数理解析研究所講究録
第577巻 1985年 62-73

特異空間と両変理論

東北大学理学部　佐藤肇
(Hajime SATO)

§0. 序

Fulton-Macpherson [FM] は，ホモロジーとコホモロジーという共変と反変の2つの函手の統一的な拡張として，乗法的な一般コホモロジー理論 h と（連続的な）写像 $f: X \to Y$ に対して，両変理論

$$h^*(X \xrightarrow{f} Y)$$

を定義した。これは，$f(X)$ の Y での近傍の位相による量で，f のホモトピーでは不変ではない。この量は，特異空間（特異点を持った多様体，解析空間等）のトポロジー及び，Riemann-Roch 型定理の定式化，発展に役立つ。

この定式化による自然な例として，[FM] では，Euler 空間に対する Stiefel-Whitney ホモロジー類に対する Riemann-Roch 型定理（Halperin 予想）の証明の，成立しそうなあらすじを述べているが，松井明徳氏（一関高専）と私

の研究［MS_1］は，Halperin予想の反例を与えた（ほとんどすべての場合に，予想は成立しない）。但し2人の研究［MS_2］では，部分空間が，ブロック束を持つという特別な場合にHalperin予想を証明している。

この講究録では，Fulton-Macphersonの両変理論とRiemann-Roch型定理の早わかりを目的とし，我々の結果の説明は簡単にするが，組み合わせトポロジーの美しさが表われた（我々の期待以上の結果が不思議に出て来た）結果だと思っている。

§1. 両変理論の定義

hを一般コホモロジー理論とする。即ちEilenberg-Steenrodの7つの公理のうち，次元公理以外の公理を満たす可換群への函手とする。普通のコホモロジー群 $H^*(\ ;G)$ の他に，K群，コボルディズム群等が知られており，スペクトラムによる統一的な理論が作られている。

特に h を乗法的な一般コホモロジー理論（［FM, p32］cf.［D_y, p31］）とする。すなわち h^* は (X, A) A: open $\subset X$ という対に対して，$h^*(X, A)$ という階数づき可換群の元が対応していて，

$$h^i(X,A)\times h^j(Y,B)\xrightarrow{\ \times\ } h^{i+j}(X\times Y,\ X\times B\cup A\times Y)$$

という積が、自然な条件を満たして存在して居り、更に $\mathcal{J}$ という $h^1(\mathbb{R},\mathbb{R}-I)$ の元が存在して、

$$h^i(X,A)\xrightarrow{\ \times\mathcal{J}^n\ } h^{i+n}(X\times\mathbb{R}^n;\ X\times(\mathbb{R}^n-I^n)\cup A\times\mathbb{R}^n)$$

が任意の (X,A), i, n に対して同型になるものとする。例として、H^*, K^*, KO^* が考えられる（K^* の場合は $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{C}^n$ に変える…）。

さて、上のコホモロジー理論 h, 写像 $f:X\to Y$ に対して、$h^i(X\xrightarrow{f}Y)$ を定義しよう。

$\phi:X\to\mathbb{R}^n$ という写像で、$(f,\phi):X\longrightarrow Y\times\mathbb{R}^n$ が閉埋め込みになっているものを一つ取る。（例えば、ϕ 自身が閉埋め込みに取れれば良い。）

$$\begin{tikzcd} & Y\times\mathbb{R}^n \arrow[d, "p_1"] \\ X \arrow[ur, "(f,\phi)"] \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

$X_\phi\equiv(f,\phi)(X)\subset Y\times\mathbb{R}^n$ とおいて、次の式で、左辺を定義する。

$$\boxed{h^i(X\to Y)\equiv h^{i+n}(Y\times\mathbb{R}^n;\ Y\times\mathbb{R}^n-X_\phi)}$$

この時、次の性質が成立する。

(*) 上の定義は ϕ によらない

(*) $\boxed{h^i(X\xrightarrow{id}X)=h^i(X)}$ コホモロジー

(*) $\boxed{h^i(X\to pt.)=h_{-i}(X)}$ ホモロジー

次の3つの写像から引き起こされる。

(1) ひき戻し

$$g^* : h^i(X \xrightarrow{f} Y) \longrightarrow h^i(X' \xrightarrow{f'} Y')$$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

(2) 積

$$h^i(X \xrightarrow{f} Y) \otimes h^j(Y \xrightarrow{g} Z) \xrightarrow{\ \cdot\ } h^{i+j}(X \xrightarrow{gf} Z)$$

(3) 送り出し

$$f_* : h^i(X \xrightarrow{gf} Z) \longrightarrow h^i(Y \xrightarrow{g} Z)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$ proper

一般的には、$X \xrightarrow{f} Y$ に対し、上の3つの写像が定義されている函手を両変理論と定義出来、必ずしも、一般コホモロジー理論より作られるものでなくてよい。実際、Grothendieck による（[SGA 6]）

X, Y : algebraic variety. $f : X \to Y$.

$K_{alg}(X \xrightarrow{f} Y)$ = Grothendieck group of f-perfect $\mathcal{O}_X$-modules

が定義の源である。

X, Y が、向きづけられた特異点の無い多様体ならば

$$\boxed{H^*(X \xrightarrow{f} Y) \cong H^*(X) \cong H_*(X)}$$

となり、f及びYによらない。よって、この理論は、特異点の存在の事実を反映するものと言えよう。同様に、XがYの中で、h^*-向きづけ可能な法ベクトル束を持てば(特にXがYの中で stably fiber homotopically trivial な法束を持てば)

$$h^*(X \longrightarrow Y) = h^*(X)$$

となってしまう。

§2. Riemann-Roch formula

定義　fに対して、$\theta(f) \in T(X \xrightarrow{f} Y)$ が、

$$\theta(gf) = \theta(f)\cdot\theta(g), \quad \theta(id.) = 1 \in T^0(X \xrightarrow{id} X)$$

となるように定められている時、$\theta(f)$ を canonical orientation という。

今、$\theta \in T(X \xrightarrow{f} Y)$ に対し、

$$\theta^* : T_*(Y) \longrightarrow T_*(X), \quad \theta_* : T^*(X) \longrightarrow T^*(Y)$$

を、引き戻し、送り出しを用いた次の図式で定義する。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\theta", "f"'] \arrow[dr, "\theta^* a \equiv \theta\cdot a"'] & & Y \arrow[dl, "a"] \\ & pt. & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"', "id."] \arrow[dr, "a\cdot\theta"] & Y \arrow[d, "id.", "f_*(a\cdot\theta) \equiv \theta_* a"'] \\ X \arrow[r, "f", "\theta"'] & Y \end{tikzcd}$$

記号　Canonical orientation が与えられている時，

$$\theta(f)^* = f^! \qquad \theta(f)_* = f_!$$

と書く。

これは，orientation による，通常と逆向きの写像なので，!して貰いたい。

定義　2つの両変理論 T, U の間の変換

$$t : T \longrightarrow U$$

が Grothendieck 変換であるとは，3つの公理，(1)，(2)，(3) を保つ変換と定義する。

以上の状況で，次の Riemann-Roch 型定理は，全く形式的な議論の結果にすぎない。

定理　2つの両変理論 T, U と Grothendieck 変換 $t : T \longrightarrow U$ が与えられているとする。T, U 理論それぞれに，canonical orientation

$$\theta_T(f) \in T(X \xrightarrow{f} Y) \quad \theta_U(f) \in U(X \xrightarrow{f} Y)$$

が与えられて居り，

$$t\,(\theta_T(f)) = U_f \cdot \theta_U(f)$$

となる $U_f \in U^*(X)$ が存在するとする（この U_f を inverse Todd class という）。この時，次の2つの可換図式を，

Riemann-Roch の定理という。

$$
\begin{tikzcd}
T^*(X) \arrow[r, "t^\cdot"] \arrow[d, "f_!"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & U^*(X) \arrow[d, "f_!(\ \cdot U_f)"] \\
T^*(Y) \arrow[r, "t^\cdot"] & U^*(Y)
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
T_*(Y) \arrow[r, "t_\cdot"] \arrow[d, "f^!"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & U_*(Y) \arrow[d, "U_f \cdot f^!(\ )"] \\
T_*(X) \arrow[r, "t_\cdot"] & U_*(X)
\end{tikzcd}
$$

(SGA 6 formula) (Verdier formula) ∎

§3. Halperin 予想

多面体 X が (mod 2) Euler 空間であるとは、等式

$$\chi(X, X-pt; \mathbb{Z}_2) = \chi(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - pt; \mathbb{Z}_2) \in \mathbb{Z}_2$$

が任意の pt に対して成立することとする。但し χ で Euler 数をあらわす。 $X=|K|$ が Euler 空間の時 K' の i-単体 σ すべてを取り $s_i(X)=\sum 1\otimes\sigma$, $1\in\mathbb{Z}_2$ を考えると、$s_i(X)$ は $\mathbb{Z}_2$-cycle となり、K の定めるホモロジー類 $[s_i(X)]\in H_i(X;\mathbb{Z}_2)$ を Euler 空間 X の i次元 Stiefel-Whitney ホモロジー類と呼び、$s_i(X)$ と書く。X が n 次元多様体ならば、$s_i(X)$ は X の $n-i$ 次元 Stiefel-Whitney コホモロジー類 $w^{n-i}(X)$ のポアンカレ双対となる。

Verdier型のRiemann-Roch定理は、次の様に考えられる。

以後、X、Y、… はEuler空間とする。

任意の $f: X \to Y$ に対し、

$$\mathbb{F}(X \to Y) = \{\varphi : \varphi(X') = 1,\ \varphi(X - X') = 0,\ X' \subset X$$
$$f|X' : X' \to Y \quad \text{Euler map}\}$$

は両変理論となる。

又 $\mathbb{H}(X \to Y)$ で、$H^*(\ ; \mathbb{Z}_2)$ に対する両変理論をあらわす。$\mathbb{F}$, $\mathbb{H}$ の canonical orientation を次の様に定める。

$f: X \longrightarrow Y$: Euler ならば、$\theta_{\mathbb{F}}(f) \in \mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$ は canonical に定まる

$f: X \longrightarrow Y$ normally non-singular (法束が存在する)の時は、束の ($\mathbb{Z}_2$-) orientation で $\theta_{\mathbb{H}}(f) \in \mathbb{H}(X \xrightarrow{f} Y)$ が定まる。従って

$f: X \longrightarrow Y$ Euler かつ n. non-sing. $\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ smooth (bundle のprojectionの様$\underset{となる}{な}$時) ならば、

$\theta_{\mathbb{F}}(f)$, $\theta_{\mathbb{H}}(f)$ は共に定まる。

一般の $f: X \to Y$ に対して、Grothendieck transformation

$$\omega : \mathbb{F}(X \to Y) \longrightarrow \mathbb{H}(X \to Y)$$

が自然に定まり、

$f: X \longrightarrow Y$ smooth に対して $w(\theta_{\mathbb{F}}(f)) = w(Tf)\,\theta_{H}(f)$

となる. 但し $w(Tf)$ は f の法束の逆 Stiefel-Whitney コホモロジー類.

上の定義で $f: X \to pt.$ Euler map ($\Leftrightarrow X$: Euler) に対して. $w(\theta_{\mathbb{F}}(X \to pt.)) = S_*(X)$ となる。

以上の状況で, Verdier 型 R.R. は.

X, Y: Euler, $f: X \longrightarrow Y$ smooth

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_*(Y) & \xrightarrow{\ w\ } & H_*(Y) \\ f^! \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow w(Tf) \cap f^! \\ \mathbb{F}_*(X) & \xrightarrow{\ w\ } & H_*(X) \end{array}$$

$$w(Tf) \cap f^!(w^* \theta_{\mathbb{F}}(Y \to pt.)) = w f^!(\theta_{\mathbb{F}}(Y \to pt.))$$

と表わされるが,

$$w\ \theta_{\mathbb{F}}(Y \to pt.) = S_*(Y). \quad w f^!\ \theta_{\mathbb{F}}(Y \to pt.) = w\ \theta_{\mathbb{F}}(X \to pt.) = S_*(X)$$

となり, 結局

$$*) \quad w(Tf) \cap S_*(Y) = S_*(X)$$

となる。

一般に X, Y: Euler $f: X \to Y$ homologically normally nonsingular でも $*)$ が成立する というのが. Halperin 予想である. 但し homologically nor. non-sing.

とは、$\exists\theta \in H^d(X \to Y)$ $(\exists d)$ で、

$\forall W$ に対して $H^i(W \xrightarrow{g} X) \xrightarrow{\cdot\theta} H^{i+d}(W \xrightarrow{fg} Y)$

が同型となる で定義される。

Halperin 予想 (*) を形式的に smooth (Euler かつ normally non-singular) の場合に示したが、単に normally non-singular の場合にも証明でき、それより弱い、homology の normal 方向の non-singularity でも証明出来るだろうというのが、Halperin の予想である。

§4. 松井–佐藤 [MS_1] の結果

[MS_1] の定理1は次のようなものである。

定理 X を n 次元の Euler 空間とし、勝手に $a_i \in H_i(X; \mathbb{Z}_2)$ $(i=1,2,\ldots, n-1)$ を与える。その時 Euler 空間 Y で X とホモトピー同値で、$s_i(Y)=a_i$ となるものが存在する。

多様体の Stiefel-Whitney ホモロジー類は (ホモトピー型のみによる) Stiefel-Whitney コホモロジー類のポアンカレ双対である為、そのホモトピー不変であるが、Euler 空間の Stiefel-Whitney ホモロジーは、ホモトピー型の中で、任意に動かせるというわけである。上の定理は mod 2 Euler

空間に対するものであるが，integral Euler 空間でも，同様の定理が成立し，その証明は，楽しい部分が多い。

上の定理の方法で，

$$S^1 \hookrightarrow S^1 \times S^2$$

という埋め込みに対して，$\exists Y.\quad Y \simeq S^1 \times S^2$

$$0 \neq s_2(Y) \in H_2(Y:\mathbb{Z}_2) \cong H_2(S^1 \times S^2 : \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

の Euler 空間で $S^1 \hookrightarrow Y$ となるものが作れる。

この時 系論 *) は成立せず，Halperin 予想の反例となる。

[MS2] のブロック法束の Halperin 予想の証明には，コボルディズム理論を用いる．両者理論の枠組みに入るかどうかは，わからない。

REFERENCES

[Dy] E. Dyer, Cohomology Theories, W. A. Benjamin, New York (1969).

[FM] W. Fulton and R. MacPherson, Categorical framework for the study of singular spaces, Mem. Amer Math. Soc, 243 (1981).

[MS_1] A. Matsui and H. Sato, Stiefel-Whitney homology classes and homotopy type of Euler spaces, J. Math. Soc. Japan 37 (1985), 437~453.

[MS_2] A. Matsui and H. Sato, Stiefel-Whitney homology classes and Riemann-Roch formula, to appear in Adv. Studies in Pure Math.

[SGA6] P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie et al., Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, Sém. de Géo. Alg. du Bois-Marie 1966/67, Springer Lec. Notes in Math. 225 (1971).