数理解析研究所講究録
第577巻 1985年 132-152

p-進 Banach 環の K-理論について

東京理大理工　高橋秀一 (Shuichi Takahashi)

1. 序文. 最初になぜ p-進解析, 更に一般に non-archimedean analysis などに熱をあげるのか説明らしきものをしてみる. Kronecker は自然数 $\mathbb{N}$ は神の造ったもので, 残りは人間の創作だという. 勿論これに異をとなえる人も多い. それはさておき, $\mathbb{N}$ から整数 $\mathbb{Z}$, 有理数 $\mathbb{Q}$ は代数的方法で構成される. 次の $\mathbb{R}$ が問題で, Dedekind による cut 又は Cauchy による完備化でつくられる. Cauchy の立場でいうと, $\mathbb{Q}$ の絶対値 $|\ | = |\ |_\infty$ は

i) $|a| \geq 0$, $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$; ii) $|ab| = |a| \cdot |b|$, iii) $|a+b| \leq |a| + |b|$

を満している. 今 p を素数とし, $|0|_p = 0$, $a \neq 0$ なら $a = p^n \frac{b}{c}$, $b, c \in \mathbb{Z}$, $(b, c) = 1$ と表示して $|a|_p = p^{-n}$ (p進付値という) と定義しても i) — iii) を満す. 実際 Ostrowski によれば, $\mathbb{Q}$ 上の付値即ち実数への写で i) — iii) を満すものは, 絶対値 $|\ |_\infty$ か ある素数 p に対する p進付値 $|\ |_p$ と同値 (即ち $|a-b|$ で $\mathbb{Q}$ を距離空間とみて同じ位相を与える) となる. このことより

実数 $\mathbb{R}$ は $|\ |_\infty$ による完備化；p-進体 $\mathbb{Q}_p$ は $|\ |_p$ による完備化として，p-進体 $\mathbb{Q}_p$ は実数 $\mathbb{R}$ と全く同等な権利をもつといえる。

$\mathbb{R}$ を加法で位相群と考えると locally compact で，Pontryagin の意味の dual も $\mathbb{R}$ で，discrete な subgroup $\mathbb{Z}$ をもち，$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{T}$ が compact となる。同様に $\mathbb{Q}_p$ も locally compact, selfdual で，compact な subgroup $\mathbb{Z}_p$（p-進整数といわれるもので $\{a \in \mathbb{Q}_p \mid |a|_p \leq 1\}$）をもち，$\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ が discrete（$\simeq \mathbb{Z}_p$ の dual）となる。これより p-進体 $\mathbb{Q}_p$ 上での Fourier 解析もほぼ $\mathbb{R}$ 上と同様に展開されている。

$\mathbb{Q}$ が出発点であったことを忘れることも可能で，locally compact な可換体はという問題も考えられ，簡単に答が出されている。この場合，discrete な体を除けば，$\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$，$\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大（それらはすべて標数が 0）及び $\mathbb{F}((t))$ という有限体 $\mathbb{F}$ 上の formal power series 体のみである。$\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ の付値は i) — iii) を満すが，$\mathbb{Q}_p$ や $\mathbb{F}((t))$ は iii) の代りに更に強い

$$\text{iii)}' \quad |a+b| \leq \mathrm{Max}(|a|, |b|)$$

を満している。この様な付値を nonarchimedean という。それに基ずく解析を nonarchimedean analysis といっている。従って p-進解析は nonarchimedean analysis で標数が 0 の場合と大まかに云える。どちらが難しいかは当面する問題による。両者の掛橋として論理学者の証明した次の数学的結果をのべておく。

$\mathcal{P}$を素数 全体のなす集合とし，その上の単項でない極大な filter (ultrafilter ともいう)を$\mathcal{F}$とする．今p-進体$\mathbb{Q}_p$の直積 $\prod_{p\in\mathcal{P}}\mathbb{Q}_p$ に次の様な同値関係を入れる：

$$\alpha(p)\sim\beta(p) \iff \{p\in\mathcal{P} \mid \alpha(p)=\beta(p)\}\in\mathcal{F}.$$

これでの商を$\prod_{p\in\mathcal{P}}\mathbb{Q}_p/\mathcal{F}$と書き$\mathbb{Q}_p$の ultraproduct という．これは体になる．$\mathbb{F}_p$をp個の元の有限体とし ultraproduct $\prod_{p\in\mathcal{P}}\mathbb{F}_p((t))/\mathcal{F}$ を作るとこれは標数 0 の体となり同形対応：

$$\prod_{p\in\mathcal{P}}\mathbb{Q}_p/\mathcal{F} \simeq \prod_{p\in\mathcal{P}}\mathbb{F}_p((t))/\mathcal{F}$$

が成立つ．この証明は大変難しい事．Artin 予想といはれるものがこの同形を使って有限個のpを除き$\mathbb{Q}_p$上で成立することが，$\mathbb{F}_p((t))$ 上での成立より証明されており，今の処，直接$\mathbb{Q}_p$上での証明は未だ無いこと等を付くわえておく．

$\mathbb{R}$に $x^2+1=0$ の根を添加すると複素数体$\mathbb{C}$が得られる．これは代数的閉体で位相的には complete, locally compact と殆ど$\mathbb{R}$と変らない．$\mathbb{Q}_p$の有限次拡大は絶対に閉体にはならない．一昔前$\mathbb{Q}_p$の2次拡大を考えてこれを$\mathbb{C}$の代りにしようとした人々がいた．この場合3種の$\mathbb{C}$が考えられ複雑をきわめたが，現在 $\mathbb{C}_p=\widehat{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ ($=\mathbb{Q}_p$の代数閉体の完備化)を$\mathbb{C}$に代用するのが普通となっている．これも実は問題があるのだが，$\mathbb{C}_p$上で Cauchy 積分の類似を考えることにより，複素関数論の類似が展開される様になっている．

次に"なぜK-理論を"に答えることにする．それは登山家が答える様にK-理論がそこにあるからといえば充分であろう．従って以下は蛇足である．位相的K-理論の類似としての代数的K-理論はいろいろな人により定義され，今後も新しい定義が生れるものと思われる．その一つとしてQuillenは一般の環 A に対して $GL(A)=\varinjlim_n GL(n,A)$ なる群を定義し，この分類空間 $BGL(A)$ の plus 構成といわれる位相空間 $BGL(A)^+$ を作り，その homotopy 群：$K_i^Q(A)=\pi_i(BGL(A)^+)$ $(i\geq 1)$ としてK-群を定義した．$K_0(A)$ だけは別に有限生成 projective A-modules の Grothendieck 群として定義する．定義から判る様に具体的な計算は至難の業である．例へば $A=\mathbb{F}_q$ が q 個の元よりなる有限体の場合は

$$K_{2j}^Q\mathbb{F}_q\simeq 0 \quad (j>0), \quad K_{2j-1}^Q\mathbb{F}_q\simeq \mathbb{Z}/(q^j-1)\mathbb{Z} \quad (j>0)$$

但し $A=F$ が体なら $K_0^Q F\simeq\mathbb{Z}$ は例外である．次に $A=\mathbb{Z}$ なら $K_0(\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}$，$K_1^Q(\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}/(2)$，$K_2^Q(\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}/(2)$，$K_3^Q(\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}/(48)$ 程度しかはっきり判っていない．$K_3^Q(\mathbb{Z})$ も一時は $\mathbb{Z}/(24)$ と思われていた様に真偽の決定は大変で，一頃の球面 S^n の homotopy 群 $\pi_{n+2}(S^n)\simeq\mathbb{Z}/(2)$ $(n\geq 3)$ を思わせるものがある．更にこれらのK-群 $K_n^Q(\mathbb{Z})$ は zeta 関数：

$$\zeta(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s} \quad (\operatorname{Re}s>1 \text{ で収束，それの解析接続})$$

の負整数での値（これは有理数になることが知られているのだが）

と関係するらしいのである：

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12} = -2\ \frac{\# K_2^{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z})}{\# K_3^{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z})}$$

一般に $\zeta(-n) = \pm 2^{?} \dfrac{\# K_{2n}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z})}{\# K_{2n+1}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z})}$ n 奇数（n 偶数なら $\zeta(-n)=0$）

が予想されている。

この予想は左右の値がある程度計算されていて，実際そうなっているという形のものではなく，有理数 $\zeta(-n)$ の各素因子 p に対する p-進付値 $|\zeta(-n)|_p$ が p-進 étale cohomology の値で表示されること（これも予想）と p-進 Chern character が K-群と étale cohomology 群の同形を与えること（これも予想）の二つの合成から成っている予想なのである。

最後に p-進 Banach 環の K-理論が考えられると思った直接の動機である Serre の仕事を説明する。V を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上で定義された代数多様体とするとき，N_i を有限体 $\mathbb{F}_{q^i}$（これは $\mathbb{F}_q$ 上 i 次の拡大体）上の V の有理点の個数として

$$Z(V, t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} N_i t^i / i\right)$$

でその zeta 関数が定義される。これは実は t の有理関数であり，その根の絶対値も判っている（Riemann-Weil 予想で解決されている）。1960 年頃 Dwork が V が曲面の場合にこの有理性を証明した。その第一段階は $Z(V, t)$ が p-進 meromorphic 関数であることを示すにあり，実はある p-進 Banach 空間 E 上の完全連続作用素 A には Fredholm 行列式

$$\det(I - At) = \exp_p\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Tr}(A^i)t^i/i\right)$$

が定義され，Tのp-進整関数となり，$Z(V, t)$はこれらの分数式で表わされるのでp-進 meromorphic になることをSerreが見抜いたのである．そこで彼は初めてこの理論を独立に展開したのである．K_1は行列式であるという立場から見ると，このときp-進 Banach 環の K-理論が始まったといってもよいと思う．

この報告書はp-進 Banach 環の位相的 K-群をC^*-環の真似をして定義することを目的とする．その為には homotopy をどう定義するか問題で，ここでは Tate による rigid analytic space を無限次元の場合に拡張して connectedness を定義し，これで homotopy を定義しようというもので，Quillen，Wagoner 等の classifying space を使って，本当の topological space を使う間接的方法ではない．しかし計算は全く出来ないのでこれは力のある方々にお願いしたい問題として現状を報告するに留めておく．

2. p-進解析．以下素数pは固定．$\mathbb{Q}_p$をp-進体，$\mathbb{C}_p = \widehat{(\overline{\mathbb{Q}_p})}$をその代数閉体$\overline{\mathbb{Q}_p}$の付値$|\ |_p$による完備化とする．一般に$\mathbb{Q}_p \subset K \subset \mathbb{C}_p$なる完備な体$K$を考え，その上の解析を$p$-進解析ということにする．付値の持つ non-archimedes 性:

$$|a+b|_p \le \mathrm{Max}(|a|_p,\ |b|_p)$$

よりいろいろ面白い事がおきる．例へば級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \qquad a_n \in \mathbb{C}_p$$

が $t=a\in\mathbb{C}_p$ で収束する条件は $|a_n a^n|_p \longrightarrow 0$ で，$|a_n|_p \longrightarrow 0$ ならこの級数は $|a|_p \le 1$ で収束する．この全体を $\mathbb{C}_p\langle t\rangle$ と書く．この maximal ideal の全体 Spec $\mathbb{C}_p\langle t\rangle$ は簡単に判る様に unit ball:

$$\mathbb{B} = \{z\in\mathbb{C}_p \mid |z|\le 1\} = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}_p\langle t\rangle$$

である。同様に

$$\mathbb{T} = \{z\in\mathbb{C}_p \mid |z|=1\} = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}_p\langle t, t^{-1}\rangle$$

だが一番基本的な $\mathbb{C}_p$ や $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)=\mathbb{C}_p\cup(\infty)$ は Spec としては表わせない．これらは Spec をはり合せて出来る (rigid) analytic space なのである．これをもう少し正確に説明しよう．先づ $\mathbb{C}_p$ 上の1点 $a\in\mathbb{C}_p$ で analytic という事を，ある $\varepsilon>0$ が存在して

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

が $|z-a|_p \le \varepsilon$ で収束すると定義するのは自然である．そこで，ある集合 $U\subset\mathbb{C}_p$ 上 $f: U\longrightarrow\mathbb{C}_p$ が locally analytic であるとは，すべての $a\in U$ で f が analytic と定義するのが自然に思える．ところがこの様に定義すると locally constant な連続関数はすべて locally analytic となる．これは無茶である．

(例として $\mathcal{O}=\mathbb{Z}_p$: p-進整数環,を考えると $p^n\mathbb{Z}_p$ は指数 : $[\mathcal{O}:p^n\mathbb{Z}_p]=p^n$ の subgroup で, その各 coset の characteristic function はすべて locally constant な連続関数である.) そこで Krasner は $\mathcal{O}$ 上 (global に) analytic であるとは, ある有理関数列 f_n が存在して

i) f_n の pole は $\mathcal{O}$ の外にある.

ii) $\mathcal{O}$ 上 $f_n \longrightarrow f$ は uniform な収束である.

を満すことと定義した. これは Tate の考える rigid analytic space の立場とも殆ど一致する. 殆どという意味は Krasner は "quasi-connected set" という概念を基礎にしており, 一方 Tate は Grothendieck 流に理論を展開した. 例へば

$$D=\{z\in\mathbb{C}_p \mid |z|\neq 1\}=\mathbb{C}_p\setminus\mathbb{T}$$

でいうと, D は Krasner の意味では quasi-connected でこの space 上の analytic functions の作る環 $H(D)$ は 0, 1 以外の idempotent を持たないが, Tate の意味では 2つの connected component をもつ. 従って analytic functions の作る環 $A(D)$ は non-trivial な idempotent をもつ. 我々は Tate の方法を使うことにする. (勿論どちらを取るべきかは種々の例を当らないと何ともいえない事は事実である).

$\mathbb{Q}_p\subset K\subset\mathbb{C}_p$ なる完備な体上の affinoid algebra A とは $T_n=K\langle z_1,\cdots,z_n\rangle$ の商環 又は $T_m=K\langle z_1,\ldots,z_m\rangle$ の有限

拡大の事である．こゝに $T_n = K\langle z_1, \ldots, z_n\rangle$ は n 変数の formal power series 環 $K[[z_1, \ldots, z_n]]$ 中 $|a_1|\leq 1, \ldots, |a_n|\leq 1$ で収束する部分環で Tate の free affinoid algebra といわれるものである．例えば $K\langle t, t^{-1}\rangle = K\langle z_1, z_2\rangle/(1-z_1z_2)$．このとき A の maximal ideal の全体 Spec A は $\mathbb{C}_p^n$ の subset と同一視できる：

$$(a_1, \ldots, a_n) \in \operatorname{Spec} A \iff \left[\begin{array}{l}(z_1-a_1)A+\cdots+(z_n-a_n)A \text{ は } A \text{ の} \\ \text{maximal ideal}\end{array}\right.$$

例えば

$$\operatorname{Spec} T_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}_p^n \mid |a_i|_p \leq 1 \quad 1\leq i\leq n\}$$

$$\operatorname{Spec} K\langle t, t^{-1}\rangle = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z|=1\} \qquad \text{等々．}$$

A を affinoid algebra，$X = \operatorname{Spec} A$ とするとき，X 上に admissible open set を rational subset 即ち $f_0, \ldots, f_n \in A$ が存在して

$$A = f_0A + \cdots + f_nA \quad \text{且つ}$$

$$U = \{x \in X \mid |f_i(x)|_p \leq |f_0(x)|_p \quad 1\leq i\leq n\}$$

の形と定義し，U の cover とは U の有限個の rational subsets による covering $U = \bigcup_{j\in J} U_j$ ．(U_j rational, J 有限) と定義する事により X 上に Grothendieck topology $\mathcal{G}$ を定義する．その上の structural sheaf $\mathcal{O}_X$ は

$$\mathcal{O}_X = \frac{A\langle t_1, \ldots, t_n\rangle}{(f_1-f_0t_1)A\langle t_1, \ldots, t_n\rangle + \cdots (f_n-f_0t)A\langle t_1, \ldots, t_n\rangle}$$

で定義することによりつくられる3つ組 $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{G}, \mathcal{O}_X)$ が affinoid algebra A の定める affinoid space である．これを

一般化して locally に affinoid な space を Tate の意味の rigid analytic space という。この rigid というのは affinoid space 上の admissible open set が rational なものに限られ且つ cover は有限という制約をさしている。通常の様に analytic space を定義すると全くつまらないものになるからである。

Rigid analytic space $(X, \mathcal{G}, \mathcal{O}_X)$ が connected であるとは $\mathcal{G}$ の cover $\{U_i\}_{i\in I}$ で $I = I_1 \cup I_2$ と分解し

$$\Big(\bigcup_{i\in I_1} U_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{i\in I_2} U_i\Big) = \phi, \quad \bigcup_{i\in I} U_i = X$$

なら $I_1 = \phi$ 又は $I_2 = \phi$ となることである。$X = \operatorname{Spec} A$ の場合は X が connected である条件は A の idempotent が 0 か 1 に限ることが証明出来る。

3. Reduction modulo p. Rigid analytic space $X = (X, \mathcal{G}, \mathcal{O}_X)$ が connected であることを定義から示すのは容易ではない。位相空間 X の場合，任意の2点 $a, b \in X$ が path で結すべれば connected である。我々の場合 $\mathbb{C}_p$ は $|\ |_p$ による位相で totally disconnected だから，この様なうまい手はないが，この付値 $|\ |_p$ が nonarchimedean である事：

$$|a+b|_p \leq \operatorname{Max}(|a|_p, |b|_p)$$

より reduction modulo p が考えられる。以下これを説明する。

$\mathbb{Q}_p \subset K \subset \mathbb{C}_p$ なる体 K に対して

$$K^{\circ} = \{ a \in K \mid |a|_p \leq 1 \}$$

はKの subring となる．

$$K^{\circ\circ} = \{ a \in K \mid |a|_p < 1 \}$$

はその maximal ideal で，その商：

$$\overline{K} = K^{\circ}/K^{\circ\circ}$$

は標数 p の体で，$K^{\circ} \longrightarrow \overline{K}$ を reduction modulo p という．例へば $K = \mathbb{Q}_p$ の場合：

$$\mathbb{Q}_p^{\circ} = \mathbb{Z}_p \qquad p\text{進整数環}$$

$$\mathbb{Q}_p^{\circ\circ} = p\mathbb{Z}_p$$

$$\overline{\mathbb{Q}_p} = \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$$

である．

Tate の free affinoid algebra $T_n = K\langle z_1, \ldots, z_n \rangle = \left\{ f = \sum_{\alpha} a_\alpha z^\alpha \,\middle|\, |a_\alpha|_p \to 0 \right\}$ は $\|f\| = \sup_\alpha |a_\alpha|_p$ で Banach 環となる．従って

$$T_n^{\circ} = \{ f \in T_n \mid \|f\| \leq 1 \}$$

$$T_n^{\circ\circ} = K^{\circ\circ} T_n^{\circ} = \{ f \in T_n \mid f = \sum a_\alpha z^\alpha,\ a_\alpha \in K^{\circ\circ} \}$$

及び reduction modulo p：

$$T_n^{\circ} \longrightarrow \overline{T_n} = T_n^{\circ}/T_n^{\circ\circ}$$

が定義されるが，環として

$$\overline{T_n} = \overline{K}[z_1, \ldots, z_n]$$

は$\overline{K}$上の多項式環となる．更に一般な affinoid algebra A についても reduction modulo p

$$A^{\circ} \longrightarrow \overline{A} = A^{\circ}/A^{\circ\circ}$$

が定義され, $\overline{A}$ は $\overline{K}$ 上 finitely generated な algebra となる.

更に K が代数的閉体 (例へば $K=\mathbb{C}_p$) なら

$$\operatorname{Spec} T_n = \{ (a_1, \dots a_n) \in K^n \mid \quad |a_i|_p \leq 1, \ 1 \leq i \leq n \}$$

と考えてもよいから

$$\operatorname{Spec} T_n \subset (K^{\circ})^n \quad (\text{実は等号だが})$$

これより affinoid space $X = (\operatorname{Spec} A, \mathcal{G}, \mathcal{O}_X)$ の reduction modulo p:

$$X^{\circ} \longrightarrow \overline{X}$$

も定義され, $\overline{X}$ は $\overline{K}$ 上の affine 代数多様体となる. これは一般の rigid analytic space に延拡張され $\overline{X}$ は $\overline{K}$ 上の代数多様体となる.

さて, affinoid algebra A が idempotent e をもつとする. $e^2 = e$ より $\|e\| \leq \|e\| \cdot \|e\|$ が出て $\|e\| \geq 1$ 従って $e \in A^{\circ}$ なら $\|e\| = 1$ で, reduction modulo p : $A^{\circ} \longrightarrow \overline{A}$ で idempotent $e \longmapsto \overline{e} \neq \overline{0}$. よってもし A° が 0 及び 1 と異なる idempotent e をもてば

$$1 = e + (1-e), \qquad e(1-e) = 0$$

これを reduction modulo p で考えると

$$\overline{1} = \overline{e} + \overline{(1-e)}, \quad \overline{e}\,\overline{(1-e)} = \overline{0}, \quad \overline{e} \neq \overline{0}, \quad \overline{1-e} \neq \overline{0}.$$

即ち $\overline{A}$ の idempotent が $\overline{0}$ か $\overline{1}$ のみ 即ち $\operatorname{Spec} \overline{A}$ が connected なら $\operatorname{Spec} A^{\circ}$ は connected となる.

この応用として $GL(n, K)$ が rigid analytic space として connected であることが判る。それはその reduction modulo p である $GL(n, \overline{K})$ が affine space として座標環 $\overline{K}[x_{11}, \cdots, x_{nn}, (\det x_{ij})^{-1}]$ をもち，これは整域，従って $GL(n, \overline{K})$ は connected であるからである。

4. p-進 Banach 環とその K-群。 $\mathbb{Q}_p \subset K \subset \mathbb{C}_p$ なる完備な体 K を考える。その値のなす群を $G = |K^\times|_p \subset \mathbb{R}^\times$ とする。例へば $|\mathbb{Q}_p^\times|_p = \{p^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ である。K 上の Banach 空間 E は K 上の vector space で実数値 norm $\|\ \|$ が

i) $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\|x+y\| \leq \mathrm{Max}(\|x\|, \|y\|)$

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|_p \cdot \|x\| \qquad \alpha \in K,\ x \in E,\ y \in E$

を満し，norm に関して完備として定義される。例として，I を勝手な集合とし

$$c(I) = \{ x = (x_i)_{i \in I} \mid x_i \in K, \quad \lim_i |x_i|_p = 0 \}$$

$$\|x\| = \sup_i |x_i|_p$$

は p-進 Banach 空間である。更に条件

(N) $\quad \forall x \in E, \quad \|x\| \in \overline{G} \subset \mathbb{R}$

も仮定するのが普通である。さて，ある集合 I が存在して

$$E \simeq c(I)$$

となる条件は容易に判るように E 内に base $\{e_i\}_{i\in I}$ が存在して

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i\in I} x_i e_i, \quad x_i \to 0 \qquad \|x\| = \sup_i |x_i|_p$$

となることである。この様な base を orthonormal base という。
次に reduction modulo p を考えよう:

$$E^\circ = \{x \in E \mid \|x\| \le 1\}, \qquad E^{\circ\circ} = K^{\circ\circ}E^\circ, \quad \overline{E} = E^\circ / E^{\circ\circ}.$$

あると $\overline{E}$ は $\overline{K}$ 上の vector space となる。実は、$\{e_i\}_{i\in I}$ が E の orthonormal base をなす条件は、その reduction modulo p: $\{\bar{e}_i\}_{i\in I}$ が $\overline{E}$ の $\overline{K}$ 上の代数的 base をなすことが証明されるのである。これより、K が discrete な付値をもつ，即ち $\overline{G} = G \cup \{0\}$ なる，orthonormal base の存在，従ってある集合 I が存在して

$$E \simeq c(I) \quad (\text{構造定理})$$

とか，E の任意の closed subspace に norm ≤ 1 なる projection が存在するとかいえて，あたかも Hilbert space の様になる。
このとき E の dual space E' は

$$b(I) = \{ y = (y_i)_{i\in I} \mid y_i \in K, \ \sup_i |y_i|_p < +\infty \}$$

$$\|y\| = \sup_i |y_i|_p$$

で $x \in E$, $y \in E'$ の pairing は

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i\in I} x_i y_i$$

で与えられる。実際，p-進解析では，$\sum_{i\in I} x_i y_i$ の収束 $\Longleftrightarrow$ $|x_i y_i|_p \to 0$ であるから。

E, F を2つの Banach 空間とするとき，$\mathcal{L}(E, F)$ を E から F への linear continuous map の全体で

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|ux\|}{\|x\|}$$

で norm を入れると Banach 空間になる．2つの Banach 空間 E, F の tensor 積 $E \hat{\otimes} F$ は代数的な tensor 積に

$$\|z\| = \inf_{z = \sum_i x_i \otimes y_i} \left(\sup_i \|x_i\| \|y_i\| \right)$$

で norm を入れ，その完備化で定義すると，本質的に唯一つ定まる．更に

$$E' \hat{\otimes} F \ni z = \sum_i f_i \otimes y_i \longmapsto u_z \in \mathcal{L}(E, F)$$

$$\text{ここに} \quad u_z(x) = \sum_i f_i(x) y_i$$

は $E' \hat{\otimes} F$ の $\mathcal{L}(E, F)$ への埋めこみで，その closure として $\mathbb{K}(E, F)$ を定義する．その元を completely continuous な operator という．K が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体の場合には compact operator に一致する．特に $E = F$ の場合，$\mathbb{K} = \mathbb{K}(E, E) \subset \mathcal{L}(E, E)$ と置く．このとき Fredholm の行列式

$$H(t) = \det(1 - tu) : K \longrightarrow K$$

がすべての $u \in \mathbb{K}$ に対して定義され，$t \in K$ の K 値関数とみて整関数となるのである．これより Riesz の理論も成立する．即ち $a \in K$ とするとき

i) $H(a) = \det(1 - au) \neq 0 \Leftrightarrow 1 - au$ が可逆

ii) $H(a)=0$ なら $E=N(a)+F(a)$ と直和分解し，

$1-au$ は $N(a)$ 上 nilpotent

$1-au$ は $F(a)$ 上可逆

$N(a)$ の次元 $=$ a の重複度 $<+\infty$

勿論 $1-au$ は Fredholm operator でその Index は 0 である．

さて，Banach 空間 $c(I)$ を無限次元 rigid analytic space とみて，その subspace の connectedness の定義を考えよう．簡単の為に $I=\mathbb{N}$（可算集合）とする．定義から

$$c(\mathbb{N})=\varinjlim_{n} K^{n}$$

$$c(\mathbb{N})^{\circ}=\{x\in c(\mathbb{N})\mid \|x\|=\sup_i |x_i|_p\leq 1\}$$

$$\simeq \varinjlim_{n}(K^{\circ})^{n}=\varinjlim_{n}\operatorname{Spec} T_n$$

これより

$$c(\mathbb{N})^{\circ}=\operatorname{Spec}(\varprojlim_{n} T_n)$$

と考えられる．従って

$$\varprojlim_{n} T_n=T_{\infty}=K\langle x_1,x_2,x_3\cdots\rangle$$

を Tate の free affinoid algebra の可算次元版と定義しよう．

これを使って，無限次元 rigid analytic space 及びその connectedness が定義されたとする．A を p-進 Banach 環とするとき $K_0(A)$ は代数的に定義することにし，$K_n^{top}(A)$ $(n\geq 1)$ をどう定義するかを考えよう．C^*-環の場合の定義の真似をしてみる．$\mathrm{Aut}(A)$ を $\mathcal{L}(A,A)$ の可逆元全体

のなす群とするとき，これが rigid analytic space となる事を示せば $K_1^{top}(A)$ を

$$K_1^{top}(A) = \pi_0(\mathrm{Aut}\,A) = \text{connected components のなす群}$$

で定義するのが自然である．$A=K$ の場合は $\mathrm{Aut}\,K = GL(1,K)$ は connected，一般に A が有限次元 algebra の $\varinjlim$（即ち AF 形）ならやはり $\mathrm{Aut}\,A$ は connected で，$K_1^{top}(A)=0$ になると思われる．

高次元 $K_n^{top}(A)$ は C^*-環の場合には Suspension SA を使って

$$K_2^{top}(A) = K_1^{top}(SA)$$

の様に定義する．Suspension の定義は S^1 に当るものが

$$\mathbb{T} = \{z \in K \mid |z| = 1\}$$

とも思えるので，いろいろ手があると思うが，目標は Bott の periodicity の成立にしたい．これにはいろいろ実例を計算してみなくてはならない．

5．文献案内．p-進解析による関数解析は

Monna, A.F.: Analyse non-archimédienne. Springer Ergebniss #56, 1970

Narci, L.–Beckenstein, E.–Bochman, G.: Functional Analysis and Valuation Theory, Marcell Dekker, Pure and App. Math. #5, 1971

von Rooij, A.C.M.: Non-archimedean Functional Analysis.
　　Marcel Dekker, Pure and Applied Math. #51, 1978
等に解説されている。我々の目的に直接使えないので省略したが，Gelfand による可換 C^*-環の特徴付けの類似等が中心問題のようである。一寸注目すべき結果は次の定理（Ingleton: 例へば von Rooij p.104）である

K上の Banach 空間 E が injective $\Leftrightarrow$ E は spherically complete.

系として： Hahn-Banach の定理の成立 $\Leftrightarrow$ K が spherically complete

こゝに spherically complete とは closed disk の任意の列

$$D(a_1, r_1) \supset D(a_2, r_2) \supset \cdots$$

が $\bigcap_i D(a_i, r_i) \neq \phi$ を満すことで（$r_i \to 0$ を要求してない点が complete より強い），体の場合は Kaplansky が導入した maximally complete ということと同じで，$\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の様にその値の群 $G = |K^\times|_p$ が discrete なら常に完備と同じだが，$\mathbb{C}_p = (\widehat{\overline{\mathbb{Q}}_p})$ は spherically complete ではないことが知られている。例へば

Robba P.: Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, Asterisque 10 (1973), 113–220 中 p.143.

これは大変な事で，$\mathbb{C}_p$ は $\overline{\mathbb{Q}_p}$ の spherical completion（それは常に存在する）をとるべきかも知れない。

$$\prod_p \mathbb{Q}_p/\mathcal{F} \simeq \prod_p \mathbb{F}_p((t))/\mathcal{F}$$

は Ax–Kochen による結果で，原論文は

Ax, J. – Kochen, S. Diophantine Problems over Local Fields I, II Amer. J. of Math. 87(1965), III. Ann. of Math. 82(1966).

$\mathbb{Q}_p$ の位相群としての構造，その2次拡大等は

Gelfand, I.M. – Graev, M.I. – Pyatetskii-Shapiro, I.J.: Representation Theory and Automorphic Functions, W.B. Saunders 1969

にある。

K–理論に関しては "数学" にある論説：

加藤和也：代数的K–理論 — その整数論的側面 — 数学 34巻 2号 (1982)

島田信夫・島川和久：代数的K–理論 — そのホモトピー論的側面 — 数学 35巻 2号 (1983)

をまずおすすめする。C^*–環のK–理論は

中神祥臣：C^* 環とK理論 数理研講究録 488 (1983)，1 – 26

高井博司・夏目利一：A. Connes の非可換微分幾何 数学 35巻 2号 (1983)

に要領よく紹介されている。

Krasner 流の（即ち Tate 以前の）p進解析として

Koblitz, N.: p-adic Analysis, London Math. Soc. Lecture Note # 46, 1980

には analytic operator の spectre 分解にふれていて面白い。

整数論関係，特に ζ-関数の rationality は

Koblitz, N.: p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta-Functions. Springer GTM # 58, 1977

が読みやすい。

Fredholm - Riesz の理論は

Serre, J-P. Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. Pub. IHES #12, 1962, 69-85.

にある。Serre は K が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の場合 即ち compact 性を使って証明しているのだが，それを一般にしたのが

Gruson, L. Théorie de Frédholm p-adique Bull. Soc. Math. France 94 (1966), 67-95

である。

Tate の rigid analytic space は

Fresnel, J - van der Put, M. Géométrie Analytique Rigide et Applications. Birkhäuser P.M. #18, 1981

Bosch, S. - Güntzer, U - Remmert, R.: Non-archimedean Analysis Springer Grundlehren # 261, 1984

がある。これらの応用として共に Torus の話をしているので一寸説明しておく。古典解析的に Torus は $\mathbb{C}/\Lambda$，Λ は rank 2 の discrete subgroup として表わされる。今 $\mathbb{C}$ 上の

exp 関数を使うと

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp 2\pi i} \mathbb{C}^{\times} \longrightarrow 0$$

なる exact sequence が出来る．そこで $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ とその discrete subgroup を表示すれば

$$\exp \pi i : \mathbb{C}/\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{\times}/\langle q \rangle \qquad \text{ここに } q = e^{2\pi i \tau}, \quad 0 < |q|_{\infty} < 1$$

で $\langle q \rangle$ は $q \in \mathbb{C}^{\times}$ の生成する $\mathbb{C}^{\times}$ の乗法的部分群である．

この類似として p進解析でも Torus を

$$\mathbb{C}_p^{\times}/\langle q \rangle, \qquad q \in \mathbb{C}_p^{\times} \quad 0 < |q|_p < 1$$

と定義すると，これは elliptic curve の rigid analytic space としての表示を与えるのである．従って，この上の葉層とか葉層 C^*-環の様なものも p-進 Banach 環として考えられ，Conne の $\mathbb{C}^*$-dynamics の理論が p-進の場合にも出来ると思われる．

Index の理論も既に

Robha, P.: On the index of p-adic differential equations I
Ann. of Math. 101 (1925), 280–316

が出ていることを付記して，この報告を終ることにする．