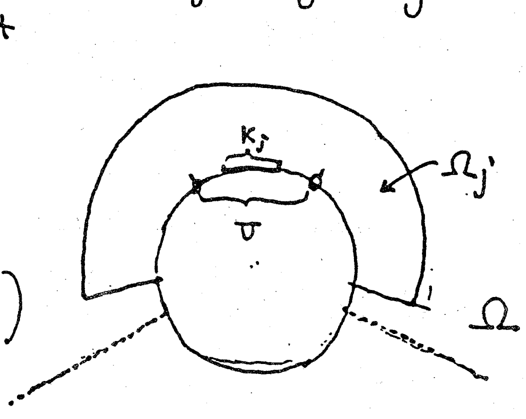
と定義する。(Ω: open in $(\mathbb{R}^\ell\setminus\{0\})\times\mathbb{R}^m$) すると、

$\widetilde{U}=\Omega\sqcup U$ は open in ${}^M\widetilde{N}^*$。U が open. proper convex より $\exists K_j$ $(j=1,2,\cdots)$ compact proper convex $K_j \subset\subset K_{j+1}$ s.t $\bigcup K_j = U$ このとき $\Omega_j\subset\Omega$ を $\Omega_j = \{(x,t)\,;\ \exists(\xi,t)\in K_j$. s.t $\langle x,\xi\rangle\geq 0$. $|x|\leq j\}$ とおくと $\widetilde{K}_j = \Omega_j\sqcup K_j$ は $\mathrm{int}\,K_j$ の近傍 in ${}^M\widetilde{N}^*$

$\widetilde{K}_j \subset \mathrm{int}\,\widetilde{K}_{j+1}$ で $\widetilde{U}=\bigcup\widetilde{K}_j$

よって、

$\Gamma(\widetilde{U},\pi^{-1}F) = \varprojlim_j \Gamma(\widetilde{K}_j, \pi^{-1}F)$



ここで

補題　$\Gamma(\tilde{K}_j, \pi^{-1}\mathcal{F}) \simeq \Gamma(\pi(\tilde{K}_j), \mathcal{F})$.

証明) まず $\tilde{K}_j$ が ${}^{\prime}\tilde{N}^*$ で compact であることを示す。
$\tilde{K}_j \subset \bigcup_\lambda \tilde{V}_\lambda$ ($\tilde{V}_\lambda$: open in ${}^{\prime}\tilde{N}^*$) とする。$\tilde{V}_\lambda$ を細分することによって $\tilde{V}_\lambda \cap S^*_M N \neq \emptyset$ なる λ については

$\tilde{V}_\lambda = \{(x, t) \in (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^m ; |x| < \varepsilon_\lambda\ |t - t_\lambda| < \varepsilon_\lambda,\ \exists \xi \in S^{d-1}$ s.t $|\xi - \xi_\lambda| < \varepsilon_\lambda,\ \langle x, \xi \rangle \geq 0\}$

$\sqcup \{(\xi, t) \in S^{d-1} \times \mathbb{R}^m,\ |\xi - \xi_\lambda| < \varepsilon_\lambda,\ |t - t_\lambda| < \varepsilon_\lambda\}$

という形をしているとしてよい。さて $K_j \subset \bigcup_\lambda (\tilde{V}_\lambda \cap S^*_M N)$ で K_j が $S^*_M N$ で compact より $\exists \lambda_1 \cdots \lambda_N$ s.t

$K_j \subset \bigcup_{i=1}^{N} \tilde{V}_{\lambda_i}$　　$\varepsilon = \min_i \varepsilon_{\lambda_i}$ とおくと.

$\tilde{K}_j \subset \bigcup_{i=1}^{N} \tilde{V}_{\lambda_i} \cup \{(x, t) \in \Omega_j\ \ |x| \geq \varepsilon\}$

[∵) $K_j \subset$ 右辺は OK。$(x, t) \in \Omega_j$, $|x| < \varepsilon$ とすると
$\exists (\xi, t) \in K_j$ s.t $\langle x, \xi \rangle \geq 0$ (Ω_j の定義)。$\exists \lambda_i$ s.t
$|\xi - \xi_{\lambda_i}| < \varepsilon_{\lambda_i}$ $|t - t_{\lambda_i}| < \varepsilon_{\lambda_i}$ で $|x| < \varepsilon \leq \varepsilon_{\lambda_i}$ より
$(x, t) \in \tilde{V}_{\lambda_i}$ //]

$\{(x, t) \in \Omega_j,\ |x| \geq \varepsilon\}$ は通常の Euclid 空間の compact set より 結局 $\tilde{K}_j$ は有限個の $\tilde{V}_\lambda$ で覆われる。//

よって $p = \pi|_{\tilde{K}_j} : \tilde{K}_j \to \pi(\tilde{K}_j)$ は closed map

かつ fibre は connected。よってこのとき $\mathcal{F} \to p_* p^{-1}\mathcal{F}$ なる canonical morphism において，stalk を調べると，

$$\mathcal{F}_{p*} \to (p_* p^{-1}\mathcal{F})_{p*} = \varinjlim_{W \ni p*} \Gamma(p^{-1}(W), p^{-1}\mathcal{F})$$

$$\xrightarrow[p:\text{closed map}]{\sim} \varinjlim_{V \supset p^{-1}(p*)} \Gamma(V, p^{-1}\mathcal{F}) \xrightarrow{inj} \Gamma(p^{-1}(p*), p^{-1}\mathcal{F})$$

$$\xrightarrow[\text{fibre connected}]{\sim} \mathcal{F}_{p*}$$

よって．

$$\begin{tikzcd} & (p_* p^{-1}\mathcal{F})_{p*} \arrow[dr, "inj"] & \\ \mathcal{F}_{p*} \arrow[ur] \arrow[rr, "id"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "\circlearrowleft"] & & \mathcal{F}_{p*} \end{tikzcd}$$

より $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} p_* p^{-1}\mathcal{F}$

$$\therefore\ \Gamma(\pi(\tilde{K}_j), \mathcal{F}) \simeq \Gamma(p^{-1}(\pi(\tilde{K}_j)), p^{-1}\mathcal{F})$$

$$= \Gamma(\tilde{K}_j, \pi^{-1}\mathcal{F}) \qquad //$$

はじめの状況にもどる。$\tilde{U} \times D = (\Omega \sqcup U) \times D$ において，Ω を上で述べたと同様の cone にとり，$\tilde{\Omega}_j = \Omega_j \sqcup K_j$ を，上と同様に，$\tilde{U}$ をとりつくすようにとる。さらに，D は Stein より $\exists D_j\ (j=1,2,\cdots) \subset\subset D$
$D_j \subset\subset D_{j+1}$ s.t. D_j : compact な解析多面体で $D = \bigcup D_j$ すると上の補題より

$$\Gamma(\tilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{L}^k) = \varprojlim_j \Gamma(\pi(\tilde{\Omega}_j)\times D_j, \mathcal{L}^k)$$

よって

$$H^k(\tilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{O}) \simeq H^k(\varprojlim_j \Gamma(\pi(\tilde{\Omega}_j)\times D_j, \mathcal{L}^\cdot))$$

ここで次の古典的補題がある。

<u>補題</u>（cf. Kashiwara [4]）

$\cdots \to F_{j+1} \to F_j \to \cdots$ を complex の projective system とする。今、$\forall i$ に対し、$\{F_j^i\}$ が、次の条件 (ML)

(ML) $\forall j \in N$, $\{\mathrm{Im}(F_{j+\nu}^i \to F_j^i)\}_\nu$ が stationary

を満たすとする。このとき

1) canonical morphism $\phi_k : H^k(\varprojlim_j F_j^\cdot) \to \varprojlim_j H^k(F_j^\cdot)$ は onto

2) もし $\{H^k(F_j^\cdot)\}$ が (ML) を満たせば ϕ_{k+1} は isomorphism

$F_j^i = \Gamma(\pi(\widehat{\Omega}_j) \times D_j, \mathcal{L}^i)$ とおくと、$\mathcal{L}^i$ が flabby より $\{F_j^i\}$ は (ML) を満たす。このとき $H^k(F_j^\cdot) = H^k(\pi(\widehat{\Omega}_j) \times D_j, \mathcal{O})$ より $k \geq p$ で $H^k(\pi(\widehat{\Omega}_j) \times D_j, \mathcal{O}) = 0$ がいえれば、上の補題により $H^{k+1}(\widehat{\Omega} \times D, \pi^{-1}\mathcal{O}) = 0$ $(k \geq p)$ がいえる。

$\pi(\widehat{\Omega}_j)$, D_j は compact より、

$$H^k(\pi(\widehat{\Omega}_j) \times D_j, \mathcal{O}) \simeq \varinjlim_{W_1 \times W_2 \supset \pi(\widehat{\Omega}_j) \times D_j} H^k(W_1 \times W_2, \mathcal{O})$$

ここで D_j が compact 解析的多面体より，Stein 基本近傍系が存在する。よって補題 1.1.2 により $k \geq p$ で上の cohomology 群は消える。以上で定理 1.1.1 が証明された。 //

2° 次に，正則パラメタと smooth パラメタをもつ microfunction の sheaf を定義し，その cohomology 消滅定理を述べる。

$$N = \mathbb{R}^p_u \times \mathbb{C}^q_z \times \mathbb{R}^r_t \hookrightarrow \mathbb{C}^p_w \times \mathbb{C}^q_z \times \mathbb{R}^r_t = X$$
$$N_0 = \mathbb{R}^p \hookrightarrow \mathbb{C}^p = X_0 \qquad {}^{N}\widetilde{X}^* \simeq {}^{N_0}\widetilde{X}_0^* \times \mathbb{C}^q \times \mathbb{R}^r$$
$$\pi : {}^{N}\widetilde{X}^* \longrightarrow X$$
とする。

命題 1.1.3 $\quad \mathcal{H}^k_{S^*_N X}(\pi^{-1}\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E}) = 0 \quad (k \neq p)$

証明) 次の定理による。

定理 (abstract edge of the wedge, Kashiwara-Laurent [7])
T: 位相空間　X complex manifold $\mapsto \mathcal{F}_X$: sheaf on $X \times T$ なる対応が定まっていて，$\varphi : X \to X'$ (holomorphic map) に対し，$\varphi^* : (\varphi \otimes id_T)^{-1}\mathcal{F}_{X'} \to \mathcal{F}_X$ なる代入操作

が定まっていて次の(H1)−(H3)を満たすとする。

(H1) $X \supset U \supset V \neq \phi$ opens U: connected $W \subset T$ open
$\Rightarrow \Gamma_{(U \setminus V) \times W}(U \times W, \mathcal{F}_X) = 0$

(H2) $f: X \to \mathbb{C}$ holomorphic $Y = f^{-1}(0)$ 上で $df \neq 0$
$\iota: Y \hookrightarrow X$ とするとき $0 \to \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_X \xrightarrow{\iota^*} \mathcal{F}_Y \to 0$

(H3) Y: compact complex manifold $f: X \times Y \times T \to X \times T$
$\Rightarrow R^q f_* \mathcal{F}_{X \times Y} = \mathcal{F}_X \otimes H^q(Y, \mathcal{O}_Y)$

このとき G: closed in $\mathbb{C}^n$ $x \in G$ とし, xを通る $\mathbb{C}$ linear affine variety L $(\dim_{\mathbb{C}} L = n - q + 1)$ で $L \cap G$ が L 中で xの近傍になるものがないとき, $t \in T$ に対し

$\mathcal{H}^k_{G \times T}(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n})_{(x,t)} = 0 \quad (\forall k < q)$

$\mathcal{F}_X = \mathcal{O}_X \hat{\otimes} \mathcal{E}$ $T = \mathbb{C}^l \times \mathbb{R}^r$ とする。すると(H1).(H2)は明らか。(H3)は, Z compact $\Rightarrow \forall j.\ \dim_{\mathbb{C}} H^j(Z, \mathcal{O}_Z) < +\infty$ (Cartan) より補題1.1.2が使えてok。

$p^* \in S^*_N X$ とする。 $p^* = (0, \sqrt{-1}\xi_0 dw_0, 0, 0)$ $\xi_0 = (1, 0 \cdots 0)$ としてよい。このとき

$\mathcal{H}^k_{S^*_N X}(\pi^{-1} \mathcal{O} \hat{\otimes} \mathcal{E})_{p^*} = \varinjlim_{\varepsilon} \mathcal{H}^k_{G_\varepsilon}(\mathcal{O} \hat{\otimes} \mathcal{E})_{(0,0,0)}$

ただし $G_\varepsilon = \{(w, z, t) \ \langle v, \xi_{\varepsilon,l} \rangle \geq 0 \ l = 1 \cdots p\}$
$-\xi_0, \xi_{\varepsilon 1} \cdots \xi_{\varepsilon p}$ の凸包が原点の近傍

この G_ε は定理で $q=p$ の場合の仮定を満たす。

よって. $k<p$ で $\mathcal{H}^k_{S^+_N X}(\pi^{-1}\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E})=0$ また

$k>p$ のとき, $\mathcal{H}^k_{G_\varepsilon}(\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E})_{(0,0,0)}=\varinjlim_{\delta} H^k_{G_\varepsilon}(U_\delta\times V_\delta\times W_\delta, \mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E})$

$(U_\delta, V_\delta, W_\delta$: open ball$)$ $U_\delta\times V_\delta\times W_\delta - G_\varepsilon = \bigcup_{l=1}^{p} U_l\times V_\delta\times W_\delta$

$(U_l$: 半空間$)$ と書け, $\{U_\delta\times V_\delta\times W_\delta,\ U_l\times V_\delta\times W_\delta\}$ は, $\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E}$

に対する $p+1$ 枚の Leray covering より 上は消える。//

定義 $\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{E} \underset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{H}^p_{S^+_N X}(\pi^{-1}\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E})$

定義 (c.f. Andreotti-Grauert [1] Kataoka [8])

$D\subset \mathbb{C}^p\times\mathbb{R}^q$ が regular family of Stein domain とは

1) $\pi:\mathbb{C}^p\times\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^q$ とし. $\forall x\in\pi(D)$. $\pi^{-1}(x)$ Stein

2) $\forall x\in\pi(D)$ $\exists W_x$ open in $\mathbb{C}^p$ $\exists U_x\ni x$ open in $\mathbb{R}^q$

s.t. $W_x\times U_x\supset\pi^{-1}(U_x)\cap D$ かつ $(\pi^{-1}(x)\cap D, W_x)$ が

Runge Pair

を満たすことをいう。

Andreotti-Grauert により D が regular family of

Stein domain $\Rightarrow$ $H^j(D, \mathcal{O}\mathcal{E})=0$ $(j\geq 1)$

さらに Stein の場合と同様 $\exists Q_i\subset\subset D$

compact 解析的多面体 ($^\exists U$ open $\supset Q_i$. $^\exists f_1 \cdots f_N \in \mathcal{O}\mathcal{E}(D)$
$Q_i = \{p \in U \,;\, |f_j(p)| \leq 1\}$) $Q_i \subset\subset Q_{i+1}$ s.t
$D = \bigcup Q_i$ であって、Q_i はやはり $H^j(W, \mathcal{O}\mathcal{E}) = 0$
$(j \geq 1)$ なる基本近傍系をもつ。

定理 1.1.4 $U \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$ open proper convex
$D \subset \mathbb{C}^q \times \mathbb{R}^r$ regular family of Stein domain
$\Rightarrow H^j(U \times D, C\mathcal{O}\mathcal{E}) = 0 \ (j \geq 1)$

証明) これは、命題 1.1.2 と上の定義中で述べたことを用いれば 定理 1.1.1 と全く同様にいく。//

3° 最後に $p \begin{cases} \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q \\ {}^{\mathbb{R}}\widetilde{\mathbb{C}}^{p*} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r \to {}^{\mathbb{R}}\widetilde{\mathbb{C}}^{p*} \times \mathbb{R}^q \end{cases}$

に対し $p^{-1}C\mathcal{E} = p^{-1}\mathcal{H}^p_{S^*_N X}(\pi^{-1}\mathcal{O}\mathcal{E})$ の cohomology 消滅定理を述べる。

定理 1.1.5 (cf. Kataoka [8] Theorem 2.1.4)
D open $\subset \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$ $^\exists W_1 \subset\subset \cdots \subset\subset D$ open in D
$\bigcup W_j = D$ s.t $\forall x \in \mathbb{R}^q$ $p^{-1}(x) \cap W_j$, $p^{-1}(x) \cap \overline{W_j}$,

$p^{-1}(x)\cap D$ が contractible. $\tilde{U}\subset \tilde{A}\cap S^{+}\mathbb{R}^{l}$ open convex

fibre $\Rightarrow$ $H^{k}(\tilde{U}\times D, p^{-1}C\varepsilon)=0$ $(k\geq 1)$

証明) まず, S-K-K Chapt 1 Lemma 2.2.3 より

$$p^{-1}C\varepsilon = p^{-1}\mathbb{R}\Gamma_{S^{+}_{A}\times X}(\pi^{-1}\mathcal{O}\varepsilon)[p]$$

$$\simeq \mathbb{R}\Gamma_{S^{+}_{\tilde{A}}\tilde{X}}(\pi^{-1}p^{-1}\mathcal{O}\varepsilon)[p]$$

$$(\tilde{A}=\mathbb{R}^{p}\times\mathbb{R}^{q}\times\mathbb{R}^{r}\hookrightarrow\mathbb{C}^{p}\times\mathbb{R}^{q}\times\mathbb{R}^{r}=\tilde{X})$$

よって $H^{k}(\tilde{U}\times D, p^{-1}(\varepsilon)\simeq H^{k+p}_{U\times D}(\tilde{\tilde{U}}\times D, \pi^{-1}p^{-1}\mathcal{O}\varepsilon)$

$(\tilde{\tilde{U}}=U\sqcup\Omega)$ 次の exact sequence を考える。

$$\to H^{k}_{U\times D}(\tilde{\tilde{U}}\times D, \pi^{-1}p^{-1}\mathcal{O}\varepsilon)\to H^{k}(\tilde{\tilde{U}}\times D, \pi^{-1}p^{-1}\mathcal{O}\varepsilon)\to H^{k}(\Omega\times D, p^{-1}\mathcal{O}\varepsilon)\to$$

今, $0\to p^{-1}\mathcal{O}\varepsilon\to p^{-1}\mathcal{E}^{(0,0)}\varepsilon\to\cdots\qquad\to p^{-1}\mathcal{E}^{(0,p)}\varepsilon\to 0$

なる resolution において, Kataoka [8] Theorem 2.1.4

により $H^{j}(\Omega\times D, p^{-1}\mathcal{E}^{(0,\cdot)}\varepsilon)=0$ $(j\geq 1)$ よって

$$H^{k}(\Omega\times D, p^{-1}\mathcal{O}\varepsilon)\simeq H^{k}(\Gamma(\Omega\times D, p^{-1}\mathcal{E}^{(0,\cdot)}\varepsilon))$$

p が open fibre connected より $\simeq H^{k}(\Gamma(\Omega\times p(D), \mathcal{E}^{(0,\cdot)}\varepsilon))$

$=H^{k}(\Omega\times p(D), \mathcal{O}\varepsilon)=0$ $(k\geq p)$ よって

$k\geq p+1$ で $H^{k}_{U\times D}(\tilde{\tilde{U}}\times D, \pi^{-1}p^{-1}\mathcal{O}\varepsilon)\simeq H^{k}(\tilde{\tilde{U}}\times D, \pi^{-1}p^{-1}\mathcal{O}\varepsilon)$

あとは 定理 1.1.1 と同様にして, K compact $\subset\mathbb{C}^{p}$

のとき $H^{k}(K\times\overline{W_{j}}, p^{-1}\mathcal{O}\varepsilon)=0$ $(k\geq p)$ をいえばよいが,

$p|_{K\times\overline{W_{j}}}$ が, proper, fibre contractible かつ

$K\times\overline{W}_j$ が Hausdorff より $\simeq H^k(K\times p(\overline{W}_j), \mathcal{O}\mathcal{E})$
$=0 \quad (k \geq p)$ //

以上により、必要な消滅定理はすべて証明された。

1.2 2-microfunctions の Cohomological Radon transformations

1.1 の消滅定理を用いて. $\mathcal{B}^2_\Lambda$, $\mathcal{C}^2_\Lambda$ の cohomological Radon transformation を述べる。方法その他. Kataoka [8] の全くの引き写しである。

T, S を Abelian Category $F: T \to S$ を left exact functor とする。このとき $A^j \in T$.

$0 \to A^0 \to \cdot \qquad \to A^n \to 0$ (exact)

かつ $R^kF(A^j) = 0$ $(k \neq m)$

$\Rightarrow 0 \to R^mT(A^0) \to \cdot \qquad \to R^m T(A^n) \to 0$ (exact)

これを用いていくつかの exact sequence を導く。

$N = \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \hookrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q = X$ $\quad Y^r$ complex manifold とすると $X_1 = X \times Y$ 上に

$0 \to p^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X\mathcal{O}_Y^{(1)} \xrightarrow{d} \cdot \qquad \xrightarrow{d} \mathcal{O}_X\mathcal{O}_Y^{(r)} \to 0$

なる exact sequence ができる。すると $S^*_N X$, $S^*_{N_1} X_1$ $(N_1 = N \times Y)$ の $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_{X_1}$ に対する純余次元性と S-K-K chapt I Lemma 2.2.3 により

$0 \to p^{-1}C\mathcal{O} \to C\mathcal{O}\mathcal{O}^{(1)} \xrightarrow{d} \cdots \quad \xrightarrow{d} C\mathcal{O}\mathcal{O}^{(r)} \to 0$

なる exact sequence ができる。

同様にして

$$0 \to C\mathcal{O}\mathcal{O} \to C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(0,0)} \xrightarrow{\bar\partial} \qquad \xrightarrow{\bar\partial} C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(0,r)} \to 0$$

また Y を smooth manifold として

$$0 \to p^{-1}C\mathcal{E} \to C\mathcal{E}\mathcal{E}^{(0)} \xrightarrow{d} \cdots \qquad \xrightarrow{d} C\mathcal{E}^{(r)} \to 0$$

$$0 \to p^{-1}C\mathcal{O} \to C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(0)} \xrightarrow{d} \cdots \qquad \xrightarrow{d} C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(r)} \to 0$$

等も exact となる。

さて、改めて

$$\begin{array}{ccc} N_1 = \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \times Y & \hookrightarrow & \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q \times Y = X_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ N = \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q & \hookrightarrow & \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q = X \end{array}$$

とする。($Y = Y^r$: complex manifold)

次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & p^{-1}C\mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & C\mathcal{O}\mathcal{O}^{(0)} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & C\mathcal{O}\mathcal{O}^{(r)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & p^{-1}C\mathcal{E}^{(0,0)} \arrow[r] \arrow[d] & C\mathcal{E}^{(0,0)}\mathcal{O}^{(0)} \arrow[r] \arrow[d] & {} & {} & \\ & {} & {} & & & \end{tikzcd}$$

$D \subset \mathbb{C}^q \times Y$ を定理1.1.1, 1.1.4, 1.1.5の仮定を満たす open とし、$U \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$ を open. proper convex とすると

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[d] \arrow[r] & {} & \Gamma(U \times D, C\mathcal{O}\mathcal{O}^{(0)}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \Gamma(U \times D, C\mathcal{O}\mathcal{O}^{(r)}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Gamma(U \times D, p^{-1}C\mathcal{E}^{(0,0)}) \arrow[r] & \cdots & & {} & \end{tikzcd}$$

なる可換図式は第1行 第1列をのぞいてexact
よってWeilの補題によって

$H^k(\Gamma(U\times D, C\mathcal{O}\mathcal{O}^{(\cdot)}))\simeq H^k(\Gamma(U\times D, p^{-1}C\mathcal{E}^{(0,\cdot)}))$

p: open, fibre connectedより $\simeq H^k(\Gamma(U\times p(D), C\mathcal{E}^{(0,\cdot)}))$

ここで定理1.1.4より $H^k(U\times p(D), C\mathcal{E}^{(0,\cdot)})=0$

$(k\geq 1)$ $\therefore H^k(\Gamma(U\times D, C\mathcal{O}\mathcal{O}^{(\cdot)}))\simeq H^k(U\times p(D), C\mathcal{O})$

Yがsmoothの場合も同様であって

$0\to p^{-1}C\mathcal{O}\to C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(0)}\to\cdots\to C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(t)}\to 0$

なるresolutionにおいて.

$H^k(\Gamma(U\times D, C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(\cdot)}))\simeq H^k(U\times p(D), C\mathcal{O})$

これらを用いて $C\mathcal{O}$のcohomological Radon transformationを2つ与えるが, 証明はKataoka[8]と全く同じなので省略する.

1° smooth parameterをもつRadon transform

$$\begin{array}{ccc}
\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q\times S^{q-1} & \xrightarrow{p} & \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q=\tilde{\Lambda}\\
\tau\downarrow & & \uparrow\\
\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\times S^{q-1} & \xrightarrow{p} & \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q=\Lambda
\end{array}$$

$g:[0,\infty)\to[0,\infty)$: C^2 class. $g(0)=g'(0)=0$

$g'(x), g''(x)\geq 0$ とし,

$D_{g,\varepsilon} = \{(p^*, z, \zeta) \in \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \times S^{q-1};\ |y| < \varepsilon$

$y\zeta - g(\sqrt{y^2 - (y\zeta)^2}) > 0\}$ とし

$\mathcal{CS}^k_{g,\varepsilon} \underset{\mathrm{def}}{=} (\pi|_{D_{g,\varepsilon}})_* (\mathcal{O}\mathcal{E}^{(k)})$

$\mathcal{CS}^k_g = \varinjlim_{\varepsilon} \mathcal{CS}^k_{g,\varepsilon}$ とおく。

このとき

定理 1.2.1 次は exact :

$$0 \to \pi^{-1}\mathcal{A}^2_\Lambda \to \mathcal{CS}^0_g \to \cdots\cdots \to \mathcal{CS}^{q-1}_g \xrightarrow{\sigma} \mathcal{C}^2_\Lambda \to 0$$

on $S^*_\Lambda\tilde{\Lambda} = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q$

$$0 \to \mathcal{A}^2_\Lambda \to P_*\mathcal{CS}^0_g \to \cdots \to P_*\mathcal{CS}^{q-1}_g \xrightarrow{\sigma} \mathcal{B}^2_\Lambda \to 0$$

on Λ

Remark いずれも $\mathcal{CO}$ に対する ede of the wedge (Kashiwara - Laurent [7]) から出る。

$\mathcal{B}^2_\Lambda$ について, $U \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$ を open proper convex $V \subset \mathbb{R}^q$ を convex open とするとき $D = (V + \sqrt{-1}\mathbb{R}^q) \times S^{q-1} \cap D_{g,\varepsilon}$ は 定理 1.1.1, 1.1.4, 1.1.5 の仮定を満たすから

$H^{q-1}(\Gamma(U \times V \times S^{q-1}, \mathcal{CS}^{\cdot}_{g,\varepsilon})) \simeq H^{q-1}(U \times P(D), \mathcal{CO})$

$P(D) = (V + \sqrt{-1}\{|y| < \varepsilon\}) - \mathbb{R}^q$ より

$\doteqdot H^{q-1}(U \times (V^{\mathbb{C}} - \mathbb{R}^q), \mathcal{CO})$ ($V^{\mathbb{C}}$: Vの Stein近傍)

$\simeq H^q_{U\times V}(U\times V^c, C\mathcal{O}) = \Gamma(U\times V, \mathcal{B}^2_\Delta)\ (q\geq 2)$

すなわち $\Gamma(U\times V, \mathcal{B}^2_\Delta)$ の元は $C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)}$ の global section でかけている。 $q=1$ のときは直接示せる。

2° real analytic parameter をもつ Radon transformation （平面波分解）

$N_\varepsilon = \{\zeta \in \mathbb{C}^q \ \zeta^2 = -1.\ |\mathrm{Re}\,\zeta| < \varepsilon\}$

$$\begin{array}{cccc} (p',z,\zeta) & \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q\times N_\varepsilon & \xrightarrow{p} & \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q = \tilde{\Delta} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow j \\ (p',x,\sqrt{-1}\frac{\eta}{|\eta|}) & \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\times\sqrt{-1}S^{q-1} & \xrightarrow{p} & \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q = \Delta \end{array}$$

$D_\varepsilon = \{(p',z,\zeta) \in \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q\times N_\varepsilon,\ |y| < \varepsilon.$
$\mathrm{Re}\,z\zeta + \frac{1}{\varepsilon}|\zeta| < 0\ \}$

$C\mathcal{J}^j_\varepsilon = (\tau|_{D_\varepsilon})_* C\mathcal{O}\mathcal{O}^{(j)}\quad C\mathcal{J}^j = \varinjlim_\varepsilon C\mathcal{J}^j_\varepsilon \hookrightarrow (\mathcal{Y}_0^j$

に対しても次がいえる。

定理 1.2.2 次は exact

$0 \to \pi^{-1}\mathcal{a}^2_\Delta \to C\mathcal{J}^0 \to \cdots \to C\mathcal{J}^{q-1} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{C}_\Delta \to 0$
on $\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q$

$$0 \to \mathcal{A}^2_\Lambda \to P_* \mathcal{C}\mathcal{J}^0 \to \cdots \to P_*\mathcal{C}\mathcal{J}^{q-1} \to \mathcal{B}^2_\Lambda \to 0$$
on Λ

さて，一般に M : real analytic manifold
$\Lambda \subset \sqrt{-1}\,T^*M$: homogenious involutory sub manifold とするとき $C_M \to \mathcal{B}^2_\Lambda$ なる canonical morphism が Kashiwara-Laurent [7] で定義されていて，injective であることが cohomological に示されている。一方で，以下で述べるように，上で述べた Radon transformation によって，$C_M \to \mathcal{B}^2_\Lambda$ なる morphism が定義できる。(ただし，無責任な話ではあるが，この2つが同じ morphism であるという保証はない。)

まず C_M の smooth parameter をもつ Radon transformation (Kataoka [8]) により

$$C_M \underset{\sigma}{\cong} \mathcal{S}_0^{p+q-1}/d_{(\eta,\zeta)}\mathcal{S}_0^{p+q-2}$$

ただし $\mathcal{S}^k_{0\,(x_0,x_0,(\eta_0,\zeta_0))} = \{f(w,z;\eta,\zeta) \in \mathcal{O}\mathcal{E}^{(k)}$
defined on $|w-x_0|<\varepsilon$, $|z-x_0|<\varepsilon$, $|(\eta,\zeta)-(\eta_0,\zeta_0)|<\varepsilon$
$\eta^2+\zeta^2=1$, $|v|<\varepsilon$, $|y|<\varepsilon$, $v\eta+y\zeta>0\}$ --- (1)

一方 $\mathcal{B}^2_\Lambda \underset{\sigma}{\cong} P_*\mathcal{C}\mathcal{S}_0^{q-1}/d_\zeta P_*\mathcal{C}\mathcal{S}^{q-2}$

以下 $P_0=(u_0, x_0, \sqrt{-1}(\eta_0 du+\zeta_0 dx)\infty)=(0, 0, \sqrt{-1}(\eta_0 du+0dx)\infty)\in\Lambda$ ($\eta_0=(1,0\cdots 0)$) とする。すると $f\in C_{M,p_0}$ は

$$f=\sigma(F(w,z;\eta,\zeta)d\sigma(\eta,\zeta))$$

(F: defined on (1) $d\sigma(\eta,\zeta)$: S^{p+q-1} 上の標準的体積要素) とかける。一方 $g\in\mathcal{B}^2_{\Lambda,p_0}$ は

$$g=\sigma(G(u;z,\zeta)d\sigma(\zeta))$$

$G\in C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)}$: defined on $\{(u,\sqrt{-1}\eta du\infty, z,\zeta).$ $|u|<\varepsilon, |\eta-\eta_0|<\varepsilon, \eta^2=1.\ y\zeta>0.\ |y|<\varepsilon.\ \zeta^2=1\}$

とかける。

今, $C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)}$ の smooth parameter をもつ Radon transformation を考えれば C と同様.

$$C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)}\cong\mathcal{A}_0^{p-1}\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)}/d_\eta\mathcal{A}_0^{p-2}\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)}$$

($\mathcal{A}_0^k\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)}$ は単に $\mathcal{A}_0^k$ に $\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)}$ なる parameter が入ったもの) だから, もし $H(w,\eta,z,\zeta)\in\mathcal{O}\mathcal{E}\mathcal{O}\mathcal{E}$ が $\{|u|<\varepsilon, |v|<\varepsilon, \eta^2=1\ |\eta-\eta_0|<\varepsilon_2, u\eta>0\}$

$\times\{|x|<\varepsilon, |y|<\varepsilon, \zeta^2=1.\ y\zeta>0\}$ $\cdots$ (2)

で定義されていれば $\sigma(\sigma(H\,d\sigma(\eta))\,d\sigma(\zeta))$ は $\mathcal{B}^2_{\Lambda,p_0}$ の元を定める。

さて, $j:\mathbb{R}\times S^{p-1}\times S^{q-1}\longrightarrow S^{p+q-1}$

$$(\theta,\eta,\zeta)\longmapsto(\eta\cos\theta,\zeta\sin\theta)$$

とおくと $\delta>0$ を十分小にとれば

$(\eta_0, 0) \in \{(\eta\cos\theta, \zeta\sin\theta) \,;\, |\eta-\eta_0|<\varepsilon,\ \zeta^2=1\ 0\leq\theta<\delta\}$

$\subset\{(\eta,\zeta)\in S^{p+q-1}.\ |(\eta,\zeta)-(\eta_0,0)|<\varepsilon\}$

で, j は $\theta\neq 0$ では同型 かつ

$$j^*d\sigma(\eta\cos\theta, \zeta\sin\theta) = \cos^{p-1}\theta\sin^{q-1}\theta\, d\theta\wedge d\sigma(\eta)\wedge d\sigma(\zeta)$$

(Kataoka [8] Lemma 2.3.1) (符号は除く)

に注意して

$$H_\delta(w,\eta,z,\zeta)=\int_0^\delta F(w,z,\eta\cos\theta,\zeta\sin\theta)\cos^{p-1}\theta \times\sin^{q-1}\theta\, d\theta$$

と定義する。すると F の定義域より H_δ は (2) で定義されているから $\sigma(\sigma(H_\delta d\sigma(\eta))d\sigma(\zeta))$ は B^2_{Λ,p_0} の元を定める。以下で well defined であることを言う。

1) δ によらぬこと $\delta>\delta_1>0$ とすると

$$H_\delta-H_{\delta_1}=\int_{\delta_1}^\delta F(w,z,\eta\cos\theta,\zeta\sin\theta)\cos^{p-1}\theta\sin^{q-1}\theta\, d\theta$$

は w について real までのびるから $\sigma[(H_\delta-H_{\delta_1})d\sigma(\eta)]=0$

2) 代表元によらぬこと $F d\sigma(\eta,\zeta)=d_{(\eta,\zeta)}\omega$ とする。$\eta_0=(1,0\cdots0)$ より S^{p+q-1} の local chart として $(\eta',\zeta)=(\eta_2\cdots\eta_p,\zeta_1\cdots\zeta_q)$ がとれる。

以下で $d\overset{\vee}{\xi}^{12} = d\xi_3 \wedge \cdots$ 等とかく。

$\omega = \sum_{j=2}^{p} f_j\, d\overset{\vee}{\eta}^{j} \wedge d\xi + \sum_{\ell=1}^{q} g_\ell\, d\overset{\vee}{\eta} \wedge d\overset{\vee}{\xi}^{\ell}$ とかける

よって. $\omega = f\, d\overset{\vee}{\eta}^{12}\wedge d\xi$ と $\omega = g\, d\overset{\vee}{\eta}\wedge d\overset{\vee}{\xi}$ について調べればよい。(S^{p-1} の chart も η' をとっている)

a) $\omega = f\,d\overset{\vee}{\eta}^{12}\wedge d\xi$ $\quad j^*\omega = f\cos^{p-1}\theta\sin^{q-1}\theta$
$\times\, d\overset{\vee}{\eta}^{12}\wedge d\theta\wedge d\sigma(\xi)$ よって $j^*d\omega = dj^*\omega$
$= d_\eta(f\cos^{p-1}\theta\sin^{q-1}\theta\, d\overset{\vee}{\eta}^{12})\wedge d\theta\wedge d\sigma(\xi)$

よって ($(\int F d\theta)\, d\sigma(\eta) \in \mathrm{Im}\, d_\eta$ より) $\quad 0$

b) $\omega = f\,d\overset{\vee}{\eta}\wedge d\overset{\vee}{\xi}$ このとき

$j^*\omega = f\cos^{p}\theta\sin^{q-2}\theta\, d\theta\wedge d\eta'\wedge {}^{\exists}\Omega$ — A
$\quad + f\cos^{p-1}\theta\sin^{q-1}\theta\,\xi_1\, d\eta'\wedge d\sigma(\xi)$ — B
$\quad + f\cos^{p-2}\theta\sin^{q}\theta\,\xi_1\, d\theta\wedge{}^{\exists}\psi\wedge d\sigma(\xi)$ — C

(Ω : $q-2$ form on S^{q-1}. ψ : $p-2$ form on S^{p-1})

とかける。よって $j^*d\omega = dj^*\omega$
$= d_\xi A + d_\theta B + d_\eta C$ 定義により.

$\int d_\xi A$, $\int d_\eta C$ はゼロクラスに入る。また

$\int d_\theta B = [(f|_{\theta=\delta}\cos^{p-1}\delta\sin^{q-1}\delta\,\xi_1)\,d\eta']\,d\sigma(\xi')$ $(q>1)$

中身が ω real までのびるから C^σ の元として 0

$q=1$ の場合は直接示せる。 //

§2 $\mathcal{C}_\Theta$ の境界値としての 2-microfunctions

この節では，まず §1 の写像 σ の Čech cohomology による表現を与える。そして $\mathcal{C}_\Theta$ の Θ 変数に関する曲面 Radon 分解について述べる。それをもとに，特異性の分解や Martineau 型の楔の刃定理などが示されるが，その際，cohomological Radon transformation との対応が与えられていることによって議論が smooth となる。そして，それらの定理を用いて，$\mathcal{B}^2_\Lambda$ 上に対する基本的演算が直観的に定義され，2-特異スペクトルの評価も与えられる。また，積分も"原始的"に定義され，それが canonical であることも示される。最後にそれらの応用として，"théorème de Holmgren microlocal" (Kashiwara-Laurent [7]) の special case が直観的かつ素朴に示される。

2.1 cohomological Radon transformation と Čech cohomology との対応

一般に

$$\begin{tikzcd} X_1 = \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q \times L \arrow[r, "p"] & \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q = X \\ N_1 = \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \times L \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r] & \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q = N \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

(L: smooth manifold)

$K^s \subset L$ を compact piecewise smooth oriented subset $p|_{S^*_N X \times K}$ を p とかくとき.

$p_*(\mathcal{CO}\mathcal{E}^{(s)}|_{S^*_N X \times K}) \longrightarrow \mathcal{CO}$ なる morphism $\int_K$ が定義される。これは. $p_*(\mathcal{CO}\mathcal{E}^{(s)}|_{S^*_N X \times K})$ の元をまず $\mathcal{CO}$ 変数について局所化し、さらに fibre K 上で local に $\mathcal{OOE}^{(s)}$ の元で代表させる。そして、その代表元の、K の各 smooth piece (のさらに細分) への pull back の積分の和として $\int_K$ を定義すれば、これは K の分割 および $\mathcal{OOE}^{(s)}$ の元のとり方によらずに定まる。よって、この $\int_K$ に関して Stokes の定理が成立することは K の分割において $\mathcal{OOE}$ の Stokes の定理に帰着されることより OK である。

さらに Z^r: complex manifold $K^s \subset Z$

(S: real dim) とするとき $C\mathcal{O}\mathcal{O}_{Z}^{(s)} \to C\mathcal{O}\mathcal{E}_{Z_R}^{(s)}$
により $p_*(C\mathcal{O}\mathcal{O}_{Z}^{(s)}|_{S_N^* X \times K}) \to C\mathcal{O}$ も定義され
poincaré の定理 ($K \subset \mathbb{C}^r$: real $r+1$ dim
piecewise smooth oriented compact $F \in p_*(C\mathcal{O}\mathcal{O}|_{S_N X \times K})$
のとき $\int_{\partial K} F dz = 0$). 特に Cauchy の積分定理
積分公式も成立する。

さて, B_Δ^2 の Čech cohomology による表現と
Radon transform による表現との対応を与える。
一般に resolution による cohomology と Čech
cohomology, あるいは 2つの resolution による
cohomology の間の canonical な対応は Weil
の補題において与えられている。
$U \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$: open proper convex $V \subset \mathbb{R}^q$ convex
$D = \{ (z, \zeta) \in \mathbb{C}^q \times S^{q-1} \quad |x| \in V, \ |y| < \varepsilon$
$\quad y\zeta - g(\sqrt{y^2 - (y\zeta)^2}) > 0 \}$
$\pi(D) = \{ z ; \ |x| \in V, |y| < \varepsilon \} - \mathbb{R}^q$
とするとき §1より $H^{q-1}(\Gamma(U \times D, C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(\cdot)})$
$\simeq H^{q-1}(U \times \pi(D), C\mathcal{O})$ であるが この同型は
次で与えられる。

$$d_3\downarrow \xrightarrow{\bar\partial}$$

$$
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C\mathcal{O}(U\times\pi(D)) \arrow[r] \arrow[d] & C\mathcal{E}^{(0,1)}(U\times\pi(D)) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(0)}(U\times D) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots\cdots & \\
& {} & &
\end{tikzcd}
$$

exact

exact

により $C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)}(U\times D)$ $\quad C\mathcal{E}^{(0,0)}\mathcal{E}^{(q-2)}(U\times D)$ $\quad \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} C\mathcal{E}^{(0,q-1)}(U\times\pi(D)) \\ \to C\mathcal{E}^{(0,q)}(U\times\pi(D))\end{pmatrix}$

$$\searrow C\mathcal{E}^{(0,0)}\mathcal{E}^{(q-1)}(U\times D) \qquad \searrow \cdots \searrow \quad C\mathcal{E}^{(0,q-1)}\mathcal{E}^{(0)}(U\times D)$$

$$\varphi=\varphi_{q-1} \searrow \varphi_{q-1}=d_3\varphi_{q-2} \overset{d}{\swarrow} \varphi_{q-2} \overset{\bar\partial}{\searrow} \cdots \searrow \bar\partial\varphi_0=\varphi_{-1} \swarrow \varphi_{-1}$$

なる sequence $\{\varphi=\varphi_{q-1}\ \cdots\ \varphi_{-1}\}$ にたいして

$[\varphi]\longmapsto[\varphi_{-1}]$ として定義される。

一方 $\xi_1\cdots\xi_q\in\mathbb{R}^q\setminus\{0\}$ を一次独立な単位ベクトルとし, $\xi_{j\pm}=\pm\xi_j$ とおくとき,

$$V_{j\pm} \underset{\mathrm{def}}{=} \{z\in\pi(D);\ y\xi_{j\pm}-g(\sqrt{y^2-(y\xi_{j\pm})^2})>0\}$$

とおくと $\mathcal{U}=\{U\times V_{j\pm}\}$ は ε 十分小のとき

$U\times\pi(D)$ の, $C\mathcal{O}$ に対する Leray covering となる。

よって $H^{q-1}(U\times\pi(D), C\mathcal{O})\simeq H^{q-1}(C^\cdot(\mathcal{U}, C\mathcal{O}))$

この同型は次で与えられる:

$$f\downarrow \xrightarrow{\bar\partial}$$

$$
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C\mathcal{O}(U\times\pi(D)) \arrow[r] \arrow[d] & C\mathcal{E}^{(0,0)}(U\times\pi(D)) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & C^0(\mathcal{U}, C\mathcal{O}) \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\mathcal{U}, C\mathcal{E}^{(0,0)}) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
& {} & {} &
\end{tikzcd}
$$

exact

により

$$
\begin{array}{ccccccccc}
C^{q-1}(\mathfrak{U}, C\mathcal{O}) & & & & C^{q-2}(\mathfrak{U}, C\mathcal{E}^{(0,1)}) & & & & \mathrm{Ker}\left(C\mathcal{E}^{(0,q-1)}(U\times\pi(D)) \to C\mathcal{E}^{(0,q)}(U\times\pi(D))\right) \\
& \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \\
& & C^{q-1}(\mathfrak{U}, C\mathcal{E}^{(0,0)}) & & \cdots & & C^{0}(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^{(0,q-1)}) & &
\end{array}
$$

$$
\psi = \psi_{q-1} \searrow \psi_{q-1} = \delta\psi_{q-2} \overset{\delta}{\swarrow} \psi_{q-2} \overset{\bar\partial}{\searrow} \cdots \overset{\bar\partial}{\searrow} \bar\partial\psi_0 = \psi_{-1} \swarrow \psi_{-1}
$$

なる sequence $\{\psi = \psi_{q-1} \cdots \psi_{-1}\}$ により

$[\psi_{-1}] \longmapsto [\psi]$ で定義される。さてこの2つの morphism の合成により

$$h : H^{q-1}(\Gamma(U\times D, C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(\cdot)})) \simeq H^{q-1}(C^{\cdot}(\mathfrak{U}, C\mathcal{O}))$$

なる同型が得られるが それは次で与えられる。

命題 2.1.1 $\Delta^k_t = \{(t_1 \cdots t_k) \mid 0 \le t_j \le 1, \ \sum t_j \le 1\}$ を k次元単体, $\{e_1 \cdots e_{k+1}\}$ をその頂点とする。写像 $[\zeta_{j_1}\varepsilon_1 \cdots \zeta_{j_{k+1}}\varepsilon_{k+1}] : \Delta^k \to S^{q-1}$ $(j_1 < \cdots < j_{k+1}, \ \varepsilon_\ell = \pm 1)$ を $[\cdots](e_\ell) = \varepsilon_\ell \zeta_{j_\ell}$ を満たす "linear" な map とし、一般に φ を S^{q-1} 上の k-form とするとき

$$\int_{[\ ]} \varphi \underset{def}{=} \int_{\Delta^k} [\ ]^* \varphi(t_1 \cdots t_k)$$ と定義する。

このとき $\varphi \in \Gamma(U\times D, C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)})$ に対し

$h([\varphi]) = [\{\psi_{1\varepsilon_1 \cdots q\varepsilon_q}\}]$ ただし

$$\psi_{1\varepsilon_1 \cdots q\varepsilon_q} = \int_{[\zeta_1\varepsilon_1 \cdots \zeta_q\varepsilon_q]} \varphi$$

証明) $\{\varphi = \varphi_{q-1} \cdots \ \varphi_{-1}\}$ なる sequence を

φから作ったとき，$\exists\, \psi_{q-2} \cdots \psi_0$. $\psi_k \in C^k(\mathfrak{U}, \mathcal{C}\mathcal{E}^{(0, q-2-k)})$

s.t. $\delta \psi_{q-2} = \psi$. $\bar{\partial} \psi_0 = \varphi_{-1}$. $\delta \psi_k = \bar{\partial} \varphi_{k+1}$

をいえばよい。ψ_k を $\psi_k(j_1\varepsilon_1 \cdots j_{k+1}\varepsilon_{k+1}) = \int_{[\cdots]} \varphi_k$

で定義する。このとき

$$(\delta \psi_{k-1})(j_1\varepsilon_1 \cdots j_{k+1}\varepsilon_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \int_{[j_1\varepsilon_1 \overset{\vee}{\cdots} \cdots]} \varphi_{k-1}$$

$$= \int_{[j_1\varepsilon_1 \cdots]} d_z \varphi_{k-1} \quad (\text{Stokes})$$

（上の定義では向きづけをきちんと言っていないので，

厳密ではないが，符号のみの差なので無視できる）

$$= \int_{[\ ]} \bar{\partial} \varphi_k = \bar{\partial} \psi_k(j_1\varepsilon_1 \cdots) \quad \text{両端でもOK}$$

よって この ψ. は確かに条件をみたす。 //

逆の対応は次の節で与えることとして，境界値作用素

について述べておく。

$\tau : \widetilde{\hat{\Delta}} = (\hat{\Delta} - \Delta) \sqcup S_\Delta \hat{\Delta} \to \hat{\Delta}$ を real monoidal

transform $j : \hat{\Delta} - \Delta \hookrightarrow \widetilde{\hat{\Delta}}$ とする。

$$\tilde{\mathcal{a}}^2_\Delta = j_*(\mathcal{C}\mathcal{O}|_{\hat{\Delta}-\Delta})|_{S_\Delta \hat{\Delta}}$$

$$D_\Delta \hat{\Delta} = \{(p; x, \sqrt{-1}v, \sqrt{-1}\xi) \in S_\Delta \hat{\Delta} \underset{\Delta}{\times} S^*_\Delta \hat{\Delta}, \langle v\, \xi \rangle \le 0\}$$

$$\begin{tikzcd} & D_\Delta \hat{\Delta} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ S_\Delta \hat{\Delta} \arrow[dr, "\tau"'] & & S^*_\Delta \hat{\Delta} \arrow[dl, "\pi"] \\ & \Delta & \end{tikzcd}$$

とするとき 次の exact sequence がある。

(Kashiwara-Laurent[7] に述べられているが，$\mathcal{C}\mathcal{O}$の

cohomology 消滅定理の証明が不充分と思われるので、完全でないと思われる。)

$0 \to \widetilde{\mathcal{A}}^2 \xrightarrow{b} \tau^{-1}\mathcal{B}^2 \to \pi_*\tau^{-1}\mathcal{C}^2 \to 0$

bが境界値作用素である。bのČech cohomologyによる表現は森本[1] 金子[3]により次で与えられている。(いずれも、それがbのcanonicalな定義と一致することは証明されていない。しかし森本[1]では単射性は示されている。)

今、$\mathbb{R}^q$の向きを一つきめる。$U \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q$: proper convex V open $\subset \mathbb{R}^q$. Γ : proper convex cone. $V^{\mathbb{C}}$: Stein近傍 of V とし、$\varphi \in \mathcal{CO}(U \times ((\mathbb{R}^q + i\Gamma) \cap V^{\mathbb{C}}))$ とし、$\xi_1 \cdots \xi_q \in S^{q-1}$ を、一次独立かつ $\{\xi_1\}^\circ \cap \cdots \cap \{\xi_q\}^\circ \subset \Gamma$ かつ $\{\xi_1 \cdots \xi_q\}$の向きが S^{q-1}の正の向きであるとする。

$\mathcal{U}$ = 前の$\mathcal{U} \cap (U \times V^{\mathbb{C}})$ とおくと、φの$H^{q-1}(\mathbb{C}^\cdot(\mathcal{U}, \mathcal{CO}))$ における image $\psi = \{\psi_{\xi_1 \cdots \xi_q}\}$ は、

$\psi_{1+\cdots q+} = \varphi$　その他 0　で与えられる。

そして $\Gamma(U \times V, \mathcal{B}^2_\Delta) = \{\sum_{j=1}^{N} b(\varphi_j)\ ;\ \varphi_j \in \mathcal{CO}((U \times (V + i\Gamma_j))_0)\ ;\ (U \times (V + i\Gamma_j))_0$: $U \times V$上の Γ_j型の無限小楔$\}$

と書けていて、$\varphi_j \in C\mathcal{O}((U_j \times (V_j + i\Gamma_j))^{\circ})$ $(j=1,2)$.

のとき　$b(\varphi_1) + b(\varphi_2) = b(\varphi_1 + \varphi_2)$　($\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \phi$ のとき)

$\varphi_1 + \varphi_2 \in C\mathcal{O}((U_1 \cap U_2 \times (V_1 \cap V_2 + i\Gamma_1 \cap \Gamma_2))^{\circ})$

が成立する。

2.2 $C\mathcal{O}$ の $\mathcal{O}$-変数に関する曲面 Radon 分解

$C\mathcal{O}$ を, microfunction parameter をもつ holomorphic function とみて Kataoka [8] 金子 [3] に従って $\mathcal{O}$-変数に関する曲面 Radon 分解を与える。内容は金子 [3] と全く同じであるが, 極限論法が使えない等の点で多少注意を要する。

$\mathbb{C}^q$ 上の曲面 Radon 分解核 $W(z,\zeta)$ ($(z,\zeta)\in\mathbb{C}^q\times N_\varepsilon$, $N_\varepsilon=\{\zeta\in\mathbb{C}^q,\ \zeta^2=1,\ |\eta|=|\mathrm{Im}\,\zeta|<\varepsilon\}$) を考える:

$$W(z,\zeta)=\frac{(q-1)!}{(-2\pi i)^q}\,\frac{(1-iz\zeta)^{q-1}-(1-iz\zeta)^{q-2}(z^2-(z\zeta)^2)}{\{z\zeta+i(z^2-(z\zeta)^2)\}^q}$$

$W(z,\zeta)$ の正則域について次がいえる。

1) $D_1\subset\subset D_0$ (相対 compact) とするとき $\exists\varepsilon>0$ s.t. $\forall z_0\in\partial D_0+iB_\varepsilon$ (B_ε : ε-ball). $W(z-z_0,\zeta)$ は $(D_1+iB_\varepsilon)\times N_\varepsilon$ で holomorphic

2) $\tilde{D}\subset\mathbb{C}^q$ が有界 $\Rightarrow$ $\exists K>0$. $W(z,\zeta)$ は $\{(z,\zeta)\in\tilde{D}\times N_\varepsilon,\ \mathfrak{f}(y,\zeta)\underset{\mathrm{def}}{=}y\zeta-(y^2-(y\zeta)^2)>K|\eta|\}$ で holomorphic

命題2.2.1（Kataoka[8]，金子[3]）

$U \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$ open　D_1, D_0, ε は上で述べたものとする。

$D \supset\supset D_0$，Γ: open convex cone in $\mathbb{R}^n$ とし，

$f(p^*, z) \in C\mathcal{O}(U \times D_{\Gamma_{\varepsilon'}})$　$(D_{\Gamma_{\varepsilon'}} = D + i\Gamma \cap B_{\varepsilon'}$

; $\varepsilon' > \varepsilon)$ とする。このとき　$a \in \Gamma \cap B_\varepsilon$ とすれば

$F(p^*, z, \zeta) = \int_{D_0 + ia} f(p^*, w)\, \overline{W}(z-w, \zeta)\, dw$

$\in C\mathcal{O}\mathcal{O}(\widetilde{E})$

ただし $\widetilde{E}$ は．$E \underset{\mathrm{def}}{=} U \times \bigcup_{y_0 \in B_\varepsilon \cap \Gamma} E_{y_0}$　$(E_{y_0} = \{(z, \zeta)$

$\in (D_1 + iB_\varepsilon) \times S_\zeta^{n-1}$, $\langle y - y_0, \zeta \rangle > 0 \})$ のある近傍

そして，Δ°: proper convex $\subset S^{n-1}$ とするとき

$F(p^*, z, \zeta) \in C\mathcal{O}\mathcal{O}(U \times (K + i(\Gamma + \Delta)^\circ) \times \Delta^\circ)$ で

とくに $F(p^*, z, \zeta) \in C\mathcal{O}\mathcal{O}(U \times D_{1\Gamma_\varepsilon} \times S^{n-1})$．

$U \times D_{1\Gamma_\varepsilon}$ 上　$\int_{S^{n-1}} F(p^*, z, \zeta)\, d\sigma(\zeta) = f(p^*, z)$

証明）$\forall y_0 \in \Gamma \cap B_\varepsilon$ に対し，積分路 γ_{y_0} を．

「∂D_0 上で　$ia \to iy_0$，int D_0 上で　$w + iy_0$」と定める。

$F_{y_0}(p^*, z, \zeta) = \int_{\gamma_{y_0}} f(p^*, w)\, \overline{W}(z-w, \zeta)\, dw$　とおくと

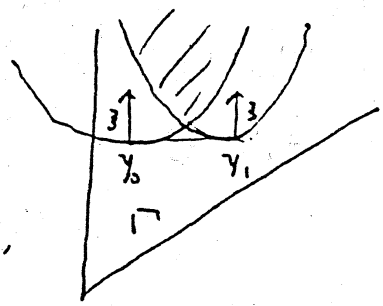
1), 2) より　F_{y_0} は

$U \times \widetilde{E}_{y_0}$　$(\widetilde{E}_{y_0} = \{(z, \zeta) \in (D_1 + iB_\varepsilon) \times N_\varepsilon, \langle y - y_0, \zeta \rangle > k|\eta|\})$

上の $C\mathcal{O}\mathcal{O}$ の元

ここで; $\xi \in S^{l-1}$ (i.e. $|\xi|=1$, $\eta=0$) のとき $-f(y,\xi)$ は

y a convex function より

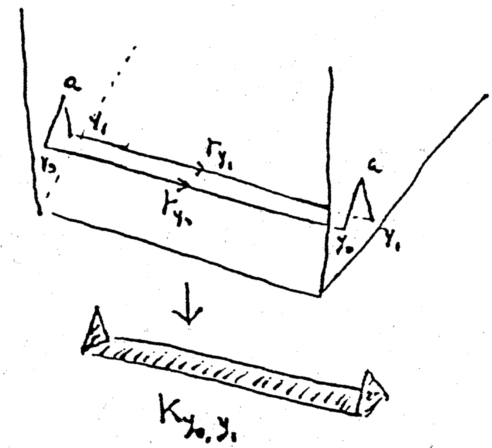


$E_{y_0}\cap E_{y_1} = \bigcap_{0\le t\le 1} E_{ty_0+(1-t)y_1}$

よって、実 $l+1$ 次元の積分路 K_{y_0,y_1}

を図のようにとるとき、$\forall(z,\xi)\in E_{y_0}\cap E_{y_1}$,

$\exists V$ open $\subset \bigcap_{0\le t\le 1} \overset{\circ}{E}_{ty_0+(1-t)y_1}$ s.t.



$U\times K_{y_0,y_1}\times V$ 上で integrand

が defined. よって K_{y_0,y_1} 上で

Poincaréの定理を適用して

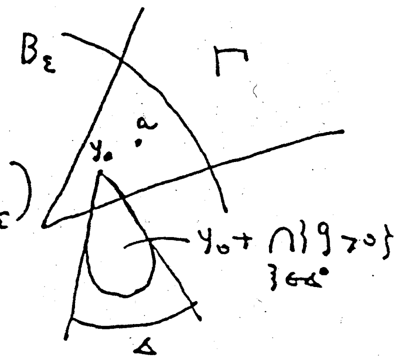
$F_{y_0}=F_{y_1}$ on $U\times(E_{y_0}\cap E_{y_1})$

よって第1の主張はOK

次に、F_{y_0} において、ξ が Δ を動くとき、F_{y_0} は

$U\times(D_1+i(y_0+\bigcap_{\xi\in\Delta}\{f(y,\xi)>0\}))\times\Delta$ で定義されている。y_0 を $\Gamma\cap B_\varepsilon$ で動かすと

2番目の主張がわかる。



3番目の主張については、左辺$\in\mathcal{O}(U\times D_{1\Gamma_\varepsilon})$

はわかっているから、$U\times D_{1\Gamma_\varepsilon}$ 上 local

に 左辺が $f(p^*,z)$ と等しいことを

言えばよい。

$(p_0^*, z_0)=((x_0, \sqrt{-1}\xi_0 dx^\infty), z_0)\in U\times D_{1\Gamma_\varepsilon}$ を fix する。

$\exists\, U_0 = \{(x, As\,dt\infty),\ |t-t_0|<\varepsilon,\ |s-s_0|<\varepsilon\} \ni p_0^*$

$\exists\, W_0 = V_0 + iI_0 = \{|x-x_0|<\varepsilon,\ |y-y_0|<\varepsilon\}$

$\exists$ 楔 on $\{|t-t_0|<\varepsilon\}$ $\exists\, F(\tau, z) \in \mathcal{O}(\text{楔} \times W_0)$

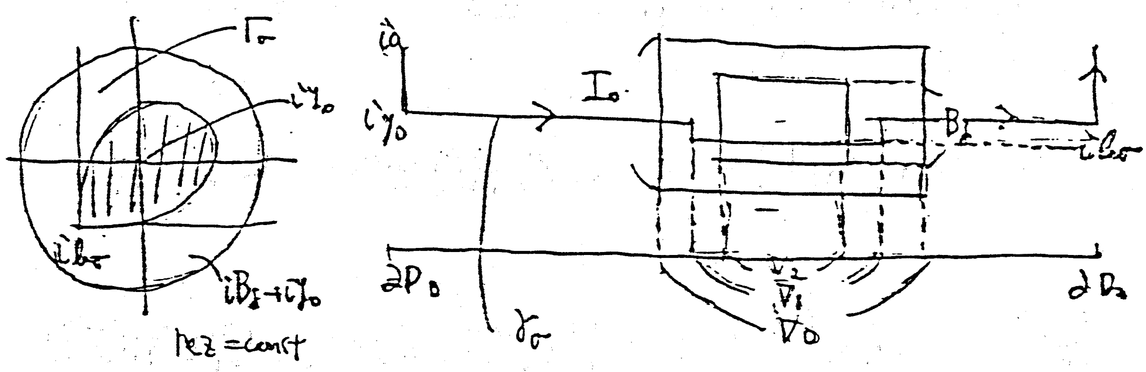
s.t. $u(p^*, z) = \mathrm{sp}[F(\tau, z)]$

$V_2 \subset\subset V_1 \subset\subset V_0$ とすると，1)と同様にして，$\exists\,\delta>0$ s.t.

$\forall\, w_0 \in \partial V_1 + B_\delta + iy_0$. $W(z-w_0, \zeta)$ は $(V_2 + iB_\delta + iy_0)\times N_\delta$

で holomorphic。 $\sigma = (\pm1 \cdots \pm1)$ $b_\sigma = y_0 - \rho\sigma$ $|\rho\sigma|<\delta$

とおき，図のように積分路をきめる。



すると，ζが $\Gamma_\sigma = \{\sigma_i \zeta_i \ge 0\}$ を動くとき z は $V_2 + i$(図)

(上図)を動ける。ρ 十分小 ⇒ $\bigcap_\sigma$ (図) $\supset \exists\, I_1 \ni y_0$

おいて $U_0 \times (V_2 + iI_1)$ 上

$$\int_{S^{n-1}} F(p^*, z, \zeta)\, d\sigma(\zeta) = \sum_\sigma \int_{\Gamma_\sigma} F(p^*, z, \zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

$$= \sum_\sigma \int_{\Gamma_\sigma} d\sigma(\zeta) \int_{\gamma_\sigma} dw\, u(p^*, w)\, W(z-w, \zeta)$$

$\gamma_\sigma = \gamma_\sigma^1 \sqcup \gamma^2$ (γ_σ^1: $\overline{V_1}$ 上のもの．γ^2: のこり(共通))

とおくと、

$$= \sum_\sigma \int_{\Gamma_\sigma} d\sigma(\zeta) \int_{\gamma_\sigma^1} dw\, u(p^*, w)\, \overline{W}(z-w, \zeta) \cdots (1)$$
$$+ \sum_\sigma \int_{\Gamma_\sigma} d\sigma(\zeta) \int_{\gamma^2} dw\, u(p^*, w)\, \overline{W}(z-w, \zeta) \cdots (2)$$

$$(1) = sp\left[\sum_\sigma \int_{\Gamma_\sigma} d\sigma(\zeta) \int_{\gamma_\sigma^1} dw\, F(\tau, w)\, \overline{W}(z-w, \zeta) \right]$$

これは通常の holomorphic function の Radon 分解により

$$= sp\left[F(\tau, z)\right] \text{ on } U_0 \times (V_2 + iI_1)$$

また $(2) = \int_{\gamma^2} dw\, u(p^*, w) \int_{S^{n-1}} d\sigma(\zeta) \overline{W}(z-w, \zeta)$ で

$z-w \neq 0$ より $\int_{S^{n-1}} \overline{W}(z-w, \zeta)\, d\sigma(\zeta) = 0 \quad \therefore (2) = 0$

$\therefore$ $U_0 \times (V_2 + iI_1)$ 上で ok. より結局全体で ok。 //

系1. $\Delta \subset\subset \Gamma$ とすると $F(p^*, z, \Delta^\circ) = \int_{\Delta^\circ \cap S^{n-1}} F(p^*, z, \zeta)\, d\sigma(\zeta)$ $\in \mathcal{O}(U \times (K + i\Delta 0))$ とおけば

$u(p^*, z) - F(p^*, z, \Delta^\circ)$ は $U \times K$ 上 z-real analytic

系2 $\tilde{\alpha}^2 \to T^{-1}\left(P^* \mathcal{C}^{q-1} / d_\zeta P^* \mathcal{C}^{q-2}\right) \simeq T^{-1}\mathcal{B}^2$

は 上の積分 $u(p^*, z) \mapsto \left[\int_{p+ia} u(p^*, w)\, \overline{W}(z-w, \zeta)\, dw\, d\sigma(\zeta)\right]$

で与えられる。

系1は 金子[3]と同じ. 系2は 命題中の 反転公式と, 前に与えた Radon transformation と Čech cohomology の対応. および 境界値作用素 b の表現を組み合わせればわかる。

命題2.2.2 $F(p^*, z) \in \mathcal{O}((U \times (V + i\Gamma))_0)$ に対し，$b(F) = b_\Gamma(F) = F(p^*, x+i\Gamma 0)$ とおく

$u = \sum b_{\Gamma_j}(F_j) \in \mathcal{B}^2(U \times V)$ に対し．$(p_0^*, x_0, \sqrt{-1}\xi_0 dx_\infty) \notin SS^2(u)$．

$\Longleftrightarrow F(z, \xi) = \sum_j \int_{V_0 + i a_j} F_j(p^*, w) W(z-w, \xi) dw$
$\in \mathcal{A}^2_{(p_0^*, x_0, \xi_0)}$ $(a_j \in \Gamma_j$ 十分小 $V_0 \subset\subset V)$

証明) $\Leftarrow$) $u(p^*, x) = \sigma(F(z, \xi) d\sigma(\xi))$

で，$CO\mathcal{E}^{(\cdot)}$ に対する de Rham の定理より

$\exists\, w \in CO\mathcal{E}^{(n-2)}_{(p_0^*, x_0, \xi_0)}$ s.t. $F d\sigma(\xi) = dw$

よって $sp(u) = \sigma(dw) = 0$ at $(p_0^*, x_0, \sqrt{-1}\xi_0 dx_\infty)$

$\Rightarrow$) $G_j(p^*, z, \xi) = \int_{V_0 + \sqrt{-1} a_j} F_j(p^*, w) W(z-w, \xi) dw$

とおくて $F_j(p^*, z) = \int_{S^{n-1}} G_j(p^*, z, \xi) d\sigma(\xi)$

on $U \times (V_1 + i\Gamma_j 0)$ $(V_1 \subset\subset V_0)$

よって $F(z, \xi) \equiv \sum_j \int_{V_2 + i b_j} dw \left(\int_{S^{n-1}} G_j d\sigma \right) W(z-w, \xi)$

$(\bmod\ \mathcal{A}^2)$ $(V_2 \subset\subset V_1)$

($\int_{S^{n-1}} G_j d\sigma$ の定義域に合わせて b_j を十分小にし，V_0 を V_2 にちぢめた。剰余が $V_3 \subset\subset V_2$ 上 $\mathcal{A}^2$ になることは明らかである。)

今 $(P_0^*, t_0, i\zeta_0 dx_\infty) \notin S.S^2 u$ より $\exists w \in \mathcal{CO}\Sigma^{(n-2)}(\tilde{U}_0 \times \tilde{D})$

$D = \{|z - x_0| < \varepsilon,\ |\zeta - \zeta_0| < \varepsilon,\ y\zeta - \sqrt{y^2 - (y\zeta)^2} > 0\}$

s.t. $F d\sigma = dw$

$V_4 \subset\subset V_3$ を十分小にとって $V_4 \subset\subset \{|x - x_0| < \varepsilon\}$

ととる。これに対応して積分域，水準を小にして

$$F(z, \zeta) \equiv \sum_{j,k \geq 1} \int_{V_4 + ib'_j} dw \left(\int_{\Delta_k^\circ} G_j\, d\sigma\right) \overline{W}$$

$$+ \sum_j \int_{V_4 + ib'_j} dw \left(\int_{\Delta_0^\circ} G_j\, d\sigma\right) \overline{W}$$

($\Delta_0^\circ \subset\subset \{|\zeta - \zeta_0| < \varepsilon\}$. $S^{n-1} \setminus \Delta_0^\circ = \bigsqcup_{i=1}^{N} \Delta_i^\circ$ と polygon に分解)

$\int_{\Delta_k^\circ} G_j \in \mathcal{CO}(U \times (V_1 \times i(\Gamma_j + \Delta_k) 0))$ より

$b_j' \to c_k \in \Delta_k$ に変更できる。(mod $\mathcal{A}^2$)

よって $\equiv \sum_k \int_{V_4 + ic_k} dw\, \overline{W} \int_{\Delta_k^\circ} F(z, \zeta)\, d\sigma$

$+ \int_{V_4 + ic_0} dw\, \overline{W} \int_{\Delta_0^\circ} F d\sigma$

$k \geq 1$ なら $\int_{\Delta_k^\circ} F d\sigma \in \mathcal{CO}(U \times (V_1\ \ i\Delta_k) 0)$

で $c_k \in \Delta_k^\circ$ より $\int_{V_4 + ic_k} \overline{W}\, dw \int_{\Delta_k^\circ} F d\sigma \in \mathcal{A}^2$

また $\int_{\Delta_0^\circ} F d\sigma = \int_{\Delta_0^\circ} dw = \int_{\partial \Delta_0^\circ} w = \sum_\ell \int_{B_\ell^\circ} w$

$(\bigcup B_\ell^\circ = \partial \Delta_0^\circ)$ で $\int_{B_\ell^\circ} w \in \mathcal{CO}(U_0 \times (\{|z - x_0| < \varepsilon\} + iB_\ell 0))$

$B_\ell^\circ \ni c_0$ よって $\int_{V_4 + ic_0} \overline{W} \int_{B_\ell^\circ} w \in \mathcal{A}^2$

$\therefore \int_{\Delta_0^\circ} F d\sigma$ もそう //

これらを使えば金子[3]にある基本的な命題(に相当するもの)が証明できる。それらを列挙する。(証明は略)

定理 2.2.3 $f(p^*, x) \in \mathcal{B}^2(U\times V)$; $U \subset \sqrt{-1}S^{*n-1}$ proper convex V open in $\mathbb{R}^q$ $V_0 \subset\subset V$ $U_0 \subset\subset U$

$\quad$ $\mathrm{S.S.}^2 f \subset U\times V\times \sqrt{-1}\,\mathrm{int}\,(\bigcup_{j=1}^{N}\Gamma_j^\circ)\,dx\infty$

とすると $\exists\, F_j \in \mathcal{CO}(U_0\times(V_0+i\Gamma_j)0)$

s.t. $f = \sum b_{\Gamma_j}(F_j)$

定理 2.2.4 (Martineau型の局所版の刃定理)

$f=\sum b_{\Gamma_j}(F_j) \quad \in \mathcal{B}^2(U\times V)$

$f=0$ on $U\times V$ とする。このとき $U_0\subset\subset U$, $V_0\subset\subset V$

$\quad \Delta_{jk} \subset\subset \Gamma_j+\Gamma_k$ とするとき

$\exists\, H_{jk} \in \mathcal{CO}(U_0\times(V_0+i\Delta_{jk})0)$ s.t.

$H_{jk}=H_{kj}$ で $F_j=\sum_k H_{jk}$

2.3 $\mathcal{B}^2_\Lambda$ に対する基本的演算とその応用

2.2の定理によって hyperfunction の場合と同様に制限、代入が定義でき、また、2-hyperfunction と hyperfunction の積が定義できる。また、積分が定義できる。これらの演算は Kashiwara-Laurent [7] で canonical (cohomological) に定義されているものであって、これらが一致するという保証はよく証明を要することであるが、ここでは行わない。

1° 積

定理 2.3.1
$$\begin{tikzcd} S^*_\Lambda\tilde{\Lambda} = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q \arrow[r, "p"] \arrow[d] & \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q \arrow[d] \\ \Lambda = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \arrow[r, "p"] & \mathbb{R}^q \end{tikzcd}$$

$u(p^*, x) \in \mathcal{B}^2(U \times V)$ $\quad u(x) \in \mathcal{B}(V)$

とし $SS^2 u \cap p^{-1}((SSv)^a) = \phi$

$\Rightarrow$ 積 $u(p^*, x)\, v(x) \in \mathcal{B}^2(U \times V)$ が定義され

1) $\mathrm{supp}\, uv \subset \mathrm{supp}\, u \cap p^{-1}(\mathrm{supp}\, v)$

2) $SS^2 uv \subset \{(p^*, x, (\lambda\xi + (1-\lambda)\eta)\, dx\infty)$;

$(p^*, x, \xi\, dx\infty) \in SS^2 u,\ (x, \eta\, dx\infty) \in SSv\ \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$

$\cup\ SS^2 u\ \cup\ p^{-1}(SSv)$

証明は hyperfunction の場合と同じである。すなわち定理 2.2.3 によって local に singularity を分解して積を local に定義でき、定理 2.2.4 および hyperfunction に対する局所楔の刃定理によって local に unique に定義できていることがわかる。

SS^2 の評価も同様にして得られる。

2° 制限, 代入

$f: N \to M$ real analytic manifold の間の real analytic map とする

$$\begin{tikzcd} & N \times_M \sqrt{-1}S^*M - \sqrt{-1}S^*_N M \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "\varpi"] & \\ \sqrt{-1}S^*N & & \sqrt{-1}S^*M \end{tikzcd}$$

を canonical map とする.

定理 2.3.2.

1) f: embedding (制限)

map を $\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \cdots$ に拡張しておく

$u \in \mathcal{B}^2_{\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times M}$ が $SS^2 u \cap \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \sqrt{-1}S^*_N M = \emptyset$

なるとき $u|_{\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times N} \in \mathcal{B}^2_{\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times N}$ が定義できて

$$SS^2(u|_{\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times N}) \subset \rho\varpi^{-1}(SS^2 u)$$
$$= \rho(\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times N \times_M \sqrt{-1}S^*M \cap SS^2 u)$$

2) f: smooth (代入)

$$f^* : f^{-1}\mathcal{B}^2_{\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times M} \longrightarrow \mathcal{B}^2_{\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times N}$$

なる代入が定義され.

$$SS^2(f^*u) = \rho\varpi^{-1}(SS^2 u)$$

これも hyperfunction の場合と同様である。

3° 積分

$$\begin{array}{ccc} N_1 = \mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q\times\mathbb{C}^r & \hookrightarrow & \mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^q\times\overline{\mathbb{C}}^q\times\mathbb{C}^r\times\overline{\mathbb{C}}^r = X_1 \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ N = \mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q & \hookrightarrow & \mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^q\times\overline{\mathbb{C}}^q = X \end{array}$$

$(\mathbb{C}^q \simeq \mathbb{C}^q \underset{\mathbb{C}^q}{\times} \overline{\mathbb{C}}^q \hookrightarrow \mathbb{C}^q\times\overline{\mathbb{C}}^q$: $\mathbb{C}^q$の複素化 etc$)$

$$\widetilde{\Lambda}_1 = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q\times\mathbb{C}^r \xrightarrow{p} \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q = \widetilde{\Lambda}$$

このとき $\widetilde{\Lambda}_1$, $\widetilde{\Lambda}$ 上に次の exact sequence (flabby resolution) が存在する.

$$0\to \mathcal{CO}^{(r)} \to \mathcal{C}^{(0,0)(r)}_{N_1}\Big|_{\widetilde{\Lambda}_1} \to \cdots \to \mathcal{C}^{(0,q+r)(r)}_{N_1}\Big|_{\widetilde{\Lambda}_1} \to 0$$

$$0\to \mathcal{CO} \to \mathcal{C}^{(0,0)}_{N}\Big|_{\widetilde{\Lambda}} \to \cdots \to \mathcal{C}^{(0,q)}_{N}\Big|_{\widetilde{\Lambda}} \to 0$$

ここで $\mathcal{CO}^{(r)} = \mathcal{CO}\otimes\Omega^r_{\mathbb{C}^r}$ ($\Omega^r_{\mathbb{C}^r}$: r次正則型式)

$\mathcal{C}^{(0,k)(r)}_{N_1} = \mathcal{C}_{N_1}\otimes\Omega^r_{\mathbb{C}^r}\otimes\Omega^{(0,k)}_{\mathbb{C}^q\times\mathbb{C}^r}$ ($\Omega^{(0,k)}_{\mathbb{C}^q\times\mathbb{C}^r}$: k次反正則型式)

今 $Z \subset \widetilde{\Delta}_1$ closed かつ $p|_Z$ proper

$p(Z) \subset G$ closed in $\widetilde{\Delta}$ とすると

$$\Gamma_Z(\widetilde{\Delta}_1, C_{H_1}^{(0,k+r)(t)}|_{\widetilde{\Delta}_1}) \xrightarrow{\int_{\mathbb{C}^r}} \Gamma_G(\widetilde{\Delta}, C_H^{(0,k)}|_{\widetilde{\Delta}})$$

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|=k+r} u_{\alpha\beta}(p^*_1 z, \tau)\, d\bar{z}^\alpha \wedge d\bar{\tau}^\beta \wedge d\tau \mapsto \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ |\beta|=r}} \int_{\mathbb{C}^r} u(p^*_1 z, \tau)\, d\bar{\tau}\, d\tau \times d\bar{z}^\alpha$$

で $\int_{\mathbb{C}^r}$ が定義され 次を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} \cdots\cdots \to \Gamma_Z(\widetilde{\Delta}_1, C_{N_1}^{(0,k+r),(t)}|_{\widetilde{\Delta}_1}) & \to & \cdot \\ \downarrow & & \\ \to \Gamma_G(\widetilde{\Delta}, C_N^{(0,k)}|_{\widetilde{\Delta}}) & \to & \end{array}$$

よって $H_Z^{k+r}(\widetilde{\Delta}_1, \mathcal{C}\mathcal{O}^{(t)}) \to H_G^k(\widetilde{\Delta}, \mathcal{C}\mathcal{O})$

なる morphism が induce される。これで $\mathcal{B}^2$ の

積分を定義する。

$$\Delta_1 = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{p} \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \Delta$$

$Z \subset U \times V \times W$ ($U \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$, $V \subset \mathbb{R}^q$, $W \subset \mathbb{R}^r$: opens)

$p|_Z$ proper $p(Z) \subset G \subset U \times V$ とすると

$\Gamma_Z(U \times V \times W, \mathcal{B}^2_{\Delta_1} \otimes v_{\mathbb{R}^r})$ ($v_{\mathbb{R}^r}$: 体積要素)

$= H_Z^{q+r}(U \times V^{\mathbb{C}} \times W^{\mathbb{C}}, \mathcal{C}\mathcal{O}^{(t)})$

$\xrightarrow{\int_{\mathbb{C}^r}} H_G^q(U \times V^{\mathbb{C}}, \mathcal{C}\mathcal{O}) = \Gamma_G(U \times V, \mathcal{B}^2_\Delta)$

これによって積分を定義する。

$Z = U \times V \times K_1 \times \cdots \times K_r$ $K_j \subset \mathbb{R}$ compact

$W=\mathbb{R}^r$ $W^{\mathbb{C}}=\mathbb{C}^r$ とする。すると定義により $u\in\Gamma_Z(U\times V\times W,\mathcal{B}^2)$ に対して $\int_{\mathbb{C}^r}u$ $=\int_{\mathbb{C}_{\tau_1}}\cdots\int_{\mathbb{C}_{\tau_r}}u$ が成り立つ。よって以下 $r=1$ の場合を調べる。

$$\begin{array}{ccccc}
Z=U\times V\times K & \hookrightarrow & U\times V^{\mathbb{C}}\times\mathbb{C}=Y_1 & & \tilde{Z}=U\times V^{\mathbb{C}}\times K\\
p\downarrow & & \downarrow & & \\
G=U\times V & \hookrightarrow & U\times V^{\mathbb{C}}=Y & &
\end{array}$$

$\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$, $\mathcal{U}'=\{U_i\}_{i\in I_0}\subset\mathcal{U}$ を $(Y, Y-G)$ の open covering とし $\tilde{\mathcal{U}}=\{\tilde{U}_{a(i)},\tilde{U}_{u(i)}\}_{i\in I}$ $\tilde{\mathcal{U}}'=\{\tilde{U}_{a(i)}\}_{i\in I_0}\cup\{\tilde{U}_{u(i)}\}_{i\in I}$ ただし $\tilde{U}_{a(i)}=p^{-1}(U_i)$ $\tilde{U}_{u(i)}=p^{-1}(U_i)-\tilde{Z}$ とする。$(\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\mathcal{U}}')$ は $(Y_1, Y_1-\tilde{Z})$ の open covering。このとき Weil の補題による canonical map

$$C: H^{q+1}(C^{\cdot}(\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\mathcal{U}}',(\mathcal{O}\mathcal{O}^{\omega})))\to H^{q+1}(\Gamma_Z(Y_1, C_{N_1}^{(0,1)\phi}|_{\tilde{\Sigma}_1}))$$

$$C: H^{q}(C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{U}',(\mathcal{O})))\to H^{q}(\Gamma_G(Y, C_N^{(0,0)}|_{\tilde{\Sigma}}))$$

がある。これに対して次の命題がある。

命題 2.3.3 (c.f Kashiwara-Kawai [4])
$\varphi\in Z^{q+1}(\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\mathcal{U}}',(\mathcal{O}\mathcal{O}^{\omega}))$ に対し $\int C\varphi=C\psi$

ただし

$$\psi_{i_0\cdots i_q} = \sum_{\nu=0}^{q}(-1)^{\nu+1}\int_\gamma \varphi_{a(i_0)\cdots a(i_\nu)b(i_\nu)\cdots b(i_q)}$$

(γ : Kをまわるcycle)

証明) Weilの補題より $\exists\{\varphi_{q+1}=\varphi, \varphi_q\cdots\varphi_0, u\}$

$\varphi_k \in C^k(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\mathcal{U}}', C_{N_1}^{(0,q-k)(1)}|_{\Delta_1})$ $u \in \Gamma_z(Y_1, C_{N_1}^{(q+1)(1)}|_{\Delta_1})$

s.t. $\delta\varphi_k = \bar\partial\varphi_{k+1}$ $\delta\varphi_q = \varphi$. $\bar\partial\varphi_0 = u$

これから $\psi_k \in C^k(\mathcal{U}, \mathcal{U}', C_{H}^{(0,q-k-1)}|_{\Delta})$ を次のように定義する。

まず $\tilde{\mathcal{V}} = \{V_{a(i)}, V_{b(i)}\}_{i\in I}$ $V_{a(i)} = V_{b(i)} = U_{a(i)}$

$\tilde{\mathcal{V}}' = \{V_{a(i)}\}_{i\in I_0} \cup \{V_{b(i)}\}_{i\in I}$ として各φ_kを $\tilde\varphi_k \in C^k(\tilde{\mathcal{V}}, \tilde{\mathcal{V}}', C_{N_1}^{(0,q-k)(1)}|_{\Delta_1})$

の元に拡張する。("穴"をうめる) そして

$$\psi_{k\, i_0\cdots i_k} = \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu+1}\int_D\{\delta\tilde\varphi_k - \bar\partial\tilde\varphi_{k+1}\}_{a(i_0)\cdots a(i_\nu)b(i_\nu)\cdots b(i_k)}$$

($k=0\cdots q-1$, $D\supset\supset K$ $\gamma=\partial D$) とおく。

これは Kの外で integrand が 0より well defined

<u>claim</u> $\delta\psi_k = \bar\partial\psi_{k+1}$ $(k=0\cdots q-2)$

$\bar\partial\psi_0 = \int u$ $\delta\psi_{q-1} = \psi$

∵ $\bar\partial = \bar\partial_z + \bar\partial_t$ なる分解に従って, $\upsilon \in C_{H_1}^{(0,k)(1)}|_{\Delta_1}$

に対し $\upsilon = \upsilon^t + \upsilon^z$ υ^t: $d\bar t$ ふくむ υ^z: ふくまず

と書くことにすると 定義により $\int_D \upsilon = \int_D \upsilon^t$

さて

$$\bar\partial_z \varphi_{0,i_0} = -\bar\partial_z \int_D \{\delta\tilde\varphi_0 - \bar\partial\tilde\varphi_1\}_{a(i_0)\,l(i_0)}$$
$$= -\bar\partial_z \int_D \{(\delta\tilde\varphi_0)^\tau_{a(i_0)l(i_0)} - (\bar\partial_z \tilde\varphi^\tau_{1\,a(i_0)l(i_0)} + \bar\partial_\tau \tilde\varphi^z_{1\,a(i_0)l(i_0)})\}$$
$$= -\int_D \{\bar\partial(\delta\tilde\varphi_0)_{a(i_0)l(i_0)} - \bar\partial_\tau((\delta\tilde\varphi_0)^z_{a(i_0)l(i_0)} - \bar\partial_z\tilde\varphi^z_{1\,a(i_0)l(i_0)})\}$$

ここで $\bar\partial_z \tilde\varphi^z_{1\,a(i_0)l(i_0)} = (\bar\partial\tilde\varphi_{1\,a(i_0)l(i_0)})^z$ より

Kの外で $(\delta\tilde\varphi_0)^z_{a(i_0)l(i_0)} = \bar\partial_z\tilde\varphi^z_{1\,a(i_0)l(i_0)}$ よって

Stokesの定理より $= -\int_D \bar\partial(\delta\tilde\varphi_0)_{a(i_0)l(i_0)}$

ここで $(\delta\tilde\varphi_0)_{a(i_0)l(i_0)} = \tilde\varphi_{0\,l(i_0)} - \tilde\varphi_{0\,a(i_0)} = -\varphi_{0,a(i_0)}$

$(\tilde\varphi_{0\,l(i_0)} = 0,\ V_{a(i_0)} = U_{a(i_0)})$

$$\therefore\ \bar\partial_z \varphi_{0,i_0} = \int_D \bar\partial\varphi_{0\,a(i_0)} = \int_D u$$

同様にして $q-1 \geq k \geq 1$ のとき

$$\bar\partial_z \varphi_{k,i_0\cdots i_k} = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu+1} \int_D \bar\partial(\delta\varphi_k)_{a(i_0)\cdots a(i_\nu)l(i_\nu)\cdots}$$

がわかる。

あとは $\delta\psi_{k-1}$ であるが、長い単純な計算により

$$(\delta\psi_{k-1})_{i_0\cdots i_k} = \int_D \bar\partial\{\sum(-1)^{\nu+1}(\delta\tilde\varphi_k)_{a(i_0)\cdots a(i_\nu)l(i_\nu)\cdots}\}$$

がいえる。すなわち $1 \leq k \leq q-1$ で claim は ok。

また $k=q$ のとき

$$(\delta\psi_{q-1})_{i_0\cdots i_q} = \int_D \bar\partial_\tau \sum(-1)^{\nu+1}(\delta\varphi_q)_{a(i_0)\cdots a(i_\nu)l(i_\nu)\cdots}$$
$$= \int_{\partial D} \sum(-1)^{\nu+1}(\delta\tilde\varphi_q)_{a(i_0)\cdots}$$
$$= \int_{\partial D} \sum(-1)^{\nu+1}\varphi_{a(i_0)\cdots}$$

(∵ ∂Dの近傍では $\delta\tilde\varphi_q = \delta\varphi_q = \varphi$) //

このclaimは $C\psi = \int u$ を示している。 //

次に 柏原-河合-木村[6]に従って"原始的"な積分の定義を行う。そしてこれら2つの定義が一致することを示す。

補題2.3.4 $U \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$ open proper convex $D \subset \mathbb{C}^q$ convex $\pi : \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q_{(z_1, z')} \to \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^{q-1}_{z'}$

とするとき

$$0 \to \mathcal{CO}_{z'}(U \times \pi(D)) \to \mathcal{CO}(U \times D) \xrightarrow{D_{z_1}} \mathcal{CO}(U \times D) \to 0$$

はexact

証明) $0 \to \pi^{-1}\mathcal{CO}_{z'} \to \mathcal{CO} \xrightarrow{D_{z_1}} \mathcal{CO} \to 0$ より

$0 \to \mathcal{CO}_{z'}(U \times \pi(D)) \to \mathcal{CO}(U \times D) \to \mathcal{CO}(U \times D) \to H^1(U \times D, \pi^{-1}\mathcal{CO}_{z'}) \to$

はexact. $0 \to \pi^{-1}\mathcal{CO}_{z'} \to \pi^{-1}\mathcal{CE}^{(0,0)}_{z'} \to \cdots$ なる

resolutionにおいて、§1の定理1.1.5より

$H^k(U \times D, \pi^{-1}\mathcal{CE}^{(0,\cdot)}_{z'}) = 0 \ (k \geq 1)$ よって

$H^j(U \times D, \pi^{-1}\mathcal{CO}_{z'}) \simeq H^j(\Gamma(U \times D, \pi^{-1}\mathcal{CE}^{(0,\cdot)}_{z'}))$

$= H^j(\Gamma(U \times \pi(D), \mathcal{CE}^{(0,\cdot)}_{z'})) = H^j(U \times \pi(D), \mathcal{CO}_{z'}) = 0$

$(j \geq 1)$ よって主張はOK //

系 1) $U\subset\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$ open proper convex $\Omega\subset\mathbb{R}^q$ open

$\Rightarrow D_{x_1}\mathcal{B}^2(U\times\Omega)=\mathcal{B}^2(U\times\Omega)$

2) $\Omega_1\times\Omega_2\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{q-1}$ $\Omega_1=(a,b)$ $\Omega_2=$ open

$u\in\mathcal{B}^2(\Omega_1\times\Omega_2)$ で $D_{x_1}u=0\Rightarrow\exists!\,v\in\mathcal{B}^2(\Omega_2)$

$u(p^*,x)=v(p^*,x')$

:) $\mathcal{B}^2$のflabbynessより $\Omega=\mathbb{R}^q$としてよい

$u\in\mathcal{B}^2(U\times\mathbb{R}^q)$とすると $u=\sum b_{\Gamma_j}(\varphi_j)$

$\varphi_j\in C\mathcal{O}(U\times(\mathbb{R}^q+i\Gamma_j))$ Γ_j: open convex cone

とかける。補題より $\varphi_j=D_{x_1}\overset{\exists}{\psi_j}$ が同じdomain

より $u=D_{x_1}\sum b_{\Gamma_j}(\psi_j)$. //

2) 上と同様にもできるし、また、

$0\to p^{-1}\mathcal{B}^2_{\Delta'}\hookrightarrow\mathcal{B}^2_{\Delta}\xrightarrow{D_{x_1}}\mathcal{B}^2_{\Delta}\to 0$ (exact)

からもいえる。 //

定義 $u(p^*,x,t)\in\Gamma_{U\times V\times K}(U\times V\times\mathbb{R},\mathcal{B}^2)$

$K=[a,b]\subset\mathbb{R}$ とする。 p^*について localize して

$u(p^*,x,t)=D_t v(p^*,x,t)$ なる vが存在する。

$U\times V\times(-\infty,a)$ 上で $D_t v=0$ より $v=v_1(p^*,x)$

同様に $U\times V\times(b,\infty)$ 上で $v=v_2(p^*,x)$ とかける。

そこで $\int_{\mathbb{R}} u\, dt = U_2(p^*, x) - U_1(p^*, x)$ と定義する。これが well defined であることは上の補題の系よりわかる。多変数の場合は反復積分で定義できる。

命題 2.3.6 上の2つの定義は一致する。(符号は除く)

証明) fibre の次元が1のときについていえば十分。

$U \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$ open proper convex $V \subset \mathbb{R}^q$ open convex

$V^{\mathbb{C}} = V + i\mathbb{R}^q$ $\quad K = [a, b] \Subset [a_1, b_1] \subset \mathbb{R}$

$(U \times V^{\mathbb{C}}, U \times (V^{\mathbb{C}} - V))$ の open covering $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ を

$\mathcal{U} = \{W_0, W_{1\pm} \cdots W_{q\pm}\}$: $W_0 = U \times V^{\mathbb{C}}$.

$W_{j\pm} = U \times (V + i\{\pm y_j > 0\})$

$\mathcal{U}' = \{W_{1\pm} \cdots W_{q\pm}\}$ と定める。これによって induce される $(U \times V^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}, U \times V^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C} - U \times V \times K)$ の covering $(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\mathcal{U}}')$ は

$\tilde{\mathcal{U}} = \{U_{a(0)}\ U_{a(1\pm)} \cdots U_{a(q\pm)}\} \cup \{U_{b(0)} \cdots U_{b(q\pm)}\}$

$\tilde{\mathcal{U}}' = \tilde{\mathcal{U}} - \{U_{a(0)}\}$ $\quad (U_{a(\cdot)} = p^{-1}W.\ U_{b(\cdot)} = U_{a(\cdot)} - U \times V \times K)$

さらに $(U \times V^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}, U \times V \times \mathbb{R})$ の covering $(\tilde{\tilde{\mathcal{U}}}, \tilde{\tilde{\mathcal{U}}}')$ を

$\tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{U}_0, \tilde{U}_{1\pm} \cdots \tilde{U}_{q+1\pm}\}$ $\quad \tilde{\mathcal{U}}' = \tilde{\mathcal{U}} - \{\tilde{U}_0\}$

$(\tilde{U}_0 = U_{a(0)} \cdots \tilde{U}_{q\pm} = U_{a(q\pm)} \quad \tilde{U}_{q+1\pm} = W_0 \times \{\pm \mathrm{Im}\,\tau > 0\})$

とする。するとこれらはすべて Leray covering であって

$\tilde{U}_\cdot = U_{a(\cdot)} \quad (\cdot \neq q+1\pm) \quad \tilde{U}_{q+1\pm} \subset U_{b(0)}$ より

次は可換 ：

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow H^{q+1}_{U\times V\times K}(U\times V^q\times \mathbb{C}, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H^{q+1}_{U\times V\times \mathbb{R}}(U\times V^q\times \mathbb{C}, \mathcal{O}) \\ \wr\uparrow c & & \wr\uparrow c \\ H^{q+1}(C^\cdot(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\mathcal{U}}'; \mathcal{O})) & \longrightarrow & H^{q+1}(C^\cdot(\tilde{\tilde{\mathcal{U}}}, \tilde{\tilde{\mathcal{U}}}'; \mathcal{O})) \\ [\varphi] & \longmapsto & [h\varphi] \end{array}$$

ただし $(h\varphi)_{0,1\varepsilon_1\cdots q+1\,\varepsilon_{q+1}} = \varphi_{a(0)\cdots a(q,\varepsilon_q)\,b(0)}\big|_{\varepsilon_{q+1}\mathrm{Im}\,\tau>0}$

よって $u = [h\varphi]$ の境界値表示 は

$$\sum_{\varepsilon=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{q+1})} \mathrm{sgn}\,\varepsilon\; b\left(\varphi_{a(0)\cdots a(q\varepsilon_q)\,b(0)}\big|_{\varepsilon_{q+1}\mathrm{Im}\,\tau>0}\right)$$

今 $\tilde{\varphi}_{0,1\varepsilon_1\cdots q\varepsilon_{q+1}} = \int_{a_1}^{\tau} \varphi_{a(0)\cdots b(0)}\,d\tau$ (~~積分~~路は $\varepsilon_{q+1}\mathrm{Im}\,\tau>0$ を通る ; well defined) とおくと $D_\tau\tilde{\varphi} = \varphi$ より

$u = D_\tau \sum_{\varepsilon} \mathrm{sgn}\,\varepsilon\; b(\tilde{\varphi}_{0,1\varepsilon_1\cdots q+1\,\varepsilon_{q+1}}) = D_\tau v$

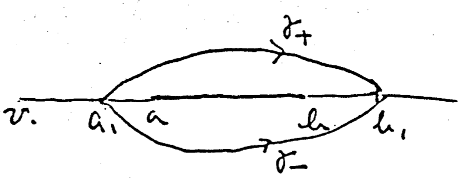
ここで $\mathrm{Im}\,\tau < a$ 上で $\tilde{\varphi}_{0,1\varepsilon_1\cdots q\varepsilon_q} = \int_{a_1}^{\tau} \varphi_{a(0)\cdots b(0)}\,d\tau$

は well defined で $\tilde{\varphi}_{0,1\varepsilon_1\cdots q\varepsilon_q}\big|_{\varepsilon_{q+1}\mathrm{Im}\,\tau>0} = \tilde{\varphi}_{0,1\varepsilon_1\cdots q+1\,\varepsilon_{q+1}}$

より $v = 0$ on $U\times V\times(-\infty, a)$.

また $\mathrm{Im}\,\tau > b$ 上で

$\tilde{\tilde{\varphi}}_{0,1\varepsilon_1\cdots q\varepsilon_q} = \int_{b_1}^{\tau} \varphi_{a(0)\cdots}$ は well defined で



$\tilde{\varphi}_{0,1\varepsilon_1\cdots q\varepsilon_q\,q+1\pm} = \int_{\gamma_\pm} \varphi_{a(0)\cdots} + \tilde{\tilde{\varphi}}_{0,1\varepsilon_1\cdots q\varepsilon_q}$ より

$$\upsilon = \sum_{\varepsilon=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_q)} \operatorname{sgn}\varepsilon\, b\left(\int_\gamma \varphi_{a(0)a(1\varepsilon_1)\cdots l(0)}\right) \text{ on } \nabla X\nabla X(l,\infty)$$

よって第2の定義では

$$\int u = \sum_\varepsilon \operatorname{sgn}\varepsilon\, b\left(\int_\gamma \varphi_{a(0)\cdots l(0)}\right) \quad \text{---} (*)$$

一方最初の定義によれば

$$\int u = \sum_{\varepsilon=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_q)} \operatorname{sgn}\varepsilon\, b\left(\sum_{r=0}^{q}(-1)^{r+1}\int_\gamma \varphi_{a(0)\cdots a(r\varepsilon_r)l(r\varepsilon_r)\cdots}\right)$$

ここで φ が cocycle より

$0=(\delta\varphi)_{a(0)\cdots a(q\varepsilon_q)l(q\varepsilon_q)l(0)}$ よって

$$\varphi_{a(0)\cdots a(q\varepsilon_q)l(0)} = \varphi_{a(0)\cdots a(q\varepsilon_q)l(q\varepsilon_q)}$$
$$+(-1)^q\sum_{l=1}^{q}(-1)^l\varphi_{a(0)\cdots \check{a}(l\varepsilon_l)\cdots a(q\varepsilon_q)l(q\varepsilon_q)l(0)}$$

$$\therefore (*) = \sum \operatorname{sgn}\varepsilon\, b\left(\int_\gamma \varphi_{a(0)\cdots a(q\varepsilon_q)l(q\varepsilon_q)}\right)$$
$$+\sum \operatorname{sgn}\varepsilon\, b\left(\int_\gamma \varphi_{a(0)\cdots a(q-1\,\varepsilon_{q-1})l(q\varepsilon_q)l(0)}\right)$$

以下 inductive に $=(-1)^{q+1}\sum \operatorname{sgn}\varepsilon\, b\Big(\sum_{r=0}^{q}(-1)^{r+1}\times$

$\int_\gamma \varphi_{a(0)\cdots a(r\varepsilon_r)l(r\varepsilon_r)\cdots}\Big)$ がいえる。

（番号がぬけているものが，±でうち消し合う。）//

以上で第2の定義が正当化された。すなわち第2の定義が座標不変であることがわかった。

次に $SS^2\int u$ の評価を与える。

命題2.3.6 $u(p^*, x, t) \in \Gamma_{U\times V\times K}(U\times V\times \mathbb{R}^n, \mathcal{B}^2)$

とすると $SS^2\int_{\mathbb{R}^r} u \subset p(SS^2 u \cap \underbrace{(\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r)}_{L})$

証明) $r=1$ について次をいえば十分

claim $sp\, u(p^*, x, t) = 0$ on $\{(p^*, x, t; \sqrt{-1}(\xi dx + 0dt)\infty)$; $p^* \in U_0$, $x \in V_0$, $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in W_0\} \Rightarrow sp\int u = 0$ on $U_0 \times V_0 \times W_0$

証明) 次の exact sequence がある:

$$0 \to \sigma^{-1} C^2_{\Lambda'} \hookrightarrow C^2_{\Lambda}|_L \xrightarrow{D_t} C^2_{\Lambda}|_L \to 0$$

$(\sigma : L \to \Lambda' = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q)$

より $0 \to C^2_{\Lambda'}(U_0 \times V_0 \times \sqrt{-1}W_0) \to C^2_{\Lambda}(U_0 \times V_0 \times \mathbb{R} \times \sqrt{-1}W_0) \xrightarrow{D_t}$

おいて $u = D_t v$ のとき $U_0 \times V_0 \times \mathbb{R} \times \sqrt{-1}W_0$ 上

$0 = sp(u) = D_t\, sp(v)$ より $sp(v) = {}^{\exists}w(p^*, x)$

on $U_0 \times V_0 \times \mathbb{R} \times \sqrt{-1}W_0$ おいて

$sp\int u = sp(v_2 - v_1) = w - w = 0$ //

4° その他

$\int u(p^*, x, t)\delta(t-y)\,dt = u(p^*, x, y)$ をいう

ために、次の補題を準備する。

補題 2.3.7. $u(p^*, x, t) \in \mathcal{B}^2(U^p \times V^q \times W^r)$ $S.S^2 u \cap \{(p^*, x, t, \sqrt{-1}(0dx + S^{r-1}dt)\infty\,;\ (p^*, x, t) \in U \times V \times W\} = \phi$ とする。このとき $u(p^*, x, 0) = u(p^*, x, t)|_{t=0}$, $u(p^*, x, t)\delta(t)$ が定義されるが、実は

$$u(p^*, x, t)\delta(t) = u(p^*, x, 0)\delta(t)$$

証明) (p^*, x) について localize し、また t は 0 の相対 compact 近傍を動くとしてよい。このとき

$\exists F_j \in \mathcal{CO}(U_0 \times (V_0 \times D + i(\Gamma_j \cap B_\varepsilon)))$

s.t. $\Gamma_j^\circ \cap \{0\} \times S^{r-1} = \phi$ $u = \sum b_{\Gamma_j}(F_j)$

on $U_0 \times V_0 \times D$

ここで $0 \to \mathcal{CO} \xrightarrow{\tau\cdot} \mathcal{CO} \xrightarrow{\tau=0} \mathcal{CO} \to 0$

なる exact sequence を反復適用して

$$F_j = F_j(p^*, z, 0) + \sum \tau_k F_{jk}(p^*, z, \tau)$$

とかける。おいて

$$u = \sum b(F_j(p^*, z, 0)) + \sum u_k t_k$$

$S.S^2 u_k$ も u と同じ条件をみたすから

$u_k \cdot \delta(t)$ は well defined で t_k は real analytic

より $(u_k t_k)\delta(t) = u_k(t_k \delta(t)) = 0$

$\therefore\ u\delta(t) = u|_{t=0}\,\delta(t)$ //

これによれば　$u(p^*, x, t)\delta(t-y)$
$= u(p^*, x, y)\,\delta(t-y)$ がわかるから

$$\int u(p^*, x, t)\,\delta(t-y)\,dt = \int u(p^*, x, y)\,\delta(t-y)\,dt$$
$$= u(p^*, x, y)\int \delta(t-y)\,dt \quad (\text{積分の定義})$$
$$= u(p^*, x, y)$$
となる。

5° 応用

以上の演算の応用の一つとして次の定理を示す。

定理2.3.8 (microlocal Holmgren Theorem; Kashiwara-Laurent [7] Théorème 4.2.3 の Special case)

$\Delta = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \supset \{p_0^*\} \times \mathbb{R}^q = S \ni p_0$

$f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ real analytic $df(p_0) \neq 0$

p_0^* を $(p_0^*, x, \pm\sqrt{-1}df(p_0)\infty) \in S \times_\Delta \tilde{\Delta}$ の一方とする。

$Z = \{p \in S \ f(p) \geq 0\}$ 　このとき

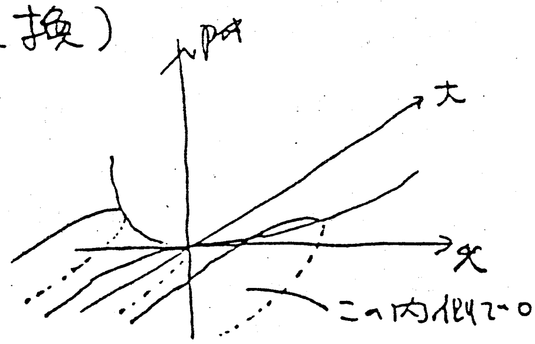
$0 \to \Gamma_Z(\mathcal{B}^2_\Delta|_S)_{p_0} \to \mathcal{C}^2_{\Delta, p_0^*}$ exact

証明) 方針は金子[3]に従う。$\mathbb{R}^q$ 上の

座標変換により $\mathbb{R}^q=\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^{q-1}_x$ $f(t,x)=t-x^2$

$P_0=(p_0^*,0,0)$ $P_0^*=(p_0^*,0,0,\sqrt{-1}dt\infty)$

としてよい (Holmgren 変換)



$u\in\Gamma_Z(\mathcal{B}^2_\Lambda|_S)_{P_0}$

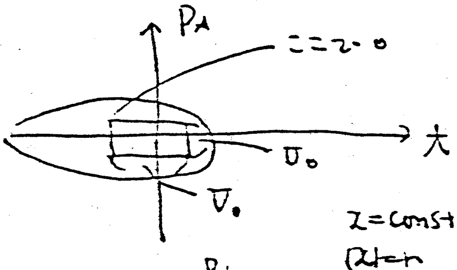
$SP(u)_{P_0^*}=0$ とする。

$\tilde{u}\in\mathcal{B}^2_\Lambda(U\times V\times W)$

$(U\times V\times W\ni(p_0^*,0,0))$ で

$(S-Z)\cap U\times V\times W$ 上で $u=0$ としてよい。

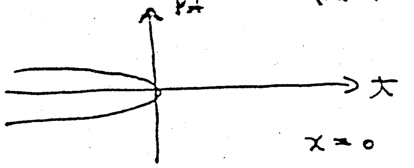
ここで $r>0$ を $\{|x|=r\}\subset W$ と選ぶと



$p_0^*\in{}^\exists U_0\subset U$, $0\in{}^\exists V_0\subset V$

s.t. $U_0\times V_0\times\{|x|=r\}$ 上で $u=0$

あってはじめから



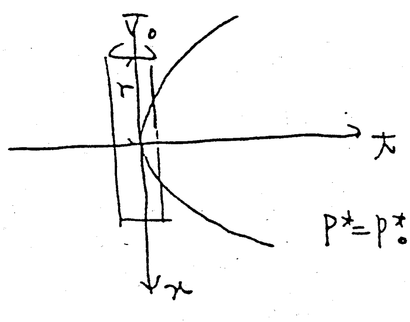
$u\in\mathcal{B}^2_\Lambda(U_0\times V_0\times\mathbb{R}^{q-1}_x)$

supp u は x について compact

$\{(p^*,t,x);\ p^*=p_0^*,\ t=0,\ x\neq0\}$

$\cup\{(p^*,t,x);\ p^*=p_0^*,\ t<0\}$

で 0 としてよい。



さらに $SP(u)_{P_0^*}=0$ より

$SP(u)$ は $\{(p^*,t,x,\sqrt{-1}(dt+\xi dx)\infty);\ p^*\in{}^\exists U_1,\ |t|<{}^\exists\varepsilon$

$x\in\mathbb{R}^q,\ |\xi|<\varepsilon\}$ で 0 としてよい。$(U_1\subset U_0)$

さて. $f(x) = \sum_\sigma b_{\Gamma_\sigma}(W_\sigma(z)) \underset{\text{def}}{=} \sum W_\sigma(x)$

($W_\sigma(z) = \frac{1}{(-2\pi i)^{q-1}} \frac{\operatorname{sgn}\sigma}{z_1 \cdots z_{q-1}}$) とかけていて

$SS\, W_\sigma(x) = \{(x, \sqrt{-1}\xi dx\infty),\ \xi \in \Gamma_\sigma^\circ\}$

$f_\sigma(p^*, t, x) \underset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^{q-1}} f(p^*, t, u) W_\sigma(x-u)\, du$

とおく。これは $U_0 \times V_0 \times \mathbb{R}^{q-1}$ で well defined

すると 積. 積分の SS^2 の評価より

$SS^2 f_\sigma \subset \{(p^*, t, x, \sqrt{-1}(a\,dt + \xi dx)\infty ;$

$\exists u.\ (p^*, t, u, \sqrt{-1}(a, \xi)\infty \in SS^2 f.\ \xi \in \Gamma_\sigma^\circ\}.$

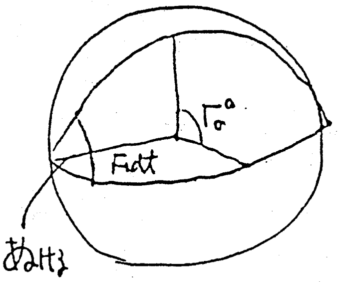
($\xi = 0$ も許す).

ここで上でのべたことより $A = U_1 \times \{|t| < \varepsilon\} \times \mathbb{R}^{q-1}$ 上では

$(\sqrt{-1}dt + \xi dx)\infty\ (|\xi| < \varepsilon)$ がぬける。

$\therefore\ SS^2(f_\sigma|_A) \subset \{(p^*, t, x ; \sqrt{-1}(a\,dt + \xi dx)\infty . (a, \xi) \in \tilde{\Gamma}_\sigma^\circ\}$

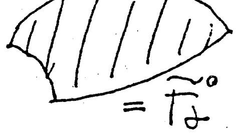
$\tilde{\Gamma}_\sigma$: proper convex in $\mathbb{R}^{q+1}$



よって $0 \to \tilde{\mathcal{A}}^2 \to \tau^{-1}\mathcal{B}^2 \to \pi_*\tau^{-1}\mathcal{C}^2 \to 0$

より $f_\sigma|_A = b(\tilde{G}_\sigma(p^*, \tau, z))$

$G_\sigma \in \Gamma(\mathcal{O}((U_1 \times [\{|t| < \varepsilon\} \times \mathbb{R}^{q-1} + i\tilde{\Gamma}_\sigma])\circ)$



ここで $\forall t < 0$, $\exists\, U_t \times V_t \ni (p_0^*, t)$

s.t. $f = 0$ on $U_t \times V_t \times \mathbb{R}^{q-1}$

よって $f_\sigma = 0$ on $U_t \times V_t \times \mathbb{R}^{q-1}$ 由十分小

$\Rightarrow V_t \subset \{|t| < \varepsilon\}$ ととれるから

$b(G_\sigma)|_{U_* \times V_* \times \mathbb{R}^{q-1}} = 0$ 　 b の injectivity より $G_\sigma = 0$ on $U_* \times V_* \times \mathbb{R}^{q-1}$ の fibre よって $C\mathcal{O}$ に対する解析接続の一意性により $G_\sigma = 0$ on $U_* \times \{|t| < \varepsilon\} \times \mathbb{R}^{q-1}$ の fibre

$\therefore f_\sigma|_{U_* \times \{|t|<\varepsilon\} \times \mathbb{R}^{q-1}} = b(G_\sigma) = 0$

$\therefore 0 = \sum_\sigma f_\sigma = f \underset{x}{*} \delta = f$ on $U_* \times \{|t|<\varepsilon\} \times \mathbb{R}^{q-1}$

最後の集合は p_0 の近傍である。 //

<u>Remark</u> 定理の最初にも書いたとおり，この定理は Kashiwara-Laurent [7] に述べられている次の定理：

定理 　 $\Lambda \subset \sqrt{-1}T^*M$ homogeneous involutory submanifold, $x_0 \in \Lambda$ 　 S_{x_0} : x_0 を通る，Λ の bicharacteristic leaf とし，$f : S_{x_0} \to \mathbb{R}$ を x_0 の近傍で定義された real analytic map で $f(x_0) = 0$, $df(x_0) \neq 0$ なるものとし，x_0^* を $(x_0, \pm\sqrt{-1}df(x_0))$ の一方とする。$x_0^* \in \sqrt{-1}T^*S_{x_0} \simeq (T^*_\Lambda \tilde{\Lambda}) \underset{\Lambda}{\times} S_{x_0}$

$Z = \{x \in S_{x_0} \,;\, f(x) \geq 0\}$ とする。このとき

$$0 \to \Gamma_Z(\mathcal{B}^2_\Lambda|_{S_{x_0}})_{x_0} \to \mathcal{C}^2_{\Lambda, x_0^*} \quad \text{exact}$$

のspecial caseである。上記論文においては，まずΛを1変数ふやしてregular involutoryにしたのち，それを，quantized canonical transformationによって標準形$\Lambda \simeq iS^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$に写すことができることが示されていて，結局上のspecial caseに帰着されるのであるが，上記論文においてはそのあとpurely cohomological methodを用いてやや弱い形を証明し，あとはgeometricalな方法で上の結果を得ている。ここでは，別証明として昔ながらの直観的な証明を試みてみた。

系　同じ条件のもとで　$0 \to \Gamma_{\Sigma}(\mathcal{C}_M|_{S_\Sigma})_{z_0} \to \mathcal{C}^2_{\Lambda, z_0^*}$
(exact)

この系の弱形は Bony [13] において既に用いられ，また schapira によって propagation of singularities にも用いられている。(c.f. Kashiwara-Laurent [7], Grigis, Schapira, Sjöstrand [14])

さらに，次の命題がいえる。

命題 2.3.9.（c.f. 柏原-河合-木村[6]，金子[13]）

$\Lambda = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \quad \Lambda_1 = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{S}^{q-1}$

とする。（$\Lambda_1 \simeq S^*_\Lambda \tilde{\Lambda}$）　このとき Λ_1 上の

sheaf homomorphisms $\Phi : C^2_\Lambda \to \mathcal{B}^2_{\Lambda_1}/\mathcal{a}^2_{\Lambda_1}$

$\Psi : \mathcal{B}^2_{\Lambda_1}/\mathcal{a}^2_{\Lambda_1} \to C^2_\Lambda$ があって，

$\Psi \circ \Phi = \mathrm{id} : C^2_\Lambda \to C^2_\Lambda$ を満たす。

証明は，柏原による C の flabbyness の証明で用いられた積分核を用いて全く同様になされる。（具体的な証明は，C^2_Λ の積分をまだ定義していないので，金子[13]の定理 4.6.5 の証明の方針にそってなされる。）

系　$K \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$: compact proper convex

$W \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q$: compact　とすると

$\forall u \in \Gamma(K \times W, C^2_\Lambda)$，$\exists \tilde{u} \in \Gamma(S^*_\Lambda \tilde{\Lambda}, C^2_\Lambda)$

s.t. $\tilde{u}|_{K\times W} = u$，かつ $\forall L \times V \subset S^*_\Lambda \tilde{\Lambda}$

（$L \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$: 相対 compact proper convex $V \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q$ 相対 compact）に対し，$\exists\, v \in \Gamma(L \times \pi(V), \mathcal{B}^2_\Lambda)$

s.t. $\hat{u} = sp(u)$

証明) $u \in \Gamma(K\times\overline{W}, \mathcal{C}^2_\Lambda) \Rightarrow \Phi u \in \Gamma(K\times\overline{W}, \mathcal{B}^2_{\Delta_1}/\mathcal{a}^2_{\Delta_1})$

ここで

$$0 \to \mathcal{a}^2_{\Delta_1} \to \mathcal{B}^2_{\Delta_1} \to \mathcal{B}^2_{\Delta_1}/\mathcal{a}^2_{\Delta_1} \to 0$$

で、$H^1(K\times\overline{W}, \mathcal{a}^2_{\Delta_1}) = \varinjlim_{U\times\Omega\supset K\times\overline{W}} H^1(U\times\Omega, \mathcal{C}\mathcal{O})$
$=0$ (∵) $U\subset\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$ は proper convex open, Ω : $\overline{W}$ の複素近傍は Stein としてよい) より

$$0\to\Gamma(K\times\overline{W}, \mathcal{a}^2_{\Delta_1})\to\Gamma(K\times\overline{W}, \mathcal{B}^2_{\Delta_1})\to\Gamma(K\times\overline{W}, \mathcal{B}^2_{\Delta_1}/\mathcal{a}^2_{\Delta_1})\to 0$$

あとは、$\mathcal{B}^2_{\Delta_1}$ の flabbyness と、Φ, Ψ が sheaf homomorphism であることから第1の主張はOK。第2の主張は

$$0\to\mathcal{a}^2_\Lambda\to\mathcal{B}^2_\Lambda\to\pi_*\mathcal{C}^2_\Lambda\to 0$$

と、$\mathcal{a}^2_\Lambda$ に対する上と同じ消滅定理によりOK。//

この系は、flabbyness, softness とはほど遠いものであるが、少くとも上の形の直積型 compact の上では $\mathcal{C}^2_\Lambda$ の元を $\mathcal{B}^2_\Lambda$ の元で代表させることができて、積分等も直観的に定義できることや、$\mathcal{C}^2_\Lambda$ について、$\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$ 変数に関して support を compact に

cut できること等が言える。

文 献

[1] Andreotti-Grauert : Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France. 90 (1962)

[2] Douady : Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires Astérisque 16 (1974)

[3] 金子晃 : 超函数入門 上, 下 東京大学出版会. (上 : 1980, 下 : 1982)

[4] Kashiwara : Cours à paris-Nord (1978)

[5] Kashiwara-Kawai : On holonomic systems of Microdifferential equations III Publ. RIMS. kyoto. Univ. 17. No.3. (1981)

[6] 柏原-河合-木村 : 代数解析学の基礎 紀伊國屋書店 (1980)

[7] Kashiwara-Laurent : Théorèmes d'annulation et deuxième microlocalisation Paris-Sud. ORSAY : Pre print

[8] Kataoka : On the theory of Radon transformations of hyperfunctions

J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA 28. No2. (1981)

[9] 小松彦三郎：佐藤の超函数と定数係数線形偏微分方程式
東大セミナリーノート 22 (1968)

[10] ――――：グロタンディク空間と核定理
上智大学数学講究録 No 9. (1981)

[11] 森本光生：佐藤超函数入門
共立出版 (1976)

[12] Sato-Kawai-Kashiwara (S-K-K) : Microfunctions and Pseudodifferential equations
Lecture Notes in Math 287. Springer (1973)

[13] Bony : Extensions du théorème de Holmgren
Séminaire Goulaouic-Schwartz (1975-1976)

[14] Grigis-Schapira-Sjöstrand : propagation de singularités analytiques pour des opérateurs à caractéristiques multiples
Note aux C.R.A.S, Paris, 353 (1981) Série I