数理解析研究所講究録
第576巻 1985年 1-9

複素Lie群の余体積有限部分群

九大理 岩元 隆 (Takashi Iwamoto)

1. Gを連結なLie群, Hをその閉部分群とする。G/HがGの自然な作用で不変な体積要素をもち、それに関してG/Hが体積有限な時、Hは余体積有限であるという。また、G/Hがcompactの時Hは一様であるという。一般には、余体積有限であれば、一様であるとも、一様であれば余体積有限であるともいえない。

さて、特に離散な余体積有限部分群を格子群といい、離散な一様部分群を一様格子群という。一様格子群は常に、格子群である。格子群, 特に半単純Lie群における格子群については、Mostow, Margulis の剛性定理に代表される、様々な興味深い結果が得られている [1, 2]。

一方, 一般の余体積有限群, 一様部分群についてはあまり研究の手掛りがないようである [3]。ここでは、複素Lie群の余体積有限部分群, 一様部分群について述べたいと思う。

2．複素Lie群の（必ずしも複素部分群ではない）余体積有限部分群には次の著しい性質がある。

（2-1）　Gを$GL(n,\mathbb{C})$の複素連結Lie部分群，HをGの余体積有限部分群とする。$\mathbb{C}^n$の$\mathbb{C}$-線型部分空間Wは，H-不変ならば，G-不変である。

この命題は、初等的に証明できるが少々繁雑であるので[4]，ここでは別証を記す。かってな部分群$A<GL(n,\mathbb{C})$に対して、A_0はAの単位元の連結成分，$A^\#$はAのZariski閉包を示す。

（2-1）の証明。　$G^\#=H^\#$を示せば十分である。まずGは連結である事からGは$G^\#$の中の正規部分群である事に注意する。$(H^\#)_0$は$H^\#$のZariski連結成分に一致するから，$[H^\#;(H^\#)_0]<+\infty$である。従って$[G\cap H^\#;G\cap(H^\#)_0]<+\infty$であり、かつ$H<G\cap H^\#$であるから$G\cap(H^\#)_0$は$G$で余体積有限である。よって$(H^\#)_0$は$G\cdot(H^\#)_0$で余体積有限である。従ってMostow [5]によって，$G\cdot(H^\#)_0/(H^\#)_0$はcompactである。ここで$G\cdot(H^\#)_0$の極大compact群をK，KのLie環を$\hat{K}$，$\hat{K}$の$\mathbb{C}$-線型包を$\hat{K}_{\mathbb{C}}$，$\hat{K}_{\mathbb{C}}$に対応する複素Lie群を$K_{\mathbb{C}}$とする。$K_{\mathbb{C}}$は$\mathbb{C}$-代数群である。$G\cdot(H^\#)_0/(H^\#)_0$はcompactであったから，Goto-Wang [3]によって$G\cdot(H^\#)_0=K\cdot(H^\#)_0$である。ここで，

$$G \cdot H^{\#} = G \cdot (H^{\#})_0 \cdot H^{\#} = K \cdot (H^{\#})_0 \cdot H^{\#} = K \cdot H^{\#} = K_{\mathbb{C}} \cdot H^{\#}$$

であるから、$G \cdot H^{\#}$ は G を含む $\mathbb{C}$-代数群である。よって、$G^{\#} = G \cdot H^{\#}$ つまり $G^{\#} = K \cdot H^{\#}$ を得る。$[H^{\#} ; (H^{\#})_0] < +\infty$ であったから $G^{\#} = K \cdot (H^{\#})_0$ である。Mostow [5] によれば $(H^{\#})_0$ は $G^{\#}$ の半単純群を全て含む。また、S. P. Wang [6] によれば $(H^{\#})_0$ は $G^{\#}$ の代数的 torus と中単部分群を全て含む。よって $G^{\#} = H^{\#}$ である。 Q. E. D.

3. G を連結複素 Lie 群，H を G の複素余体積有限部分群とする。$\hat{G}$，$\hat{H}$ で、G，H の Lie 環を表わし，$\hat{G}$ 上の随伴表現を Ad で表わすものとする。Ad H は AdG の中で余体積有限で、$\mathrm{Ad}H \cdot \hat{H} = \hat{H}$ であるから、(2-1) によって $\mathrm{Ad}G \cdot \hat{H} = \hat{H}$ である。つまり H の単位元の成分 H_0 は G の正規部分群である。

(3-1) G を連結な複素 Lie 群，H を G の複素余体積有限部分群とする。この時 H の単位元の成分は G の正規部分群である。

この事から、G，H の代わりに、G/H_0，H/H_0 を考えれば、余体積有限部分群の構造は、G/H_0 の格子群 H/H_0 に帰着される事がわかる。

4．単連結な複素 Lie 群の連結な一様複素部分群は、H. C. Wang [7] によって完全に分類されている。同様の問題を余体積有限部分群について考えてみる。すなわち、G を単連結な複素 Lie 群，H を G の連結な複素余体積有限部分群とする。(3-1)によって H は G の正規部分群であるから、G/H は複素 Lie 群であり、かつその Haar 測度は有限である。よって G/H は compact な複素 Lie 群であるから torus でなくてはならない。一方 G/H は単連結でなくてはならないから、$G=H$ である。

(4-1) G を単連結な複素 Lie 群とする。G の連結な複素余体積部分群は G 自身しかない。

又、さらに議論を精密に行えば次を得る。

(4-2) G をその根基が単連結な複素 Lie 群とする。G の連結な余体積有限群は G 自身しかない。

ここで、(4-2)において、余体積有限群を必ずしも複素部分群には限っていない事に注意する。

5．(2-1) の応用をもう一つだけ述べる。一般に、G を単連結で、compact 群を含まない Lie 群とし、H をその格子群とした時、G の自己同型 α, β が H の上で一致すれば、G 上で一致するだろうか。例えば、G が compact factor を持たな

い半単純群、或いは、巾零群であれば、α と β が一致する事が知られている。実は、単連結可解Lie群で反例があるのである［8］。ところが、複素Lie群の範ちゅうでは、答は、肯定的である。すなわち、

（5-1）　G を単連結複素Lie群、H をその格子群とする。G の複素解析的自己同型 α, β は、H の上で一致すれば、G 上で一致する。

証明。$\alpha \circ \beta^{-1} = \varphi$ とおき、φ に対応するLie環の自己同型を $d\varphi$ とする。G のLie環を $\hat{G}$ とし、$gl(\hat{G})$ 上の G の表現 f を、$g \in G$ に対して

$$f(g) : gl(\hat{G}) \ni A \longmapsto Ad(g) \cdot A \in gl(\hat{G})$$

で定義する。$Ad(H)$ の $gl(\hat{G})$ での $\mathbb{C}$-線型包を W とする。$f(H)W = W$ であり、$f(H)$ は $f(G)$ の中で余体積有限だから (2-1) によって $f(G)W = W$ である。W は $\hat{G}$ の恒等写像 I を含むから、$g \in G$ に対して

$$Ad(g) = Ad(g) \cdot I = f(g)(I) \in f(G)W = W \quad 。$$

つまり、$Ad(G)$ の元は常に $Ad(H)$ の元の線型結合である。一方、$h \in H$ に対して仮定より $Ad(h) \circ d\varphi = d\varphi \circ Ad(h)$ であるから、$g \in G$ に対して $Ad(g) \circ d\varphi = d\varphi \circ Ad(g)$ を得る。つまり $g \in G$ に対して $\varphi(g)g^{-1}$ は G の中心に含まれる。ここで、$a : G \ni g \longmapsto \varphi(g)g^{-1} \in G$ を考えれば、a は G から G の

中心の単位元の成分への準同型で、$a(H)$は単位元である。よって$a(G)$はHaar測度有限でcompactでなくてはならない。一方、Gの中心の単位元成分はvector群であるから、$a(G)$は単位元でなくてはならない。これでφが恒等写像である事、すなわち、$\alpha=\beta$が示された。 Q.E.D.

6．一方、複素Lie群の一様複素部分群については余体積有限部分群程、事情は簡単ではないし、不明な点も多い。例えば、Gを複素連結Lie群、Hをその一様複素部分群とした時、Hの単位元の成分H_0は必しもGの正規部分群ではない。この点に関しては次が成り立つ。

(6-1) Gを複素連結Lie群、Hをその複素一様部分群とする。Hがunimodularならば、H_0はGの正規部分群である。

ここに、Lie群Hがunimodularであるとは、その随伴表現の行列式が常に1である事である。(6-1)の証明は、かなり面倒なので割愛する。さらに、G自身がunimodularならば(6-1)からただちに次を得る。

(6-2) Gをunimodularな複素連結Lie群、HをGの一様複素部分群とする。この時、次の(1)～(3)は同値である。

(1) Hはunimodularである。

(2) H_0はGの正規部分群である。

(3) Hは余体積有限である。

7. unimodularな単連結複素Lie群の一様複素部分群の構造は、(6-2)と使って可解複素Lie群の格子群と半単純複素Lie群の複素一様部分群の構造に帰着できる事が、つい最近わかった。しかし、unimodularの仮定は本質的で、とり払えないように思う。尚、半単純Lie群の複素一様部分群については、Goto-Wang [3] と全く同様のprogramで一様格子群の構造に帰着できる。

参考文献

[1] M. S. Raghunathan, Discrete subgroups of Lie groups, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (1972)

[2] D. V. Alekseevski, Lie groups, Itogi Nauki i Tekhniki, Seriya Algebra, Topologiya, Geometriya, Vol. 20, 153-192 (1982)

[3] M. Goto and H. C. Wang, Non-discrete uniform subgroups of semisimple Lie groups, Math. Ann. Vol. 198, 259-286 (1972)

[4] T. Iwamoto, Density properties of complex Lie groups, to appear.

[5] G. D. Mostow, Homogeneous spaces of finite invariant measure, Ann. of Math. Vol. 75, 17-37 (1962)

[6] S. P. Wang, On density properties of S-subgroups of locally compact groups, Ann. of Math. Vol. 94, 325-329 (1971)

[7] H. C. Wang, Closed Manifolds with homogeneous complex structure, Amer. J. Math. Vol. 76, 1-32 (1954)

[8] T. Iwamoto, Lie group automorphisms preserving a lattice, to appear.