数理解析研究所講究録
第 576 巻 1985 年 132-153

射影空間から球面への極小埋入について

東北大学教養部　浦川　肇

§1. 序

(M, g) ; d 次元コンパクト型既約リーマン対称空間,

$S_1^\ell \subset \mathbb{R}^{\ell+1}$; ℓ 次元 定曲率 $= 1$ の標準球面　とする。

定義

等長埋入 (isometric immersion) Φ ; $(M, g) \longrightarrow S_1^\ell$ が極小であるとは．任意の Φ の normal deformation Φ_t $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$, $\Phi_0 = \Phi$, に対して

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}(M, \Phi_t^* can) = 0$$

の時を言う。ここで，can は S_1^ℓ の標準計量である。

例

1) 大円　$\Phi(S_1^{\ell-1}) \subset S_1^\ell$

2) 次元の低い大円　$\Phi(S_1^{\ell-1}) \overset{\text{大円}}{\subset} S_1^\ell \overset{\text{大円}}{\subset} S_1^N$

3) 上の例を，S_1^ℓ の等長写像 ρ で写したもの：

$$\rho \circ \Phi(S_1^{\ell-1}) \subset S_1^\ell$$

さて，2)，3) の例は非本質的なので通常次の概念によってこれらを排除して考える：

定義

極小埋入 $\Phi ; (M, g) \longrightarrow S_1^{\ell}$ が full であるとは，$\Phi(M)$ が $\mathbb{R}^{\ell+1}$ の超平面（or S_1^{ℓ} の大円）に含まれない時を言う。

二つの極小埋入 $\Phi_1, \Phi_2 ; (M, g) \longrightarrow S_1^{\ell}$ が同値であるとは，S_1^{ℓ} の等長写像 ρ を適当に選んで，$\Phi_2 = \rho \circ \Phi_1$ とできる時を言う。

問題 1

full 極小埋入 $(M, g) \longrightarrow S_1^{\ell}$ の同値類全体 $\mathcal{M}$ は何者か？

この問題は，1971年 do Carmo & Wallach [D.W] によって，M = 球面の時，1981年 P. Li [L]，Y. Ohnita [Oh] によって，M が isotropy 表現が既約な等質空間の場合，解かれた。これを説明する前に，極小埋入 $(M, g) \longrightarrow S_1^{\ell}$ の標準的な構成法について述べよう：

$C^\infty(M)$ ； M 上の実数値 C^∞ 関数全体

$\Delta ; C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$，$(M, g)$ の（非負）ラプラシアン，

$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots$ ；Δ の相異なる固有値全体，

$V^k := \{ f \in C^\infty(M) ; \Delta f = \lambda_k f \}$，$\lambda_k$ に対応する固有空間，

とする。ここで，$k = 1, 2, \cdots$ に対して，

$\dim V^k = m(k) + 1$

とおく。そこで，

$$\{f_0, f_1, \cdots, f_{m(k)}\}$$

を V^k の内積 $(f, f') := \int_M f f' d\mu$ に関する正規直交基とする。ここで $d\mu$ は (M, g) の（定数倍を除く）体積要素で，$\int_M d\mu = \dim V^k = m(k)+1$ と正規化されている。

定義

$$x_k ; M \ni p \longmapsto (f_0(p), f_1(p), \cdots, f_{m(k)}(p)) \in \mathbb{R}^{m(k)+1}$$

を考えると，次の事実が成立することがよく知られている：

命題

上の写像 x_k は，full 極小埋入

$$x_k ; (M, \tfrac{\lambda_k}{d} g) \longrightarrow S_1^{m(k)}$$

を与える。ここに，$d := \dim M$ である。

以下 $\tilde{g} := \frac{\lambda_k}{d} g$ とおく。　この極小埋入 x_k を，標準極小埋入と言う。

この時，次の問題が，荻上紘一氏，「空間形の極小部分多様体」Survey in Geometry, 1981/82 によって提出された：

問題2

標準極小埋入 $x_k ; (M, \tilde{g}) \longrightarrow S_1^{m(k)}$ は剛性をもつか？

（すなわち，別に極小埋入 $\varphi ; (M, \tilde{g}) \longrightarrow S_1^{m(k)}$ があれば，φ は

x_k と同値となるか？）

さて問題1は次のように解決された：

定理1（do Carmo & Wallach, P. Li, Y. Ohnita）

1) full 極小埋入 φ; $(M, cg) \longrightarrow S_1^{\ell}$ （$c>0$ 定数）が存在したとする。この時，適当な $k=1,2,\cdots$ を選ぶと，

$$\ell \leqq m(k) \quad かつ \quad c = \frac{\lambda_k}{d}, \ \text{i.e.}, \ cg = \tilde{g}$$

が成立する。

2) full 極小埋入 $(M, \tilde{g}) \longrightarrow S_1^{\ell}$ の同値類 $[\varphi]$ の集合 $\mathfrak{M}$ はあるベクトル空間 W_2 の凸体 L によって滑らかにパラメーター化される。特に，

L の内点には，$\ell = m(k)$ である埋入 φ; $(M, \tilde{g}) \longrightarrow S_1^{\ell}$ の同値類 $[\varphi]$ が対応し，L の境界点には，$\ell < m(k)$ であるような埋入 φ; $(M, \tilde{g}) \longrightarrow S_1^{\ell}$ の同値類 $[\varphi]$ が対応する。

この問題1の解決によって，又，問題2は次の事に帰着される：

問題2′ $\dim W_2 = ?$

実際，上の定理1は $\dim W_2 = 0$ か $\dim W_2 > 0$ かは何も教えてくれない。定理1によって，次がわかる：

$$x_k ; (M, \tilde{g}) \longrightarrow S_1^{m(k)} \text{ が剛性をもつ} \iff \dim W_2 = 0$$

問題2′は次のような答が知られていた：

<u>定理2</u>（Calabi [C] 又は do Carmo & Wallach [D.W]）

$(M,\tilde{g}) = S^d_c$；定曲率 $c = \frac{d}{k(k+d-1)}$ の d 次元球面とする。

$d=2$ の時，各標準埋入 x_k；$S^d_c \longrightarrow S^{m(k)}_1$ は剛性をもつ。

<u>定理3</u>（do Carmo & Wallach [D.W]）

$(M,\tilde{g}) = S^d_c$ とする。$d \geqq 3$ とする。この時，

1) $k \leqq 3$ の時，標準埋入 x_k は剛性をもつ。

2) $k \geqq 4$ の時，$\dim(W_2) \geqq 18$，従って標準埋入 x_k は剛性をもたない。

更に，間下克哉氏（cf. [M_1]）の標準埋入 x_k の次数の計算と合わせて，標準埋入 x_k の剛性に関するこれまでに知られていた結果は次のようである（cf. 荻上紘一氏「上記論文」）：

M	剛性をもつ	剛性をもたない
S^d	$d=2$ 又は $k \leqq 3$	$d \geqq 3$ かつ $k \geqq 4$
$P^d_{\mathbb{R}}$	$d=2$ 又は $k=1$	$d \geqq 3$ かつ $k \geqq 2$
$P^n_{\mathbb{C}}$	$n=1$ 又は $k=1$	?
$P^n_{\mathbb{H}}$	$k=1$	
P^2_{Cay}	$k=1$	

さて，小生が得た結果は次のようである (cf [U])：

定理４

$M = P^n_{\mathbb{C}}$, $n \geqq 2$, の時，

$k \geqq 4 \Rightarrow \dim(W_2) \geqq 91$

定理５

$M = P^2_{\mathbb{H}} = Sp(3)/Sp(1) \times Sp(2)$ の時．

$k \geqq 4 \Rightarrow \dim(W_2) \geqq 29{,}007$

注意

1) 定理５において $k = 4$ の時，$\dim(W_2)$ について，

$$29{,}007 \leqq \dim(W_2) \leqq 812{,}175$$

2) 間下克哉氏の1985年２月７日付の御手紙及びプレプリント [M_2] によれば， $M = P^n_{\mathbb{H}}$, $n \geqq 2$ の時，

$$\dim(W_2) \geqq 1 \quad , \quad k \geqq 4$$

となる。

3) 大仁田義裕氏より，当研究会直前に，Z. Yiming [Y] の論文を御教示いただいた。それによれば，

"$P^n_{\mathbb{C}}$ $(n \geqq 3)$，又は $P^n_{\mathbb{H}}$ $(n \geqq 2)$ の時，$k \geqq 2 \Rightarrow \dim(W_2) > 0$"

である。しかし，彼の論文において，*Lemma* 3.2 の証明（小生にとっては肝心の部分なのだが）が記されておらず，

小生には、確認できないでいる。

§2. 極小埋入のパラメータ化

定理1自身は比較的容易に証明できるので、これをする中で、問題のベクトル空間 W_2 及び、その中の凸体 L を説明しよう：

定理1の証明　　著名な高橋の定理を使う。

1)　今　$\varphi ; (M, Cg) \to S_1^\ell$ を極小埋入とする。ここで、

$$\varphi(p) = (a_0(p), \cdots, a_\ell(p)) \in \mathbb{R}^{\ell+1}, \quad p \in M$$

とおくと、高橋の定理より、

$$C^{-1} \Delta_g a_i = \Delta_{Cg} a_i = d\, a_i, \quad i = 0, 1, \cdots, \ell$$

となる。ここで $d = \dim M$ であった。従って適当な $k = 1, 2, \cdots$ を選ぶと、

$$\lambda_k = C\, d \quad , \text{i.e.,} \quad C = \frac{\lambda_k}{d}$$

となる。更に、φ が full であるとすれば、$\{a_0, \cdots, a_\ell\}$ は一次独立となるので、

$$\ell + 1 \leqq \dim V^k = m(k) + 1 \quad , \text{i.e.,} \quad \ell \leqq m(k)$$

を得る。

2)　アウトラインのみ示す。$\{f_i\}_{i=1}^{m(k)}$ は V^k の基であったから、上記のような φ に対して、

$$a_j = \sum_{i=0}^{m(k)} b_{ij} f_i$$

とかける。すなわち、行列 (b_{ij}) によって定義される線形写像を $B ; V^k \to V^k$ とすれば、

$$\varphi = B \circ x_k$$

となる。ここで一般に、線形代数でよく知られているように、

$$B = UA$$

(ただし、$U \in O(m(k)+1)$, $A ; V^k$ の半正定値対称写像)と書ける。

$$\therefore \quad \varphi \sim A \circ x_k$$

を得る。

次に、極小埋入 x_k が V^k 内の G-orbit として与えられることに注意しよう：すなわち、$G := I_0(M,g)$, (M,g) の等長変換群とし、M の一点 o の G の isotropy 部分群を K とすれば、i.e., $K = \{\sigma \in G \; ; \; \sigma \cdot o = o\}$ とすれば、

$$M = G/K$$

と書けるが、更に、G は V^k に次のように作用する。

$$(\sigma \cdot f)(p) := f(\sigma^{-1} p), \quad \sigma \in G, \; f \in V^k, \; p \in M$$

この時、$f_0 \in V^k$ として、

$$k \cdot f_0 = f_0 \quad , \quad k \in K$$

となるものを選んで、

$$x_k(\sigma K) = \sigma \cdot f_0 \quad , \quad \sigma \in G$$

と表わすことができる。(ここで、実は、$\mathbb{R}^{m(k)+1} \ni (a_0, \cdots, a_{m(k)}) \longleftrightarrow \sum_{i=0}^{m(k)} a_i f_i \in V^k$ と同一視していることに注意。)

結局，V^k の半正定値対称写像 A について，

$$A\circ x_k\,;\,G/K \ni \sigma K \longmapsto A(\sigma\cdot f_0) \in V^k$$

を調べればよい。さて写像 $A\circ x_k$ の原点 $o=\{K\}\in G/K$ での微分が，$\mathfrak{g}:=$ Lie 群 G の Lie 環，$\mathfrak{k}:=K$ の Lie 環，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$；Cartan 分解，$\mathfrak{p}\cong T_oM$，とすると，

$$A(X\cdot f_0)\quad,\quad X\in\mathfrak{p}$$

で与えられるので，

$$A\circ x_k\,;\,M=G/K \longrightarrow \{f\in V^k\,;\,(f,f)=1\}\ \text{が等長埋入}$$

$$\Longleftrightarrow\quad (A\sigma X\cdot f_0, A\sigma X\cdot f_0)=(X\cdot f_0, X\cdot f_0),\quad \forall\,\sigma\in G,\ \forall\,X\in\mathfrak{p}$$

$$\Longleftrightarrow\quad ((A^2-I)(\sigma X\cdot f_0), \sigma X\cdot f_0)=0,\quad \forall\,\sigma\in G,\ \forall\,X\in\mathfrak{p}\quad\cdots\cdots(\star)$$

となる。以上より，

$$\mathfrak{A}:=\text{full 極小埋入 }(M,\tilde{g})\longrightarrow S_1^{\ell}\text{ の同値類}[\varphi]\text{ 全体}$$

$$\cong\{A:V^k\to V^k\ \text{半正定値対称線形写像で，}(\star)\text{を満す}\}$$

を得る。ここで，

$$\{A\,;\,V^k\longrightarrow V^k\ \text{対称線形写像}\}\cong S^2V^k\quad(\text{対称積})$$

で，この上の内積 $(\ ,\ )$ を，$(A,B):=\mathrm{trace}(AB)$ で与えると，$\mathfrak{A}$，W_2，L は，結局，次のようになる：

$$V_1:=\{X\cdot f_0\ ;\ X\in\mathfrak{p}\},$$

$$W_1:=\{G\cdot S^2V_1\}_{\mathbb{R}}$$；V_1 の対称積 S^2V_1 の S^2V^k での $G\cdot$ orbits の linear span

とすると，

$$\mathfrak{A} \cong \{ A \in S^2V^k \ ; \ A \geqq 0 \text{ かつ } A^2 - I \perp W_1 \}$$

言いかえれば,

$$W_2 := W_1 \text{ の } S^2V^k \text{ における直交補空間}$$

とすると,

$$\mathfrak{A} \cong L := \{ A = \sqrt{C+I} \ ; \ C \in W_2 \ , \ C+I \geqq 0 \}$$

となる。定理1の残りの部分の証明は略す。

以上によって,問題のベクトル空間 W_2 及びその凸体 L の説明を終えた。

そこで,W_2 の次元を計算すればよいのであるが,直交補空間 W_1 を決定することは一般にほとんど不可能なので,W_2 の次元を下から評価することすらかなり困難な計算が必要となる。do Carmo & Wallach [D.W] は,直交群の表現論,特に,H. Weyl "Classical groups", Princeton, 1946 においてくわしく展開されている,"二つの表現のテンソル積の既約分解定理" を駆使することによって,$M = SO(d+1)/SO(d) = S^d$ の場合に,$\dim(W_2) \geqq 18$ ($k \geqq 4$ の時) を導びき,定理3を得た。類似の定理を他の対称空間 $M = G/K$ で得ようとするならば,より大変な計算を遂行せねばならない。次節でその具体的な計算方法を説明しょう。

§3. 次元の評価（その計算の方法）

さて $\dim W_2$ を下から評価したいのであるが，W_2 の複素化 $W_2^{\mathbb{C}}$（一般に，実ベクトル空間 V の複素化を $V^{\mathbb{C}}$ で表わすこととする）の複素次元 $\dim_{\mathbb{C}} W_2^{\mathbb{C}}$ を計算してもよいのだから，以下，物事をすべて複素化して考える。key になるのは次の補題である：

補題

W_3 として，$S^2(V^{k\mathbb{C}})$ の $\mathbb{C}$ 上の G-modules で，$S^2(V_1^{\mathbb{C}})$ の $\mathbb{C}$ 上の K-既約成分を含まないものの直和とする。

$\Longrightarrow \quad W_3 \subset W_2^{\mathbb{C}}$

（証明は do Carmo & Wallach [D.W] Lemma 5.4 とほぼ同様にできる。）

こうして計算の可能な部分空間 W_3 の次元の評価におきかえられた。さて $\dim_{\mathbb{C}} W_3$ の評価を次の手順で行う：

(イ) $S^2(V_1^{\mathbb{C}})$ の $\mathbb{C}$ 上の K-既約成分を決定する。

(ロ) (イ)に現われる K-既約 modules を少なくとも1つは含むような $\mathbb{C}$ 上の G-modules をすべて決定する。

(ハ) $S^2(V^{k\mathbb{C}})$ 内の G-既約 modules V で (ロ) に現われないものをさがす。

そうすれば

$$\dim W_2 = \dim_{\mathbb{C}} W_2^{\mathbb{C}} \geqq \dim_{\mathbb{C}} W_3 \geqq \dim_{\mathbb{C}} V$$

と下からの評価ができる。

さて上記の作業を行うために、ここで、コンパクトLie群の表現論の復習をしよう：

連結なコンパクトLie群 G の既約ユニタリ表現（＝$\mathbb{C}$ 上の既約 G-modules）の同値類全体 $\mathcal{D}(G)$ は次のような集合 $D(G)$ と1対1に対応する。

$G \supset T$　極大トーラス

$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{t}$　対応するLie環，

$\mathfrak{t}^*$；$\mathfrak{t}$ の dual 空間

とする。この時，

$$D(G) := \{ \lambda \in \mathfrak{t}^* ;\ 次の条件 (1), (2) をみたす \}$$

(1)　$\lambda(H) \in \mathbb{Z}$　　$\forall\, H \in \{ H' \in \mathfrak{t} ;\ \exp(H') = e \}$，

(2)　$(\lambda, \alpha) \geqq 0$　　$\forall\, \alpha \in P :=$ 正のルート全体，

で，1対1対応は

$$\mathcal{D}(G) \ni [V] \longmapsto V \text{ の最高ウェイト } \Lambda \in D(G) \quad \left(\overset{\text{この時}}{V = V_\Lambda \text{ とかく}} \right)$$

によって与えられる。（詳しくは，島和久著「連続群とその表現」，岩波，応用数学叢書，1981年；竹内外史著「リー代数と素粒子論」裳華房 1983年，等を参照して下さい。）

以下、

$$P^n_{\mathbb{C}} = G/K,$$

$$G = SU(n+1),$$

$$K = S(U(1)\times U(n)) = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\det\sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} ; \sigma \in U(n) \right\}$$

の場合を考える。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n+1) = \{ X \in M(n+1,\mathbb{C}) \ ; \ {}^t\bar{X} + X = 0 \},$$

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} -\mathrm{trace}(X) & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} ; X \in M(n,\mathbb{C}), {}^t\bar{X} + X = 0 \right\},$$

$$\mathfrak{p} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\bar{z}_1 & \cdots & -\bar{z}_n \\ z_1 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ z_n & & & \end{bmatrix} ; z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C} \right\}$$ とおくと、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$,

Gの極大トーラスとして（実は、Kの極大トーラスでもある）,

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_{n+1} \end{bmatrix} ; \varepsilon_i \in \mathbb{C}, |\varepsilon_i| = 1 \ (i=1,\cdots,n+1), \prod_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i = 1 \right\}$$

をとることができる。その Lie 環 $\mathfrak{t}$ は、

$$\mathfrak{t} = \{ H(x_1,\cdots,x_{n+1}) \ ; \ x_i \in \mathbb{R} \ (i=1,\cdots,n+1), \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0 \}$$

ここで、

$$H(x_1,\cdots,x_{n+1}) := 2\pi\sqrt{-1} \begin{bmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_{n+1} \end{bmatrix}$$

とおく。さて $\mathfrak{t}^*$ の元 λ_i $(1 \leqq i \leqq n+1)$ を次のように定める：

$$\lambda_i \ ; \quad \mathfrak{t} \ni H(x_1,\cdots,x_{n+1}) \longmapsto x_i \quad , \quad i=1,\cdots,n+1.$$

この時、 $G = SU(n+1)$, $K = S(U(1)\times U(n))$ に対応する集合 $D(G)$, $D(K)$ は次のように与えられることが知られている（例えば A. Ikeda & Y. Taniguchi [I.T] ）。

$$D(G) = \left\{ \Lambda = \sum_{i=1}^{n} m_i \lambda_i \; ; \; m_i \in \mathbb{Z} \ (i=1,\cdots,n), \ m_1 \geqq m_2 \geqq \cdots \geqq m_n \geqq 0 \right\},$$

$$D(K) = \left\{ \Lambda = \sum_{i=1}^{n} k_i \lambda_i \; ; \; k_i \in \mathbb{Z} \ (i=1,\cdots,n), \ k_2 \geqq k_3 \geqq \cdots \geqq k_n \geqq 0 \right\}.$$

以上の準備の下で、(イ)，(ロ)，(ハ) に対する答は次のように与えられる。

(イ)について

K-modules として，$V_1^{\mathbb{C}}$ が $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & w_1 & \cdots & w_n \\ z_1 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ z_n & & & \end{pmatrix} ; z_i, w_i \in \mathbb{C} \ (i=1,\cdots,n) \right\}$ と同型であることに注意して，その対称積 $S^2(V_1^{\mathbb{C}})$ を K-modules として既約分解すればよい：

$\boxed{\text{(イ) の答}}$

$$S^2(V_1^{\mathbb{C}}) = V_{2(\lambda_1 - \lambda_{n+1})} \oplus V_{\lambda_2 - \lambda_{n+1}} \oplus V_{-2\lambda_1 + 2\lambda_2} \oplus V_0$$

ただし $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 0$

(ロ) について

G-modules V を部分群 K-modules として考えると，一般に，V が G-module として既約であっても，K-modules としては既約ではない。 では K-modules としてどのように既約分解するか？ という問題は一般の (G, K) については難しい問題であるが，今の場合，(G, K) = (SU(n+1), S(U(1) × U(n))) の時は幸いにして，その答が知られていて，次の分岐定理に従う：

分岐定理（[I.T] 参照）

$V = V_\Lambda$ ，$\Lambda \in D(G)$，を既約 G-module とする。この時，

V は K-modules として次のように既約分解する：

$$V = \sum \oplus V_{k_1\lambda_1+\cdots+k_n\lambda_n}$$

ただし，$k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{Z}$，は次の条件をみたすすべてをわたる：

$$\begin{cases} k_2 \geqq \cdots \geqq k_n \geqq 0 \quad \text{かつ}, \\ \text{次の性質をもつような } k \in \mathbb{Z},\ k \geqq 0 \text{ が存在する時}. \\ m_1 \geqq k_2+k \geqq m_2 \geqq k_3+k \geqq m_3 \geqq \cdots \geqq m_{n-1} \geqq k_n+k \geqq m_n \geqq k \quad \text{かつ} \\ \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n k_i + (n+1)k \end{cases}$$

ここで，$\Lambda = \sum_{i=1}^n m_i\lambda_i \in D(G)$ としている。

そこで，(イ)の答によって，$V_{\sum_{i=1}^n k_i\lambda_i}$，$\sum_{i=1}^n k_i\lambda_i \in D(K)$ が与えられているのだから，上の分岐定理を使うことによって，(ロ)の答，すなわち，(イ)に現われる既約 K-modules を少なくとも1つは含むような G-modules V_Λ，$\Lambda = \sum_{i=1}^n m_i\lambda_i \in D(G)$ を決定することができる：

(ロ) の答

問題の既約 G-modules V_Λ，$\Lambda = \sum_{i=1}^n m_i\lambda_i \in D(G)$ は，

m_i，$i=1,\cdots,n$，が次で与えられるもので，かつそれに限る：

(i) $n \geqq 4$ の時.

m_1	$2k$	$2k-1$	$2k-2$	$2k+3$	$2k+2$	$2k+6$
m_2	k	$k+1$	$k+2$	$k+1$	$k+2$	$k+2$
m_3	k	k	k	$k+1$	$k+1$	$k+2$
$\vdots$						
m_{n-1}	k	k	k	$k+1$	$k+1$	$k+2$
m_n	k	k	k	k	k	k
	$k \geqq 0$	$k \geqq 2$	$k \geqq 4$	$k \geqq 0$	$k \geqq 0$	$k \geqq 0$

(ii) $n = 3$ の時.

m_1	$2k$	$2k-1$	$2k+3$	$2k-2$	$2k+2$	$2k+6$
m_2	k	$k+1$	$k+1$	$k+2$	$k+2$	$k+2$
m_3	k	k	k	k	k	k
	$k \geqq 0$	$k \geqq 2$	$k \geqq 0$	$k \geqq 4$	$k \geqq 0$	$k \geqq 0$

(iii) $n = 2$ の時

m_1	$2k$	$2k-3$	$2k+3$	$2k+6$	$2k-6$
m_2	k	k	k	k	k
	$k \geqq 0$	$k \geqq 3$	$k \geqq 0$	$k \geqq 0$	$k \geqq 6$

(ハ) について

最後の作業(ハ)に移ろう。この個所が、小生には最も困難であった所で、Z. Yiming [Y] の論文において証明の記されていない問題の部分でもある。

さて、G-module として、

$$V^{kC} = V_{k\lambda_1 - k\lambda_{n+1}} = V_{2k\lambda_1 + k\lambda_2 + \cdots + k\lambda_n}, \qquad k = 0, 1, \cdots$$

ということは、既によく知られているので、

(ハ) に答えるためには、その対称積 $S^2(V^{k\mathbb{C}})$ の G-modules としての既約分解

$$S^2(V^{k\mathbb{C}}) = \sum \oplus M(m_1,\cdots,m_n) V_{\sum_{i=1}^n m_i \lambda_i}$$

を求めねばならない。(ここで $M(m_1,\cdots,m_n)$ は正の整数で、G-modules $V_{\sum_{i=1}^n m_i\lambda_i}$ が、$S^2(V^{k\mathbb{C}})$ に何個現われるかその重複度を表わす。) その分解公式がわかればよいのだが、小生が知る限りでは、きれいな公式は知られていないようである。そこでこのような公式を得ることは断念する!! 実用上は、

『$S^2(V^{k\mathbb{C}})$ の既約成分 $V_{\sum_{i=1}^n m_i\lambda_i}$ を少なくとも1つさがし出すアルゴリズム』

がわかればよい。(このアルゴリズムを、1983年マックス・プランク研究所で同室であった伊吹山知義氏(現九大教養)に、御教示いただき、同年8月、定理4、5を得ました。)

このアルゴリズムとそれに従って実行した計算等の詳細は小生のプレプリント[U]を見ていただくこととし、ここではそのアイデアのみを述べる:

まず、G-module V の指標を χ とした時、すなわち、

$$\chi(x) := \sum_{i=1}^{d_V} (x\cdot v_i, v_i) \quad , x \in G,$$

ここで、$\{v_i\}_{i=1}^{d_V}$ は V の G の作用に不変な内積(,)に関する正規直交基底である、とした時、

この時，V の対称積 S^2V の指標 $\chi_{(2)}$ は，

$$\chi_{(2)}(x) = \frac{1}{2}\left(\chi(x)^2 + \chi(x^2)\right), \quad x \in G$$

によって与えられていることに注意する。

$G = SU(n+1)$-module $V^{k\mathbb{C}}$ は自然に $U(n+1)$-module とみなせるが，これによって対称積 $S^2(V^{k\mathbb{C}})$ も，$U(n+1)$-module となる。そこで，$S^2(V^{k\mathbb{C}})$ を $U(n+1)$-module として既約分解した時，この既約成分を $SU(n+1)$-module と思った時，やはり既約である。従って $S^2(V^{k\mathbb{C}})$ を $U(n+1)$-modules として分解すればよい。

さて $V^{k\mathbb{C}}$ の指標は古典的によく知られていて，$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n+1}$ の関数として書ける（H.Weyl の指標公式）。よって上記と合わせて，$S^2(V^{k\mathbb{C}})$ の指標が explicit にわかる：$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n+1}$ の多項式で書けている。

この多項式に現われる項のうち，

$$A\ \varepsilon_1^{q_1}\varepsilon_2^{q_2}\cdots\varepsilon_{n+1}^{q_{n+1}}, \qquad q_1 > q_2 > \cdots > q_n > q_{n+1} \geqq 0$$

なる形をさがす（A は $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n+1}$ について定数）。そこで，

$$m_j := q_j - q_{n+1} - (n+1) + j, \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

とおく。この時，$S^2(V^{k\mathbb{C}})$ は，$SU(n+1)$-module $V_{\sum_{j=1}^{n} m_j \lambda_j}$ を丁度 A 個だけ既約成分として含む。

上の事実の証明とそれに従って実行した長い計算は [U] にゆずり，その答は次のようになる。

(ハ) の答

G-module $S^2(V^{k\mathbb{C}})$ は次のような m_i $(i=1,\cdots,n)$ で与えられる既約 G-module $V_{\sum_{i=1}^{n} m_i\lambda_i}$ を少なくとも1つは含む：

(i) $n \geqq 3$ の時.

	(1)	(2)	(3)
m_1	$4k$	$4k-2$	$4k-4$
m_2	$2k$	$2k+2$	$2k+4$
m_3	$2k$	$2k$	$2k$
$\vdots$			
m_n	$2k$	$2k$	$2k$
	$k \geqq 0$	$k \geqq 2$	$k \geqq 4$

(ii) $n=2$ の時.

	(1)	(2)	(3)
m_1	$4k$	$4k-2$	$4k-4$
m_2	$2k$	$2k+2$	$2k+4$
	$k \geqq 0$	$k \geqq 2$	$k \geqq 4$

以上の結果をつき合わせてみよう。(ハ)の表のうち、(1),(2)に対する既約 G-modules は、(ロ)の表のどこかに現われている。しかし、(3)に対する既約 G-module は(ロ)の表には現われない。従って(3)に対する G-module が、(i) $n \geqq 3$, (ii) $n=2$ のいずれの場合でも、求めるものであることが、わかった。

さて，

(i) $n \geqq 3$，$k \geqq 4$ の時，　その次元 $\geqq 4{,}725$，

(ii) $n = 2$，$k \geqq 4$ の時，　〃　〃 $\geqq 91$

であることが，H. Weyl の次元公式より計算でき，求める結論を得る。

定理5　$P^2_{\mathbb{H}}$ の場合も全く同様に計算できる。

1983年の暑い夏の日々，小生の話を聞いていただき，(小生にとっては不可能な壁としか思えなかった) 表現論におけるアルゴリズムとその計算方法までも懇切丁寧に御教示いただいた伊吹山知義氏 (九大教養) に，ここで改めて感謝申し上げます。

<追加>

今後に残された問題

(1) 複素・四元数射影空間の1部及び Cayley 射影空間からの極小埋入の剛性について類似の結果が得られるか？

(2) ランクが2以上の対称空間からの極小埋入の剛性について何か言えるか？ 何でもよい。ほとんど，わかっていない。([Oh$_2$] の結果がある。)

(3) "極小埋入"を"エネルギー・density＝一定の調和写像"とおきかえても、類似の定理の得られることが球面の場合は、

G.Toth & G.D'Ambra, Geometriae Dedicata,17(1984),61-67.

射影空間の場合は、K.Mashimo [M 2] によってわかった。この場合にも (1),(2) と同様の問題が考えられる。

(4) target space が球面以外の対称空間の場合、この時は"高橋の定理"は使えないのだが、極小埋入の同値類全体を決定できないものであろうか？ 又、剛性についてはどうであろうか？（剱持勝衛氏の講演，[Ch_3] 参照）

引用文献

[C] E.Calabi, Minimal immersions of surfaces in euclidean spheres, J. Diff. Geom.,1(1967),111-125.

[D.W] M.P.do Carmo & N.R.Wallach, Minimal immersions of spheres into spheres, Ann. Math.,93(1971),43-62.

[I.T] A.Ikeda & Y.Taniguchi, Spectra and eigenforms of the Laplacian on S^n and $P^n(C)$, Osaka J. Math.,15(1978),515-546.

[L] P.Li, Minimal immersions of compact irreducible homogeneous Riemannian manifolds, J. Diff. Geom.,16(1981),105-115.

[M 1] K.Mashimo, Degree of the standard isometric immersions of complex projective spaces into spheres, Tsukuba J. Math.,4(1980),133-145.

K.Mashimo, Degree of the standard isometric minimal immersions of the symmetric spaces of rank one into spheres, Tukuba J. Math.,5(1981),291-297.

[M 2] K.Mashimo, Minimal immersions of quaternion projective spaces into spheres, a preprint.

[Oh] Y.Ohnita, a private communication.

[U] H.Urakawa, Minimal immersions of projective spaces into spheres, to appear in Tsukuba J. Math.

[Y] Z.Yiming, Minimal immersions of rank 1 compact symmetric spaces into spheres, Scientia Sinica,28(1985),263-272.

[Oh 2] Y.Ohnita, The standard minimal immersions of compact irreducible symmetric spaces, Lecture Notes in Math., n^o 1090, Springer, Berlin,Heiderberg, New York, Tokyo,(1984),37-49.

[Oh 3] Y.Ohnita, A family of minimal 2-spheres in $P^n(C)$, a preprint.