数理解析研究所講究録
第 577 巻 1985 年 103-115

KASPAROV群について

阪大基礎工　市原　亮 (Ryo Ichihara)

0. 準備と記号　G.G. Kasparov [4]によって C^*-環の代数的K理論と C^*環の拡大の理論の統一である両変関手の"KK-Group"が定義された。ここで C^*-環の拡大とは Brown-Douglas-Fillmore [1]によって与えられた可換 C^*-環 $C(X)$ に対して短完全列 $0 \to K \to D \to C(X) \to 0$ の全体の同値類から得られる K-homology から発展して、一般に可分 C^*-環に対しても同様に、短完全列の全体から得られる理論である。すなわち、2つの C^*-環 A, B に対して、$KK^*(A,B)$ という添字付きの可換群が対応して、Aに対して反変、Bに対して共変の関手である。Xを可分局所コンパクト空間のとき、

$KK^*(\mathbb{C}, C_0(X)) \cong K^*(X)$　コンパクト台K-理論

$KK^*(C_0(X), \mathbb{C}) \cong h_*(X)$　一般スティーンロッド ホモロジー

更に、$KK^*(\mathbb{C}, B) \cong K_*(B)$　代数的K-理論

$KK^*(A, \mathbb{C}) \cong Ext^*(A)$　拡大群, if A: 核型

ここで、何故C*-環を用いるのか、Banach環を用いないのかという疑問が浮ぶが、次の例を見ることによって理解できる。実数$\mathbb{R}$を可換位相群と見てそのL¹代数（積はコンヴォリュション）はそのC*-ノルム閉包$C_0(\hat{\mathbb{R}}) \cong C_0(\mathbb{R})$の稠密部分環で、関数計算の閉性についての障害があって、代表元の取り方の計算に一考必要になる。C*-環はこれに閉じていることから、非常に便利である。

最初に、KK-理論の定義を述べるが、その考え方の中心はFredholm作用素の理論とその拡張である。このことを意識して進んで行く。

記号

- A, B, D, E：可分C*-環
  K：可算無限次元Hilbert空間上のコンパクト作用素全体から成るC*-環
- $C_{p,q}$：クリフォード環/$\mathbb{C}$、符号がp, q

更に、$C_{p,q}$は外積代数$\Lambda\mathbb{C}^{p+q}$上に表現を持つ有限次元C*-環で

$$C_{p,q} \cong \begin{cases} M_{2^{\frac{p+q}{2}}} & p+q : \text{even} \\ M_{2^{\frac{p+q-1}{2}}} \otimes \mathbb{C}^2 & p+q : \text{odd} \end{cases}$$

のような構造を持っている。

$C_{p,q}$の符号　$C_{p,q}$は$\mathbb{C}^{p+q}$を部分線形空間として持ち$\mathbb{C}^{p+q}$の基底が$C_{p,q}$の生成元となる。これらの生成元の偶数個の積の和として表される元xを偶といい、$\deg x = 0$，奇数個の積の和として表される元yを奇といい、$\deg y = 1$ときめる。

○ $\mathcal{M}(B)$：C^*-環Bのmultiplier環を表す。

ここでこの環は次の性質を持つ。もし、C^*-環Bがあるヒルベルト空間$\mathcal{H}$上に忠実に表現されているとき、すなわち、$B \hookrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$のとき、$\mathcal{M}(B) = \{ x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid xB, Bx \subset B \}$。別の言葉で云えば、$\mathcal{M}(B)$はBの$\mathcal{L}(\mathcal{H})$でのidealizerである。上で注意すべき点は、表現空間が異ってても$\mathcal{M}(B)$は同型である。

○ $B(X)$：局所コンパクト-ハウスドルフ空間X上のC^*-環B値を持ち無限遠点で消える連続関数全体の成すC^*-環。

特に　Iを単位区間とするとき、$B(I)$など。

1　KK-群の定義

$p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 添字に対して、$K_{p,q}K(A,B)$を定義しよう。

先ず 構成元全体は

$$\mathcal{E}_{p.q}(A,B)=\left\{(\varphi,F)\ ;\ \varphi: A\otimes C_{p+1,q}\to \mathcal{M}(B\otimes K)\ \text{*-homo},\ F\in\mathcal{M}(B\otimes K)\ \text{with}\ (*)\right\}$$

$$(*)\begin{cases}(1)\quad \varphi(a)F\sim(-1)^{\deg a}F\varphi(a)\\ (2)\quad (F^2-1)\varphi(a)\sim 0 & \forall a\in A\otimes C_{p+1,q}.\\ (3)\quad (F-F^*)\varphi(a)\sim 0\end{cases}$$

（ここで $T_1\sim T_2 \iff T_1\in T_2+B\otimes K$ を表わす。）

次に、0元となるもの全体（*degenerate element*）は、

$$\mathcal{D}_{p.q}(A,B)=\left\{(\varphi,F)\ ;\ (\varphi,F)\in\mathcal{E}_{p.q}(A,B)\quad \text{with}\ (*)_0\right\}$$

$$(*)_0\begin{cases}(1)_0\quad \varphi(a)F=(-1)^{\deg a}F\varphi(a).\\ (2)_0\quad (F^2-1)\varphi(a)=0 & \forall a\in A\otimes C_{p+1,q}.\\ (3)_0\quad (F-F^*)\varphi(a)=0\end{cases}$$

ホモトピー同値

$(\varphi_0,F_0)\equiv(\varphi_1,F_1)$ ；ホモトピー同値

$\underset{def}{\iff}$ $\exists\,(\{\varphi_t\},\{F_t\})\in\mathcal{E}_{p.q}(A,B([0,1]))$ $\quad t\in[0,1]$

$t=0,1$ のとき、それぞれ (φ_0,F_0), (φ_1,F_1) と一致している。

$$\overline{\mathcal{E}_{p.q}}=\mathcal{E}_{p.q}/\equiv\ ,\quad \overline{\mathcal{D}_{p.q}}=\mathcal{D}_{p.q}/\equiv$$ （$\mathcal{E}_{p.q}$ 内での $\mathcal{D}_{p.q}$ の同値類）

和

$$[(\varphi_1,F_1)]+[(\varphi_2,F_2)]\underset{def}{=}[(\varphi_1\oplus\varphi_2,F_1\oplus F_2)]$$ $[\ {}''\ ]$ は同値類

well-defined は $B\otimes K\oplus B\otimes K\subset B\otimes K\otimes M_2$ よりいえる。

このKの性質より和が定義できる。

$$K_{p,q}K(A,B) \underset{def}{=} \overline{\mathcal{E}_{p,q}}(A,B)/\overline{\mathcal{D}_{p,q}}(A,B).$$

定理１　$K_{p,q}K(A,B)$ は可換群である。

∵) (φ,F) に対して

$$(\overline{\varphi})(a) = (-1)^{\deg a}\varphi(a) \qquad \forall a \in A\otimes C_{p+1,q}$$

$\overline{\varphi}$ も $*$-homo で.

$$(\varphi,F)+(\overline{\varphi},-F) = (\varphi\oplus\overline{\varphi},\ F\oplus(-F)) \in \overline{\mathcal{D}_{p,q}}$$

実際 $\begin{pmatrix} F & \\ & -F \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ by ホモトピー $F_\theta = \begin{pmatrix} F\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -F\cos\theta \end{pmatrix}$

$\varphi_\theta = \varphi\oplus\overline{\varphi}$　とするとき.

1) $\varphi_\theta(a)F_\theta - (-1)^{\deg a}F_\theta\varphi_\theta(a)$

$$\underset{dif}{=} [\varphi_\theta(a), F_\theta] \qquad (\text{general commutator})$$

$$= \begin{pmatrix} [\varphi_\theta(a),F]\cos\theta & 0 \\ 0 & [\varphi_\theta(a),F]\cos\theta \end{pmatrix}$$

2) $F_\theta^2 - 1 = \begin{pmatrix} (F^2-1)\cos^2\theta & 0 \\ 0 & (F^2-1)\cos^2\theta \end{pmatrix}$

3) $F_\theta - F_\theta^* = \begin{pmatrix} (F-F^*)\cos\theta & 0 \\ 0 & -(F-F^*)\cos\theta \end{pmatrix}$

明らかに. $(\varphi_{\frac{\pi}{2}}, F_{\frac{\pi}{2}}) \in \mathcal{D}_{p,q}$.

q.e.d.

定理２（stable 同値）　H：可分ヒルベルト空間

$$KK((A\otimes K(H)), B) \cong KK(A, B\otimes K(H)) \cong KK(A,B)$$

∵）第２の同型は $\{B\otimes K(H)\}\otimes K \cong B\otimes K$

第１の同型は $K(H)$ の１次元射影子の一つを P とするとき

$\varphi|_{A\otimes P}$ で類は決まる。　　　　q.e.d.

定理３（形式的 Bott 周期性）

$K_{p,q}K(A,B) \cong K_{p-q}K(A,B)$　　$p-q$ の mod 2 で同型が従う.

∵）定理２とクリフォード環の構造定理より従う。　q.e.d.

注意　KK-群の代表元として、(1), (2), (3) をみたすものは、理論上考えた方がつごうがよいが、また、応用面でもそのような例がでてくるが、計算のつごう上少し条件を強くした形で代表元を取るとよい.

$A \ni 1$　のとき、(2), (3), $(2)_0$, $(3)_0$ の条件は次のような $(2)'$, $(3)'$ $(2)_0'$, $(3)_0'$ と見ることができる。

$(2)'$ $(F^2-1)\varphi(1) \sim 0$　　　　$(3)'$ $(F-F^*)\varphi(1) \sim 0$

$(2)_0'$ $(F^2-1)\varphi(1) = 0$　　　　$(3)_0'$ $(F-F^*)\varphi(1) = 0$

Connes [3] によって、$\mathcal{E}_{p,q} \ni (\varphi, F)$ に対して $(\varphi', F') \in \mathcal{E}_{p,q}$ があって (1), $(2)_0$, $(3)_0$ をみたし、$[(\varphi,F)] = [(\varphi',F')]$ となる。そして、もう少し強いことがいえて、F を self adjoint ユニタリ

に取れる。つまり、$[\varphi(a), F] \sim 0$ となる *self-adjoint unitary* F と見ることができる。ところが(1)を(1)。にすることが大変難しい。

通常 KK-理論ではどういう代表元をあつかうのかというと、定理3より小さい p, q について考察してみよう。

$p = q = 0$ のとき．　$C_{1,0} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}e_0$　$(e_0^2 = 1,\ e_0^* = e_0)$

$\varphi(e_0) = P_1 - P_{-1}$　　P_1, P_{-1} は projection

(1)の条件より、$1 = P_1 + P_{-1}$ の分解に対して

$$F \sim \begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & P \\ P^* & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(3) より}$$

(2)より．　$1 - P^*P \sim 0,\ 1 - PP^* \sim 0$

P は広義フレドホルム作用素（P_{-1} から P_1 への）となる。

$$P \underset{1:1}{\longleftrightarrow} F$$

次に $p = 1,\ q = 0$ のとき　$C_{2,0} = M_2$　更に、生成元が

$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ より、条件式から．

$$F = \begin{pmatrix} 0 & iP \\ iP & 0 \end{pmatrix} \qquad P^2 - 1 = P^* - P = 0 \quad [\varphi(a), P] \sim 0 \ \forall a \in A$$

$E = \dfrac{P+1}{2}$ で　$[\varphi(a), E] \sim 0$ ．

つまり．表現 φ と $K \otimes B$ を法として可換な射影子 E とみることができる。

以上で定義より、代表元(φ, F)はどのような形になるかを演繹してきたが．実際．あつかう元は上の形よりさらに簡単なものである．以下．それをかく．

$n \in \mathbb{N}$ に対して.

$$\varphi_0 : A \longrightarrow M_n(B) \ \text{*-homo} \qquad \varphi_1 : A \longrightarrow M_n(B) \ \text{*-homo}.$$

が与えられたとき.

$$\varphi(a \otimes e_0^n) \underset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \varphi_0(a) & 0 \\ 0 & (-1)^n \varphi_1(a) \end{pmatrix}, \qquad F = 0$$

$$(\varphi, 0) \in \mathcal{E}_{0,0}(A, B)$$

ここで、注意するのは $\varphi_i \ (i=0,1)$ が degenerate してもよいところで. もし $A = \mathbb{C}$ のとき. $[\varphi_0(1)] - [\varphi_1(1)] \in K_0(B)$ となる元に対応する。

$K_0K(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ の 1 に対応する元の構成は

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(e_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = 0.$$

$C_1 = [(\varphi, F)]$ が生成元である。

2. Intersection Product.

KK-群の間の同型問題や新しい元の構成などに利用されるpairing すなわち. Intersection product が Kasparov [ ] によって定義された。

$$K_pK(A_1, B_1 \otimes D) \otimes_D K_qK(D \otimes A_2, B_2)$$
$$\longrightarrow K_{p+q}K(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2)$$

($\otimes$ は spacial tensor product. 注. C^*-環の tensor product はたくさん存在する。)

$D=\mathbb{C}$ のとき、tensor product であり、

$B_1=A_2=\mathbb{C}$ のとき、合成である積である。

定義から述べればよいが、非常に複雑で元の形を作るまでに長いから、詳細は Kasparov [4] を見てもらうことにしてここでは、重要な性質を挙げておく。

1°) $(x\otimes_D y)\otimes_E z = x\otimes_D(y\otimes_E z)$ (associative law)

2°) $x\otimes C_1 = C_1\otimes x = x$

$f: A_1\to A_2$ $g: B_1\to B_2$ *homo. に対して

$$f^*: K_*K(A_2, B_1)\longrightarrow K_*K(A_1, B_1)$$
$$[(\varphi, F)] \longmapsto [(\varphi\circ f, F)]$$

$$g_*: K_*K(A_1, B_1)\longrightarrow K_*K(A_1, B_2)$$
$$[(\varphi, F)] \longmapsto [(g_*\circ\varphi.\ g_*(F))]$$

(ここで、g_* は g より誘導される $\mathcal{M}(B_1\otimes K)\xrightarrow[g_*]{} \mathcal{M}(B_2\otimes K)$.)

$h: D\to D_1$ に対して、

3°) $h_*(x)\otimes_{D_1} y = x\otimes_D h^*(y)$

4°) $K_0K(A_1, A_2)\ni\left[\left(\begin{pmatrix} f & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, 0\right)\right]=\gamma_f$ を考えると

$$\gamma_f\otimes_{A_2} x = f^*(x)$$

$K_0K(B_1, B_2)\ni\left[\left(\begin{pmatrix} g & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, 0\right)\right]=\delta_g$ を考えると

$$x\otimes_{B_1}\delta_g = g_*(x).$$

最も重要なのは次の主張である。

$\alpha\in KK(D, E)$, $\beta\in KK(E, D)$ があって

$$\alpha \otimes_E \beta = \left[\left(\begin{pmatrix} id_D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0\right)\right] \quad \beta \otimes_D \alpha = \left[\left(\begin{pmatrix} id_E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0\right)\right]$$

となるとき。

6°) $\otimes_D \alpha \ : KK(A, B\otimes D) \to KK(A, B\otimes E)$ *isomorphism*

$\otimes_E \beta \ : KK(A, B\otimes E) \to KK(A, B\otimes D)$ 〃

$\beta \otimes_D \ : KK(A\otimes D, B) \to KK(A\otimes E, B)$ 〃

$\alpha \otimes_E \ : KK(A\otimes E, B) \to KK(A\otimes D, B)$ 〃

又、$\alpha \in KK(D\otimes E, \mathbb{C})$, $\beta \in KK(\mathbb{C}, D\otimes E)$ があって、

$$\beta \otimes_D \alpha = \left[\left(\begin{pmatrix} id_E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0\right)\right], \quad \alpha \otimes_E \beta = \left[\left(\begin{pmatrix} id_D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0\right)\right]$$

となるとき、

7°) $\beta \otimes_D : KK(A\otimes D, B) \to KK(A, B\otimes E)$ *isomorphism*

$\beta \otimes_E : KK(A\otimes E, B) \to KK(A, B\otimes D)$ 〃

$\otimes_D \alpha \ : KK(A, B\otimes D) \to KK(A\otimes E, B)$ 〃

$\otimes_E \alpha \ : KK(A, B\otimes E) \to KK(A\otimes D, B)$. 〃

この一般的な積を使って、一つの結果ではあるが、次の定理が従う。

定理4 (Bottの周期性)

$$K_i K(A, B) \cong K_{i+n} K(A(\mathbb{R}^n), B) \cong K_{i-n} K(A, B(\mathbb{R}^n))$$

∵) *Kasparov's canonical generators.*

$$\exists\ K_n K(C_0(\mathbb{R}^n), \mathbb{C}) \ni \alpha \quad K_{-n} K(\mathbb{C}, C_0(\mathbb{R}^n)) \ni \beta.$$

s.t. $\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \beta = \left[\left(\begin{pmatrix} id_{C_0(\mathbb{R}^n)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0\right)\right], \quad \beta \otimes_{C_0(\mathbb{R}^n)} \alpha = C_1$

q.e.d.

A：nuclear C^*-環と仮定すれば、

(i.e. $\forall\ 0 \to J \to E \to A \to 0$ (exact) $\exists\ 0 \to J\otimes K \to E' \to A \to 0$ (exact)

s.t. $0 \to J\otimes K \to E\oplus_A E' + J\otimes K \to A \to 0$ (split exact)

これは、本当の定義とは異なるが、同値命題である。)

このとき、$K_1K(A,B) \cong Ext(A,B)$。このExtの定義は以下である。

$\mathcal{E} = \{ 0 \to B\otimes K \to E \to A \to 0 \quad (\text{exact}) \}$

この上に、EのC^*-同型で同値を入れ、

$0 \to B\otimes K \to E \to A \to 0$, $0 \to B\otimes K \to E' \to A \to 0$ に対し、

和を $0 \to B\otimes K\otimes M_2 \to E\oplus_A E' + B\otimes K\otimes M_2 \to A \to 0$ で導入して、

$\mathcal{D} = \{ 0 \to B\otimes K \to D \to A \to 0 \quad \text{split exact} \}$

で割った群を $Ext(A,B)$ と書き、拡大の群と呼ぶ。

この拡大の群の性質を使って、Kasparov は次の定理を得る。

定理5. A：nuclear　$A \rhd I$, $B \rhd J$; ideals

次の exact sequences を得る。

$$\cdots \to KK(A/I,B) \to KK(A,B) \to KK(I,B) \xrightarrow{\delta} K_1K(A/I,B) \to K_1K(A,B) \to K_1K(I,B) \to$$

$$\cdots \to KK(A,J) \to KK(A,B) \to KK(A,B/J) \xrightarrow{\delta'} K_1K(A,J) \to K_1K(A,B) \to K_1K(A,B/J) \to$$

定理 6　α)

$$KK(A, B_1 \oplus B_2) \cong KK(A, B_1) \oplus KK(A, B_2)$$

$$KK(A_1 \oplus A_2, B) \cong KK(A_1, B) \oplus KK(A_2, B)$$

β)　A_i : nuclear　$A = \oplus A_i$　c_0-direct sum

$$KK(A, B) \cong \prod KK(A_i, B) \quad (\text{直積})$$

注意．位相空間の K-理論 との関係．

X, Y ; 可分局所 コンパクト Hausdorff 空間．

さらに，X^+, Y^+ が CW-complex，のとき

$$K_i K(A, B) \cong \varinjlim_n \pi_{n+i}(X^+ \wedge \mathcal{F}_n(Y^+))$$

$$\cong \varinjlim_n \pi_{n+i}((X^+ \wedge \mathcal{F}_n)(Y^+))$$

$$= \varinjlim_n [S^{n+i} Y^+, X^+ \wedge \mathcal{F}_n]$$

注意　Kasparov の原論文では．コンパクト群 G が A, B, K 上作用していて．KK^G-群 を考えている。(φ, F) に次の条件を付加する．

φ : G-equivalent.

i.e. $\forall g \in G$, $a \in A$　　$g\varphi(a) = \varphi(g \cdot a)$

F : G-invariant operator．i.e.　$\forall g \in G$　$gF = F$

このとき．

$K_0 K^G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = R(G)$　（表現環）　$K_1 K^G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = 0$

$KK^G(A,B)$ と $KK(A\rtimes G, B\rtimes G)$ の関係は、はっきりわかっていない。ただ、前者から後者への準同型がある。Gが非コンパクトの場合も定義されているが、この方は準備が行きとどかず論文をあげておく。

REFERENCE

[1] Brown-Douglas-Fillmore; Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C*-algebras, Lec. Not. in Math. No.345.

[2] _______; Extensions of C*-algebras and K-homology, Ann. of Math. (2) 105 (1977),265-324.

[3] Connes; Non-commutative differential geometry, Chap.I: The Chern character in K homology. Chap.II: De Rham homology and non-commutative algebra. to appear.

[4] Kasparov; The operator K-functor and extensions of C*-algebras. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. 44(1980).

[5] _______; K-theory, group C*-algbras, and higher signatures, to appear.