

D. Gabai による, knot complement 上の foliation の構成

阪大 理 小 林 毅

§ 1.

1984 年の暮, 結び目理論の懸案であった Property R 予想及び Poincaré 予想が D. Gabai により肯定的に解決された。この際, 本質的な役割を果たしたのが  $\mathbb{R}$  の knot complement 上の foliation の存在定理である:

定理 (Gabai)  $K$  を  $S^3$  内の非自明な結び目,  $S$  を  $K$  の minimal genus Seifert 膜とする。この時,  $K$  の complement  $S^3 - N(K)$  上の taut, finite depth foliation  $\mathcal{F}$  下記のものが存在する:

- $S$  は  $\mathcal{F}$  の leaf.
- $\mathcal{F}$  に  $\partial N(K)$  に transverse に交わる。また  $\mathcal{F}|_{\partial N(K)}$  は, foliation by circles.

本稿では, 上の定理の証明の概略を述べる事にする。尚, Gabai 自身の論文 [G2] も存在するので詳しくは, いろいろを参照されたい。

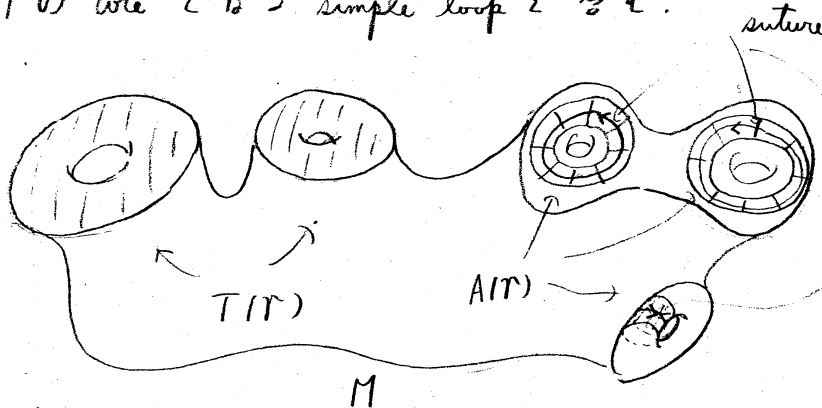
§1. 準備.

この節では, [G1]の結果のうち後述必要となるものを紹介しておく。用語等については Hempel [H], Gabai [G1] を参照されたい。

以下,  $M$  を compact, oriented 3-manifold とする。

定義. 組  $(M, \mathcal{R})$  が sutured manifold とは,

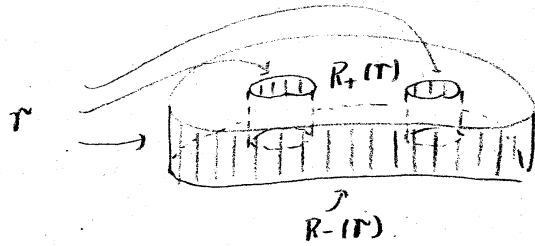
- (1)  $\mathcal{R}$ : a set of pairwise disjoint annuli  $A(\mathcal{R})$ , and tori  $T(\mathcal{R})$ .
- (2)  $A(\mathcal{R})$  の各成分は, suture と呼ばれる, 向きをついた,  $\gamma$  の core となる simple loop を含む。



(3)  $R(\mathcal{R}) = \partial M - \mathring{\mathcal{R}}$  の各成分には, 向きが入れられる。特に  $\gamma$  のうちの  $\gamma$  normal vector が 外向き (内向き resp.) のものの全体の和を  $R_+(\mathcal{R})$  ( $R_-(\mathcal{R})$  resp.) と書く。

例. (product sutured mfd.).  $S$  を compact surface  $\neq \emptyset$  なるものとする。この時,  $M = S \times [0, 1]$ ,  $\mathcal{R} = \partial S \times [0, 1]$ ,

$R_+(T) = S \times \{1\}$ ,  $R_-(T) = S \times \{0\}$  とすれば sutured mfd.  $(M, T)$  を得る。



定義.  $\mathcal{F}$ : a codimension 1 foliation of  $M$ .  $L$ : a leaf of  $\mathcal{F}$  とする。

この時,  $L$  及び  $\mathcal{F}$  の depth を次のように定める。

$L$ : depth 0  $\Leftrightarrow L$  compact

depth  $j$  ( $1 \leq j$ ) leaf が定まる,  $L$  とする。この時

$L$ : depth  $k+1 \Leftrightarrow \bar{L} - L$ : a union of depth  $j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) leaves,  $\bar{L} - L$  は, depth  $k$  leaf を含む。

また,  $\mathcal{F}$ : depth  $k \Leftrightarrow k = \max \{ \text{depth } L \mid L: \text{a leaf of } \mathcal{F} \}$ .

注意. leaf 及び  $\mathcal{F}$  の depth は, 一般に定義出来るとは, 限らない。

定義.  $(M, T)$ : a sutured mfd. とする。この時:

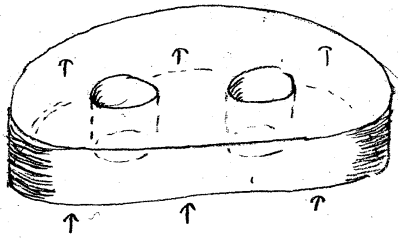
$(M, T)$ : taut とは,  $\bullet M$ : irreducible, 及び  $\bullet R(T)$ : norm minimizing in  $H_2(M, T)$  なる事。

( $H_2(M, T)$  の norm に ついては, Gabai [G1], or Thurston [T] 参照)

定義.  $\mathcal{F}$ : a transversely oriented codim. 1 fol. <sup>(of)</sup> a sutured mfd.  $(M, T)$  とする。この時,  $\mathcal{F}$  が taut とは, 次を満たす事とする。

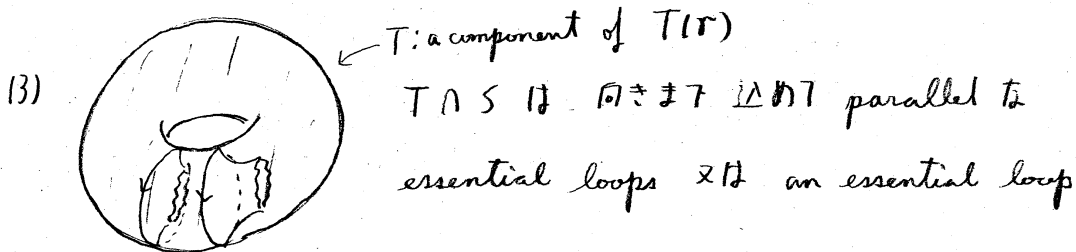
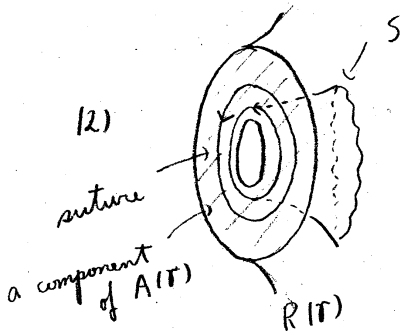
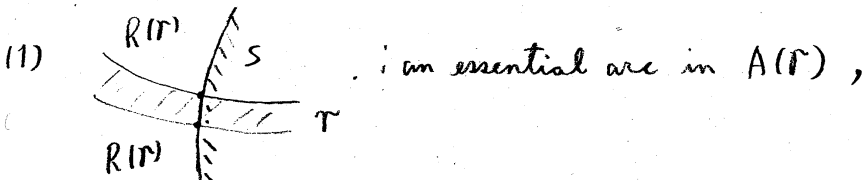
- 1)  $\mathcal{F}$  は,  $\mathcal{R}$  に対し横断的,
- 2)  $\mathcal{F}$  は,  $R(\mathcal{R})$  に tangent.  $\mathcal{F}$  の normal direction  $R_+(\mathcal{R})$  ( $R_-(\mathcal{R})$  resp.) へ外向き (内向き resp.).

例. Product sutured mfd. 上の product foliation は, taut



以下 sutured mfd. decomposition &  $\mathcal{U}$  sutured mfd. hierarchy と定義

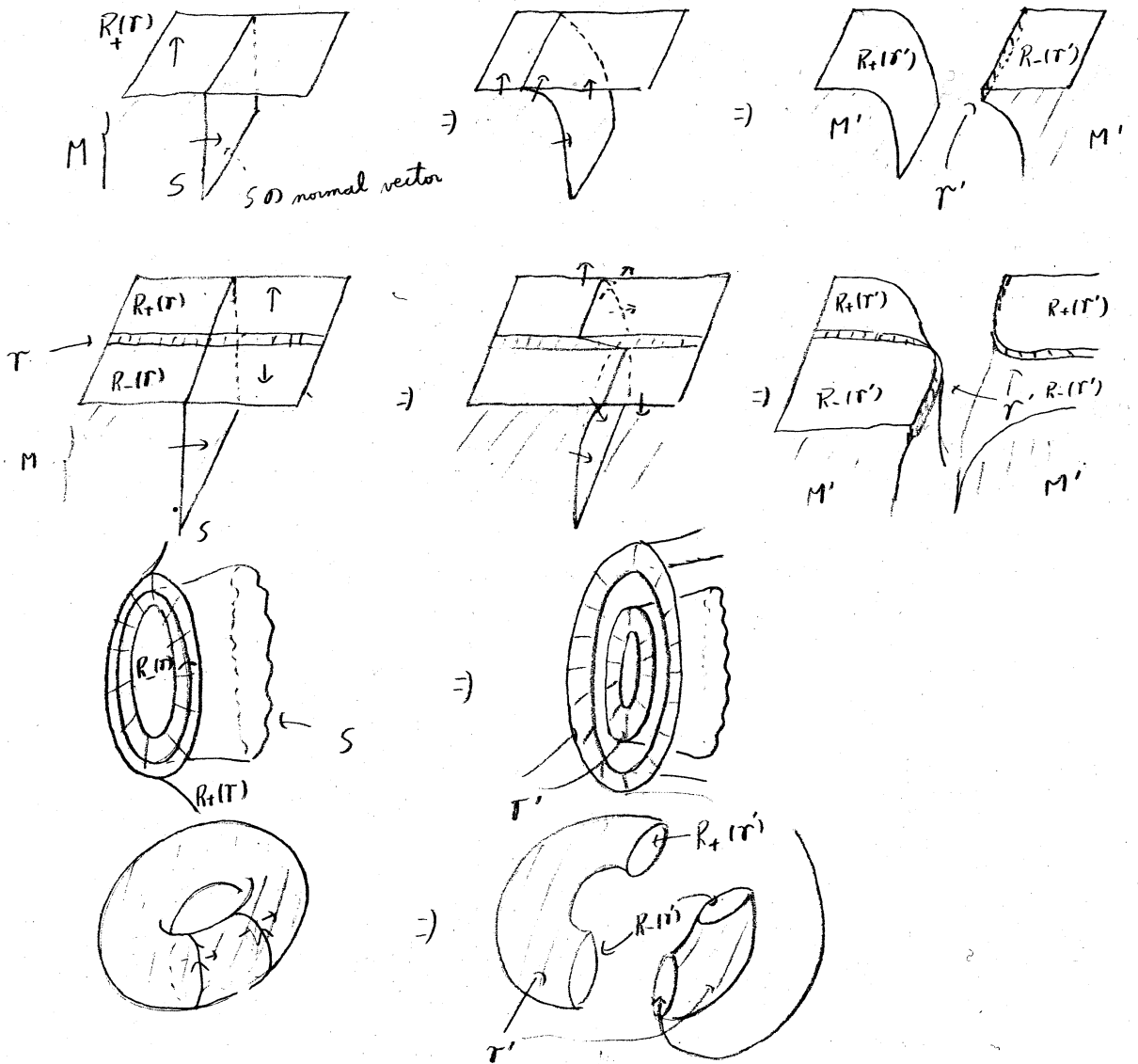
する. まず,  $(M, \mathcal{R}) \in$  a sutured mfd.  $S \in$  a properly embedded oriented surface in  $M \setminus \mathcal{R}$  の各 component は,  $\mathcal{R}$  の (1) 以下の条件があるようにする.



二の時. sutured mfd. decomposition  $(M, T) \xrightarrow{S} (M', T')$  は  
 次で定める.

•  $M' = M - \dot{N}(S)$

•  $T'$  は, 次のように定める.



定義. sutured mfd.  $(M, T)$  が decomposable とは, sutured  
 mfd. decomposition の sequence:

$$(M, \mathcal{R}) \xrightarrow{S_1} (M_1, \mathcal{R}_1) \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_m} (M_m, \mathcal{R}_m)$$

下  $(M_m, \mathcal{R}_m)$  が a product sutured mfd. となるようなものが存在する事とする。またこの sequence のことを a sutured mfd. hierarchy と呼ぶ。

sutured mfd. hierarchy の存在に関しては、次の結果がある。

定理 ([G1])  $(M, \mathcal{R})$  を connected taut sutured mfd. とする。

また  $M$  が rational homology sphere の時は、essential torus を含むとする。

この時  $(M, \mathcal{R})$  の sutured mfd. hierarchy  $(M, \mathcal{R}) \xrightarrow{S_1}$

$(M_1, \mathcal{R}_1) \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_m} (M_m, \mathcal{R}_m)$  下 "  $V$ : a component of  $R(\mathcal{R}_i)$  とすると

$S_{i+1} \cap V$  は、向きを下込め  $k$  parallel な  $k (\geq 0)$  本の non-separating simple closed curves, or arcs." となるものも存在する。

### 証明の

以下 §1. 下述の定理の概略を述べる事にする。尚、各定義、Lemma の後に (1) (2) の番号は、全  $\Gamma$  Gabai の論文に合わせたの  $\Gamma$  所々に欠番がある事を予めお断りしておく。

§ 3.

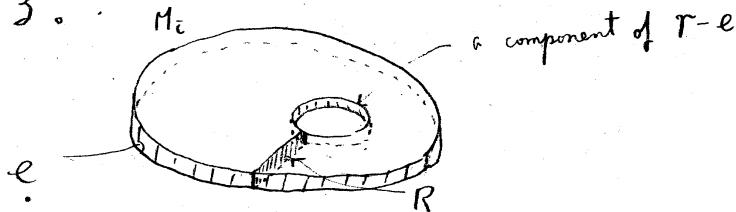
以下  $M$  を knot  $K$  の exterior  $S^3 - N(K)$  とする。

定義 3.2.  $(M, \partial M) \xrightarrow{S_1} (M_1, \mathcal{T}_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, \mathcal{T}_m)$ : a sutured mfd.

hierarchy とする。この時 boundary suture  $E_i \subset \partial M_i$  を  $\mathbb{R}$  のように定める。

$$\left. \begin{array}{l} E_0 = \partial M \\ E_i: \text{the union of those components of } E_i - \dot{N}(S_i) \text{ which are annuli and tori} \end{array} \right\}$$

1)  $e$ : a component of boundary suture とする。この時,  $e$  が boundary parallel とは,  $\mathbb{R}$  のように rectangle  $R$  が存在する事とする。



Notation 3.3.  $(M, \mathcal{T})$ : a sutured mfd.

$E$ : a distinguished set of annular component of  $\mathcal{T}$  とする。この時 sutured mfd.  $(\hat{M}, \hat{\mathcal{T}})$  を  $\mathbb{R}$  のように定める。

$\hat{M}$ : mfd. obtained by attaching 2-handle to  $M$  along each comp. of  $E$

$$\hat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} - E$$

$\mathbb{R}$  の Lemma の証明は, [G1] の中下定義  $\times M$  は sutured mfd. complexity を用いた議論を要するの  $\Gamma$   $\Gamma$   $\Gamma$  は, 省略する。

Lemma 3.6.  $(M, \partial M)$  に対し  $\mathcal{T}$  sutured mfd. decomposition の sequence

$$(M, \partial M) = (M_0, \Gamma_0) \xrightarrow{S_1} (M_1, \Gamma_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, \Gamma_m)$$

下記の様なものが存在する。

- 1)  $S_i$  : connected,  $[S_i] \neq 0 \in H_2(M_{i-1}, \partial M_{i-1})$ ,
- 2)  $V$  : a component of  $R(M_{i-1})$  とする と  $S_i \cap V$  は、向きま下  
 $\partial V$  へ parallel to non-separating simple closed curves, or arcs.
- 3)  $E_{i-1} \cap S_i$  : a union of simple closed curves,
- 4)  $\hat{\partial M}_m$  : a union of 2-spheres.

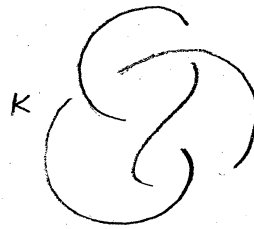
( $\hookrightarrow$  distinguished sutures とし  $E_m$  とす.)

Remark: 結果的には、上の decomp. は (少し変形して) sutured mfd. hierarchy に  
 なる事が示される。

§4.

$K$  : a knot in  $S^3$  とする。

Convention 4.1.  $S^3$  内の 2点  $x, y$  を fix する。



この時  $S^3 - \{x, y\}$  は、 $S^2 \times \mathbb{R}$  と同相。

また  $S^2$  内の 1点  $z$  を fix すると  $(S^2 - \{z\}) \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$

いまこの第2成分  $\mathbb{R}$  の射影  $h$  を考え、これを height function とする。また  $Q_\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) を (この height への) level  $\alpha$ -sphere (or plane) を表す。また level planes  $Q_\alpha$  は  $S^2 - \{x, y\}$  or  $(S^2 - \{z\}) \times \mathbb{R}$  の foliation を  $\mathcal{H}$  と表す。

定義 4.2.  $f : S^1 \rightarrow S^3$  : a presentation of  $K$  (i.e.  $f$  は embedding,  $\text{Image}(f) = K$ ) 下  $h \circ f$  が Morse function であるものとする。

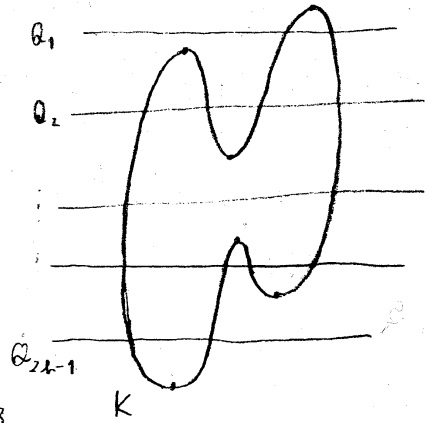
いま  $h \circ f$  の critical point は、2個あるとし、その方は、



全 7 異なる level にあるとする。  $Q_1, \dots, Q_{2k+1}$  は各 critical point の間にお level planes とする。

この時、  $K$  の width,  $w(K)$  は  
 以下定める。

$$w(K) = \min \left\{ \frac{1}{2} \sum_i |Q_i \cap f(S^1)| \right\}$$



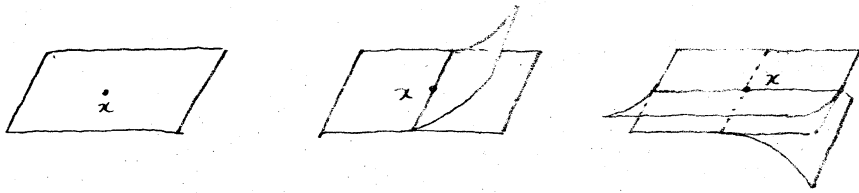
また、  $f$  が  $w(K)$  を実現している時、  $f$  は、 thin presentation であると言う。

定義 4.4.  $M'$  を  $m$ -mf. とする  $M'$  上の  $p$ -dim. lamination  $\mathcal{L}$  とは、  $M'$  内の closed subset  $N$  の分割  $N = \bigcup_{\alpha} L_{\alpha}$  ( $L_{\alpha}$ : connected) 下記の条件をみたすもの。

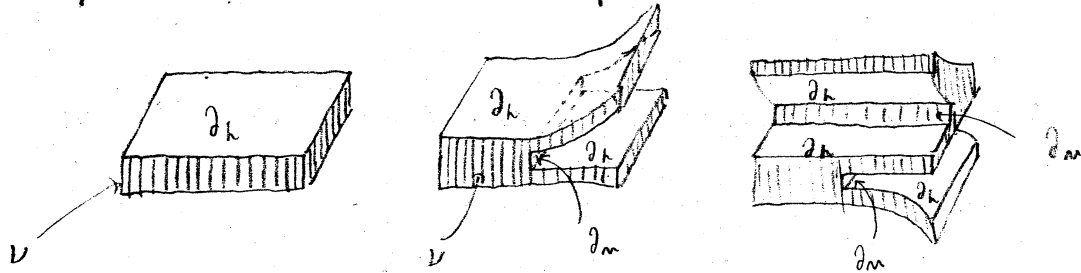
$\forall x \in M', \exists (U, \varphi)$  : local coordinate of  $x$  s.t. 各  $L_{\alpha} \cap U \subset \bigcup \cap L_{\alpha}$  の各 component は、  $\{ \varphi \in U : \varphi_1(\varphi) = \text{const}, \dots, \varphi_{n-p}(\varphi) = \text{const} \}$  の形。

また  $\bigcup_{\alpha} L_{\alpha} \cap U$  の各 component を basis とする topology が  $\mathcal{L}$  がある。これを  $L_{\alpha}$  の leaf topology と呼ぶ。

定義 4.7.  $3$ -mf.  $M$  内の branched surface (with generic branched locus)  $B$  とは、各点  $x \in B$  が次のような local model を持つ  $M$  の subspace



また  $B$  は、次のように表わす事も出来る。  $M$  内の  $3$ -dim. submf.  $N(B)$  下次のように各 leaf が  $I=[0,1]$  下あるような foliation



$\nu$  をもつものを考える。この時、 $\nu$  の各 leaf を 1 点につぶす操作を  $\sim$  下表わすと  $M/\sim \cong M$ 、この  $M/\sim$  内下の  $N(B)$  の image が  $B$  下ある。又、 $\partial N(B)$  は  $\nu$  と transverse な部分と tangent な部分に分れるの下、それぞれを  $\partial_h N(B)$ ,  $\partial_\nu N(B)$  と表わす事にする。この  $N(B)$  を  $B$  の fibered nbhd. と呼ぶ。

また、 $M$  内の lamination  $L$  が  $B$  によ、 $\tau$  carry されるとは、 $B$  の fibered nbhd.  $N(B)$  下、" $L \subset N(B)$ " かつ " $L$  は  $\nu$  に transverse" なるものが存在する事とする。  $L$  が  $B$  によ、 $\tau$  fully carried とは " $L$  が  $B$  によ、 $\tau$  carry される" かつ " $\nu$  の各 leaf は  $L$  と交わる" 事とする。

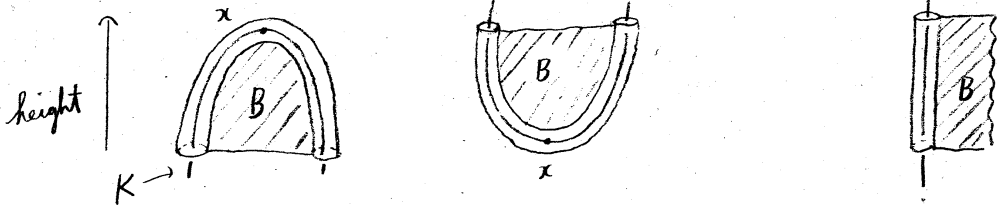
定義 4.8.  $M=S^3-N(K)$  内の branched surface  $B$  が normal form にあるとは、次の条件 1)~6) の条件をみたす事とする。

1)  $K$  は、thin presentation.

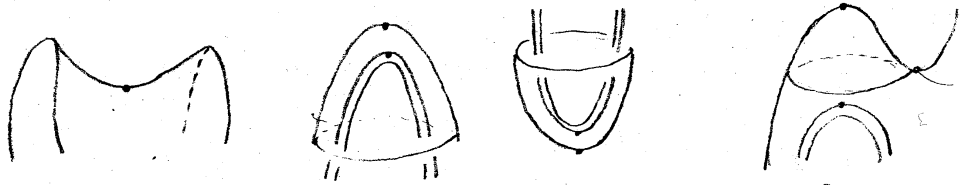
2)  $B$  は  $N(K)$  の近くで次の状況:

•  $x \in K$  が local max. or min. の時

•  $x \in K$  以外の時

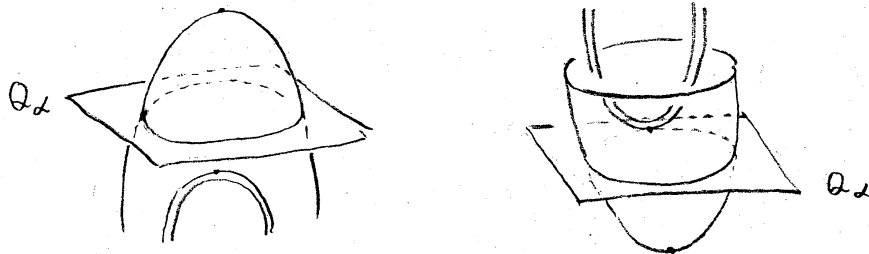


3)  $B$  は, isolated to 'saddle' 又は 'knot  $K$  の local max, or min. を  $\epsilon$  to center' を除いた  $\mathbb{R}^3$  に transverse



三つは normal form 下で

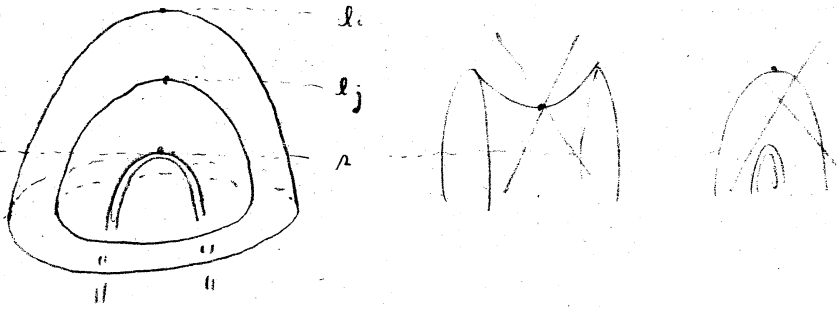
4) horizontal plane  $Q_\alpha$  下 " $Q_\alpha \cap B$  の  $\alpha$  component  $C$  下  $Q_\alpha - B$  の disk component を bound する" 様なものが存在したとするとこれは 3) の center の状況の一部。即ち  $Q_\alpha$  を上げ (or 下げ) 下ゆくと center にぶつかり,  $Q_\alpha$  を下げ (or 上げ) 下ゆくと knot の local max. (or min.) にぶつかる。



5)  $z_1, \dots, z_r$  : points of tangency of  $B$  with  $\mathbb{R}^3$  とする。

また  $z_i$  の height を  $h_i$  とする。この時  $h_1, \dots, h_r$  は,  $K$  の local max, or min. とは異なる, 互いに相異なる level 下生じる。

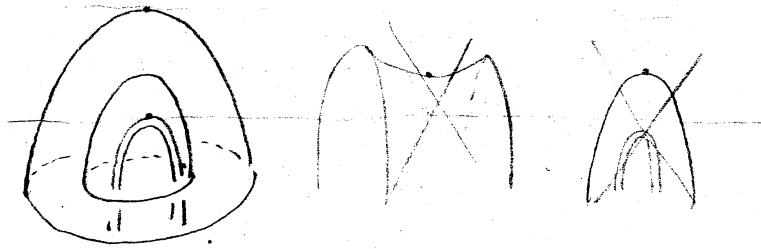
また  $z_i$  を height  $\Delta$  の  $K$  の local max. (or min.) を含む center とする. この時 " $\Delta < l_j < l_i$  (or  $l_i < l_j < \Delta$ )  $\Rightarrow z_j$  は  $l_i$  と同じ  $K$  の local max. (or min.) を含む center.



6) height fun. | branched locus of  $B$  は, Morse function  $f$ ,  $\gamma$  の critical point は,  $K$  の critical points と異なる discrete level  $f$  上にある。

定義 4.9:  $M = S^3 - N(K)$  内の lamination  $L$  が normal form にあるとは, 次の条件 1) ~ 5) をみたす事とする

- 1)  $K$  は, thin presentation,
  - 2)  $L$  の  $N(K)$  の近  $< f$  4.8 2) と同じ状況
  - 3)  $L$  を a leaf of  $L$  とする。  $L$  は (leaf topology  $f$ ) isolated to 'saddle' 又は, ' $K$  の local max. or min. を含む center' を除く  $f$  上に transverse
  - 4) horizontal plane  $Q_\Delta$   $f$  " $Q_\Delta \cap L$  の a comp.  $C$   $f$   $Q - L$  の disk component を bound する" 様なものがあるとする。
- これは 3) の状況の一部。
- 5) (4.8 5) に対応する条件)



次の Proposition は, 定義 4.8, 4.9 より直ちに従う.

Proposition 4.10.  $\parallel$   $\exists$  'lamination  $L$  ( $M$ ) は, normal form にある branched surface  $B$  により carry される' とする. この時  $L$  は, normal form にある lamination に isotopic.

定義 4.13.  $B$  を oriented 3-mf.  $P$  内の transversely oriented branched surface とする. この時  $S(B) = (M, \tau)$ ; sutured mf. defined by  $B$  を次で定める.

$$\cdot M = P - N(B)$$

$$\cdot \tau = \partial_{\text{in}} N(B)$$

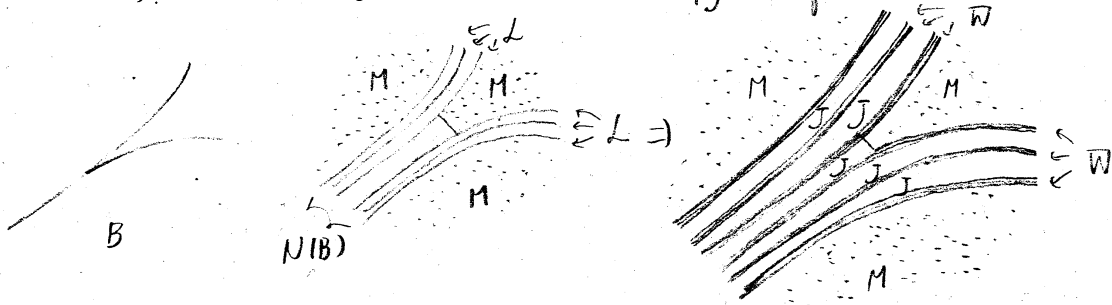
$\cdot R(\partial) = \partial_{\text{h}} N(B)$ ,  $R_+(\partial)$ ,  $R_-(\partial)$  は,  $B$  の orientation から自然に定まる.

$N(B)$  は,  $I$  による fibration  $\nu$  をもつ事と  $B$  に carry される lamination の定義及び定義 4.13 より次の Proposition は, 容易に証明出来る.

Proposition 4.14.  $B$ : a branched surface in  $P$ ,  $L$ : a lamination fully carried by  $B$ .  $W$ : a lamination obtained by thickening  $L$  とする。

この時  $S(B)$  は  $W$  の complement に natural に埋め込める (時に  $R(T) \subset \partial W$ )。また  $J = P - (W \cup M)$  は  $\nu/J$  を fibration とする

finite depth



4.15. sutured mfd. decomp. seq.  $k \geq 3$  の branched surface の構成

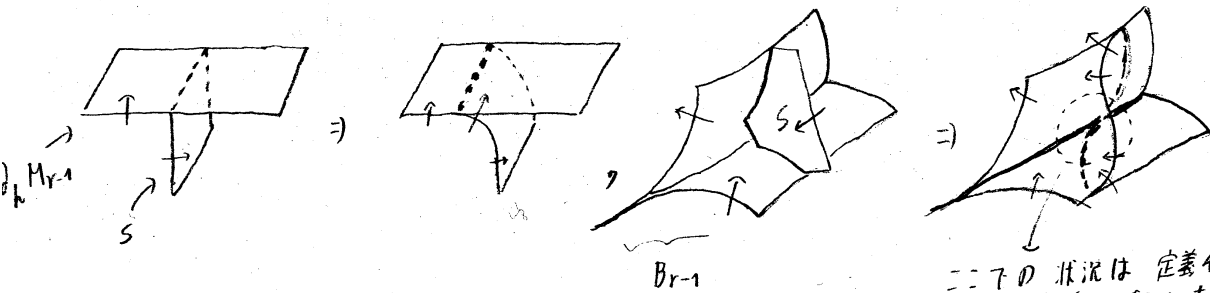
$(N, \partial N) = (M_0, \partial_0) \xrightarrow{S_1} (M_1, \partial_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, \partial_m)$ : a seq. of sutured mfd.

decomp とする。この時,  $N$  に proper に埋め込まれた branched surface (with generic branched locus)  $B_i \downarrow S(B_i) = (M_i, \partial_i)$  とする (i=1, ..., m) ようなものを実際のように帰納的に構成する

•  $B_1 = S_1$

•  $B_1, \dots, B_{r-1}$  s.t.  $S(B_i) = (M_i, \partial_i)$  が定まる とする。

$S(B_{r-1}) = (M_{r-1}, \partial_{r-1})$  より  $S_r$  は  $N - \overset{\circ}{N}(B_{r-1})$  に proper に埋め込まれた surface. 従って  $B_r$  と決めるように決めればよい。

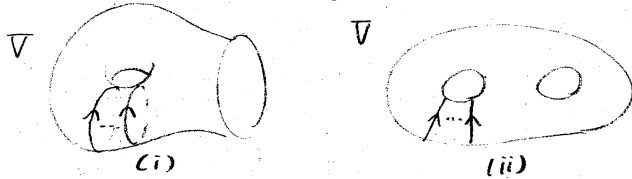


二下の状況は定義4.7 10p. の一番右の絵に同じ。

4.16 Constructing finite depth lamination from sutured mfd. decomp.

$(N, \partial N) = (M_0, \Gamma_0) \xrightarrow{S_1} (M_1, \Gamma_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, \Gamma_m)$  is a seq. of sutured mfd. decomp.

Suppose:  $V$ : a comp. of  $R(\Gamma_i)$  とすると  $V \cap S_i$  は, 向きま下込の  $\Gamma$  parallel to non-separating simple closed curves, or arcs.



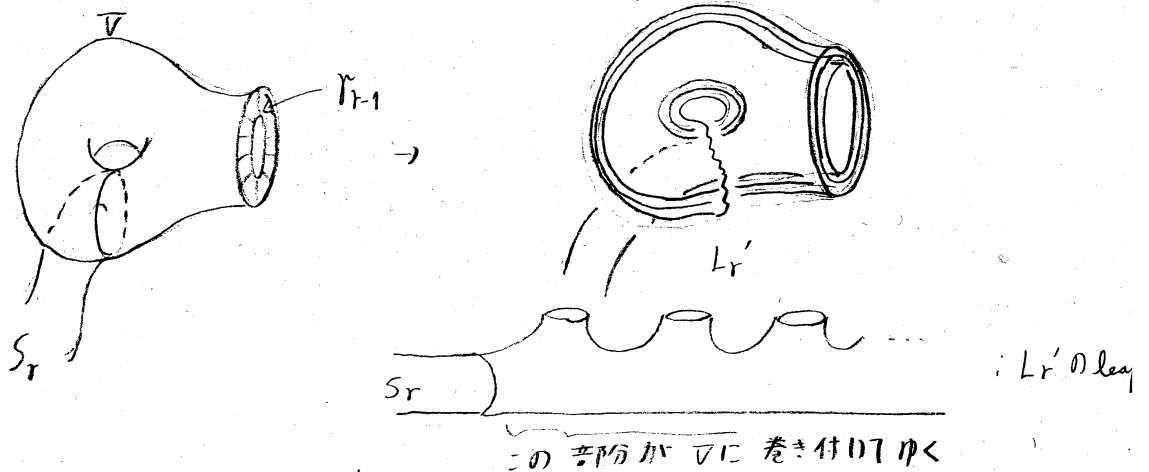
この時,  $L_i$ : finite depth lamination fully carried by  $B_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) を次のように帰納的に構成する。

•  $L_1 = S_1$

•  $L_1, \dots, L_{r-1}$  が構成されたとする。この時  $L_r$  を次のように構成する。まず 4.15 で得られる branched surface  $B_{r-1}$  から定まる  $N$  の分解  $M_{r-1} \cup W_{r-1} \cup J_{r-1}$  を考える。この時  $L_{r-1} \subset J_{r-1}$ 。 (1) まで

$S_r \subset M_{r-1}$  と考え  $S_r$  の boundary を  $R(M_{r-1})$  の component (と  $S_r$  と交わるもの) に巻き付けてゆく事により lamination  $L_r'$  を  $\Gamma_{r-1}$  と横断的であらうにものを得る。

例えば上の絵の (ii) の場合。



$J_r$  の部分は, (non-compact to) product sutured mfd. (④ 4.14) を  
 かし,  $L_r'$  は容易に  $N$  の lamination  $L_r$  に拡張される。また  
 構成より明らかなに  $L_r$  は finite depth  $\tau$  fully carried by  $Br$ .

Lemma 4.20.  $K$  is a knot in a thin presentation  $M = S^3 - \dot{N}(K)$

$(M, \partial M) = (M_0, \delta_0) \xrightarrow{S_1} (M_1, \delta_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, \delta_m)$ : a seq. of sutured mfd. decomp.

- s.t.  $\left\{ \begin{array}{l} \bullet (M_i, \delta_i) : \text{taut} \\ \bullet S_i \cap E_i : \text{向きま} \tau \text{ 込め} \tau \text{ parallel to simple closed curves.} \\ \quad \quad \quad \rightarrow \text{see 3.2} \\ \bullet V : \text{a component of } R(\delta_{i-1}) \text{ とする と } S_i \cap V \text{ は, 向きま} \tau \text{ 込め} \\ \quad \quad \quad \tau \text{ parallel to simple closed curves or arcs.} \end{array} \right.$

$L$ : 上の seq. より 4.16 のようにし  $\tau$  定まる lamination. とする。

この時, 新しく 1) a seq. of sutured mfd. decomp.

$(M, \partial M) = (N_0, \delta_0) \xrightarrow{T_1} (N_1, \delta_1) \xrightarrow{T_2} \dots \xrightarrow{T_m} (N_m, \delta_m)$   $\tau$  深をみたすものが  
 ある。

(see 4.15)

1.  $B_1, \dots, B_m$ :  $(N, \delta)$ -seq. から定まる branched surface とする と  $L$

は fully carried by  $B_m$

2.  $(N_m, \delta_m)$  は product disk, or annulus に依り,  $\tau$  切り開く事により

$(M_m, \delta_m)$  と product sutured mfd. を得る (product disk, annulus の定義は  
 [G2] と参照)

3.  $B_1, \dots, B_m$  は, normal form (see 4.8) 従,  $\tau, 4.10$  より,  $L$

は, normal form に従,  $\tau$  中ける。

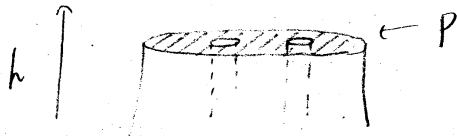


Proof. Step 1. ( $B_1 = T_1 (= S_1)$  を normal form にし,  $T$  を  $\llcorner$ )

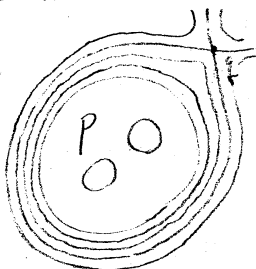
$(N_0, \delta_0) = (M, \partial M)$ ,  $T_1 = S_1$  とする。まず general position の議論により  $S_1 (= S)$  を次のような位置に  $\llcorner$ ,  $T$  を付ける。

- $S$  は,  $K$  の近  $\llcorner$   $T$  normal form (i.e.  $S_1$  は 4.8 (2) をみたす)
- $S$  は, 次の3つの状況を除く  $T$  共に横断的

- saddle
- center in normal form (see 4.8.4)
- plateau  $P$  (i.e.  $P$  は  $S$  に embed さ  $\forall$  した surface  $T$   $P \perp T$   $h$  は, const., また  $h$  は,  $P$   $T$  local max., or min.)

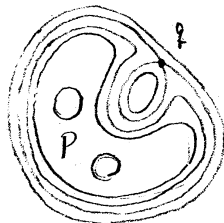


さて, plateau  $P$  ( $\subset S$ ) の近  $\llcorner$   $T$  の  $S \cap T$  の状況を見る。  $\partial P$  の少し外  $T$  は, foliation  $S \cap T$  は, product  $\partial P \times I$  (leaf は  $\partial P \times \text{pt.}$ ) の形になり,  $T$  になるが  $\hookrightarrow$  この条件により leaf を外側にたどり,  $T$  を  $h$  は必ず saddle にぶつかる事がわかる。これに注意して  $P$  を次の3つの types に分ける。



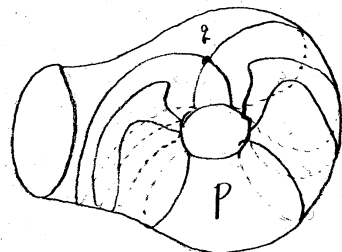
type I

$\partial P$  上の1点が pinch する



type II

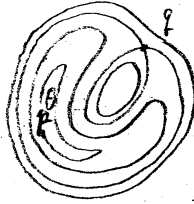
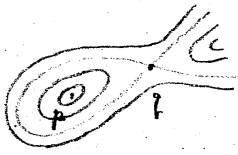
$\partial P$  の  $\alpha$  comp. 上の2点が squeeze する



type III

$\partial P$  の互いに異なる comp. 上の2点が squeeze する。

同様に各 center も次のように type I, II に分ける。

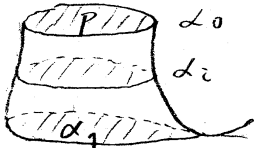


type I

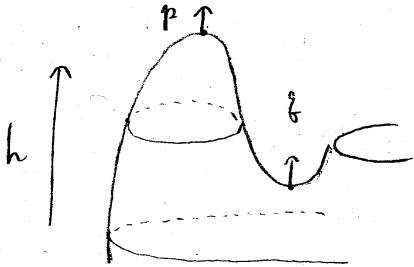
type II

この時,  $F: PXI \rightarrow S^3$  下  $F(PXI03) = P, F|_{PXI(0,1)}$  : embedding,  
 $F(PXI113) =$  となるものが存在する。

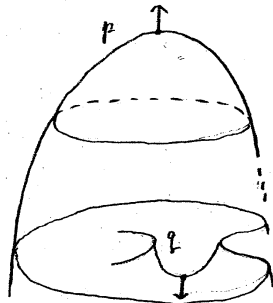
また  $\alpha_i = F(PXI_i)$  とする (従,  $\alpha_0 = P$ ).



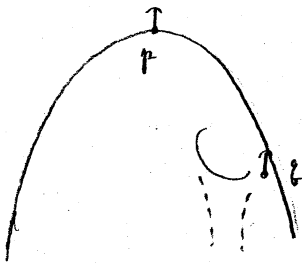
また type I, II を  $P$  (or  $P'$ ) と  $f$  下の normal direction  $n$  - 一致するか  
 どうか下通りに a 型, b 型に分ける。即ち:



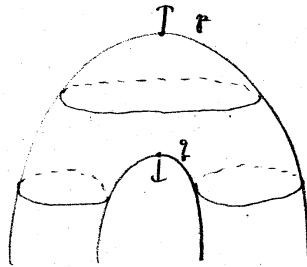
type Ia



type Ib



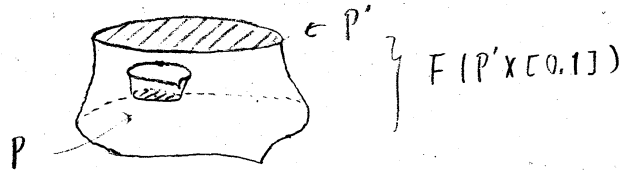
type IIa



type IIb

以上の状況のもと  $S$  の complexity (15) を 3 (plateaus の  
 個数) + 2 (centers の個数) で定める。また  $P'$  を local max.

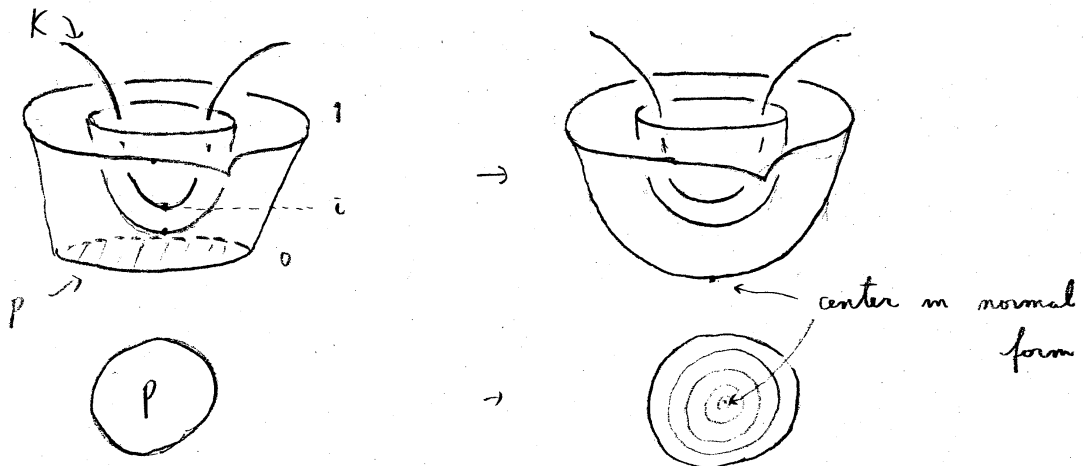
下ある plateaus のうち最も高さの低いもの,  $P \in F(P' \times (0, 1))$  に含まれる plateaus のうち最も高さの高いものとする。(注: もし  $P'$  が存在しなければ  $P$  を local min. 下ある plateau 下最も高さの高いものとする。  $P'$  も  $P$  も存在しなければ, 下の Case. 7A 行く)



Case 1.  $K \cap F(P' \times [0, 1]) \neq \emptyset$

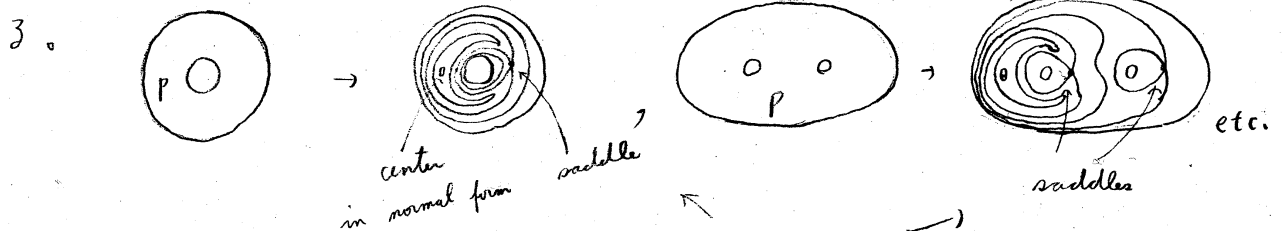
$\bar{c} = \min \{j \mid F(P' \times [0, j]) \cap K \neq \emptyset\}$  とする。即ち  $F(P' \times [0, \bar{c})) \cap$

$K = \emptyset$ ,  $F(P' \times \{\bar{c}\})$  は  $\bar{c}$  local min. point of  $K$ .  $P$  が disk の時,  $S$



を上の図のように  $P$  の mbhd. 下変形して complexity を下げた。

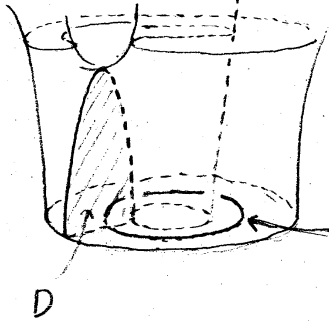
$P$  が disk 下なり時も次のように  $S$  を変形して complexity を下げ



二つの saddle は,  $\bar{c}$  より高い所にある。  
(\*) 7.6.12 新 center は, normal form 下は 1)

以下,  $K \cap F(PX[0,1]) = \emptyset$  とする.

Case 2 P is of type III

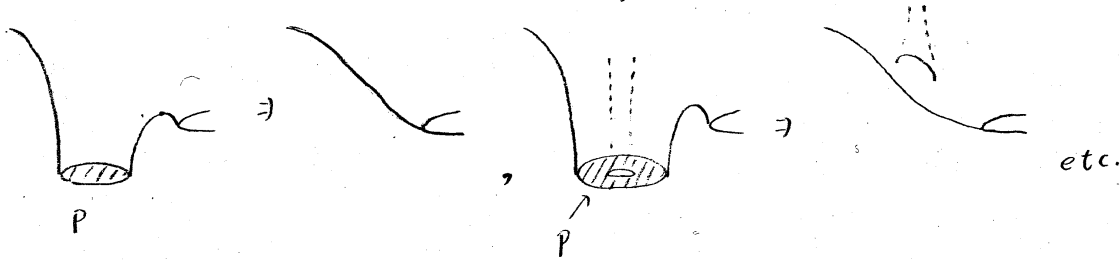


この時, 左の様に  $D \cap S = \partial D$  とする disk D がとれる。いま S 上の loop  $\rightarrow$   $\partial D$  と transverse に 1 点で交わるものが存在するから  $\partial D$  は, S 上の essential loop.

これは, S が min. genus に矛盾.

Case 3 P is of type Ia

この場合, R のようにして complexity を下げられる。



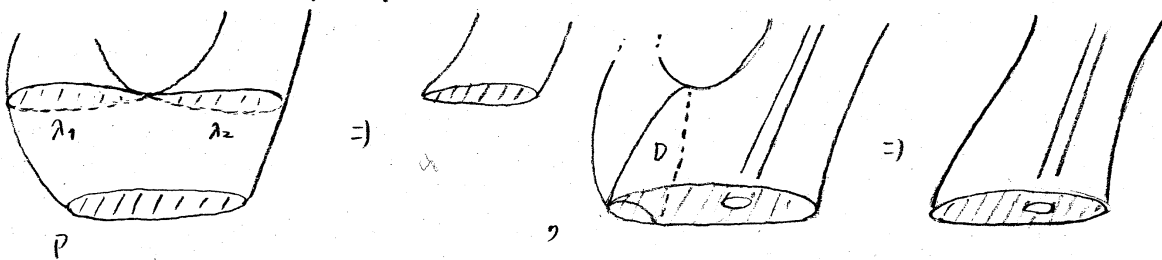
Case 4. P is of type Ib

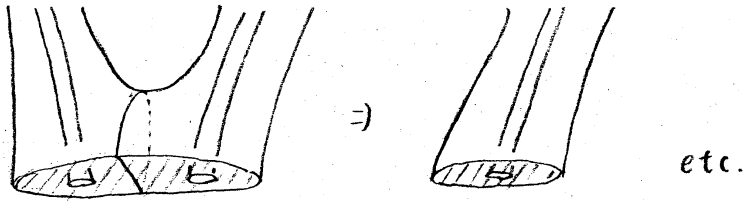


local min. として, P の取り方は 2つは center としておけば  
なるが。他方 この saddle の存在と  $K \cap F(PX[0,1]) = \emptyset$   
より上の center は, normal form として事  
が用かす: 矛盾.

Case 5. P is of type IIb

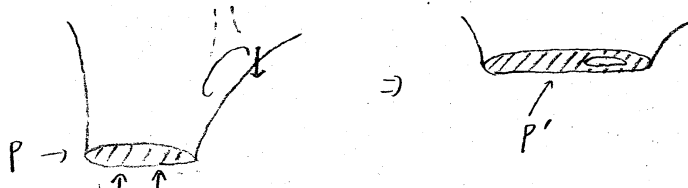
R のようにして complexity が下げられる。





Case 6.  $P$  is of type IIb

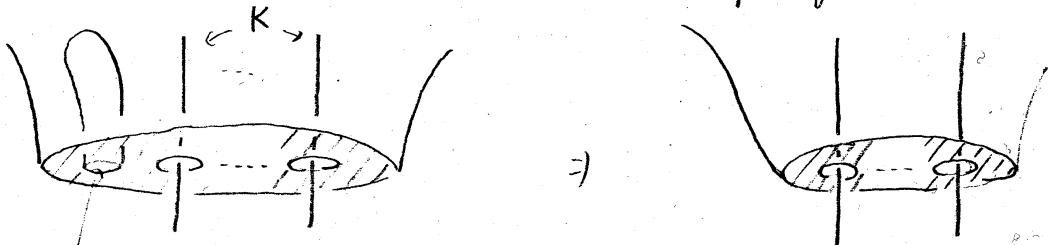
この時,  $P$  を次のように押し上げて  $P'$  と新しい plateau を作る。



注: この時  $|X(P')| = |X(P)| - 1$ , また新しく得られた surface は,  $S$  と同じ complexity をもつ。

この新しい surface に Case 1~5 の議論が適用出来れば complexity が下がる。もし適用出来なければ上と同様 surface 上の a plateau を押し上げて新しい plateau を作る。この方法下  $n$  つまでも complexity が下がるが、たしする。この時, a surface 上の a plateau  $P_r$  下  $|X(P_r)| > \frac{m(K)}{2}$  なるものが存在する。  
→ see 4.2

この時  $P_r$  の component 下 surface 上の disk を bound するものか  
 とれるからこれをを用いて次のように complexity を下げられる。



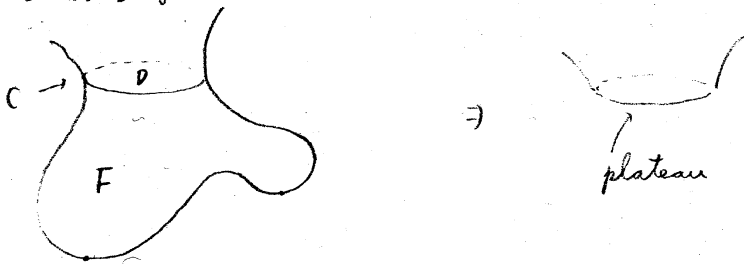
この中  $K$  は適当 (① def. of  $m(K)$ )

以上の考察により  $S$  を min. complexity にとれば  $S$  上に

plateau は存在し得る) 事がわかる。従、7. この  $S$  が normal form にある事を見る為には, あと 4.8.4) の条件をみたす事を確かめればよい。

Case 7  $\exists Q$ : level plane,  $\exists C$ : a component of  $Q \cap S$  s.t.  $C$  bounds a disk  $D$  in  $Q-S$ ,  $C$  bounds a disk  $F$  in  $S$  s.t.  $F$ : not normal form.

この時 次のように  $S_1$  を取り変える事により complexity を下げられる。



(注: Gabai は, 論文の中下 Case 7 を上のように取り扱, 7.1) したが, 実際には, Case 7 は起り得ないと思われる。

## Step. 2

Lemma 4.21.  $B$ : a branched surface in normal form w.r.t.  $K$  s.t.

$S(B)$ : taut,

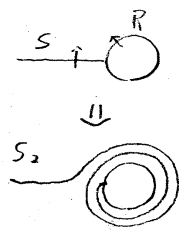
$S(B) = (M, \mathcal{R}) \xrightarrow{S} (M', \mathcal{R}')$ : a sutured mfd. decomp. s.t.

- $V$ : a comp. of  $R(M) \Rightarrow S \cap V$ : 向きまた向  $\partial V$  parallel to simple closed curves or arcs.
- $(M', \mathcal{R}')$ : taut

$R$ : the components of  $R(M)$  which intersects  $S_1$

$S_{\mathcal{R}}$ : the properly embedded surface in  $M$  obtained by oriented cut and paste surgery with  $S$  and  $\mathcal{R}$  parallel copies of  $R$ .

$(M, \tau) \xrightarrow{S_r} (M', \tau')$ : sutured mfd. decomp.  $\Rightarrow \exists \tau'$  得る  $\exists$   $\tau$  得る  
 branched surface  $\Sigma$   $B_r$  と  $\tau$  得る。 (以上  $\forall$  Lemma の仮定)  
 $\Rightarrow \exists \tau'$  s.t.  $B_r$  は rel  $\partial$  isotopy  $\tau'$  branched surface in  
 normal form に isotopic.



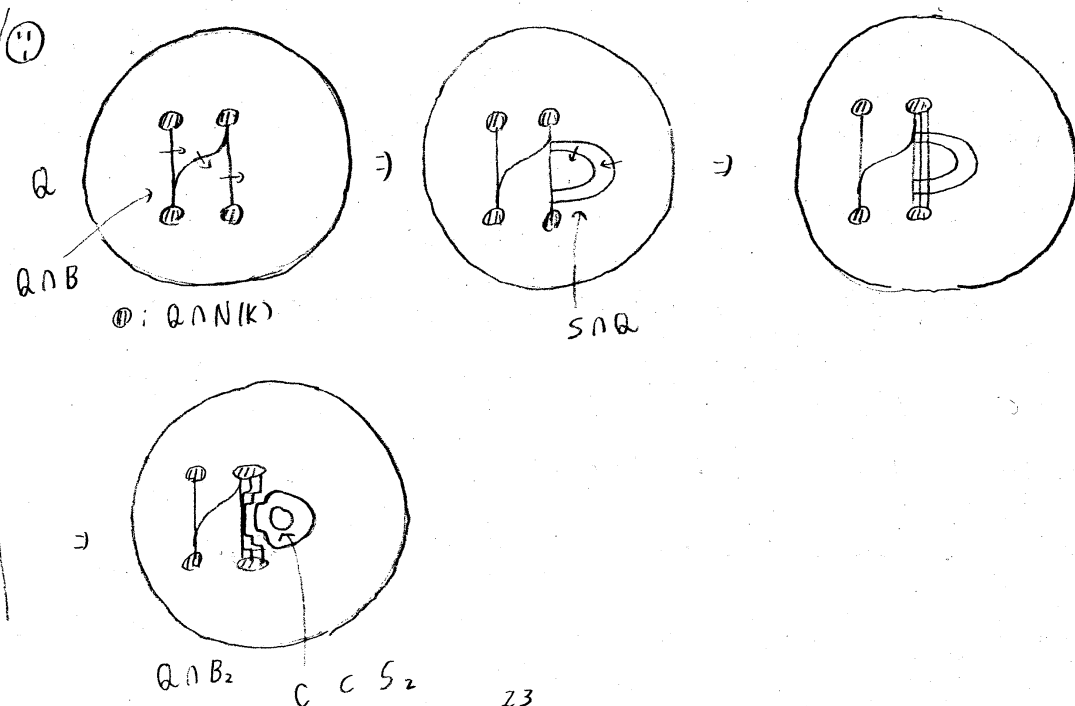
Proof.  $S_1$  を  $\Sigma$  のように isotopy 下動かす。

- $\partial S$  は,  $B$  の saddle, center の nbhd. と disjoint.
- $h|_{\partial S}$  は, Morse fun. centers in normal form
- $S$  は, isolated saddle, plateaus /  $\partial$  外  $\tau$  得る と 横断的.
- $B$  の branched locus は, Def. 4.8 b) を みます。

$\Rightarrow \tau'$

" $m$  を 十分 大きく と  $\tau$  得る,  $\Sigma$  のように 出来る:

$\Sigma > m$  と  $\tau$  得る  $\left\{ \begin{array}{l} Q \cap B_2 \text{ 上 smooth circle } C \text{ 上 } Q - (B_2 \cup N(K)) \text{ の disk component} \\ \text{ } \end{array} \right.$   
 $\Sigma$  bound する よう な もの を 含む  $\Rightarrow C \subset S_2$ , or  $C \cap B_2$  の  
 disk  $\tau$  center in normal form を 含む よう な もの を bound する "



$m'$ : the number of plateaus and centers of  $S_m$  とし  $r = m + m'$  とする。

この時,  $\mathcal{R} = \{ \text{centers and plateaus in } B_r \text{ which are contained in } S_m \}$  とし  
 $\mathcal{R}$  の complexity を  $C(\mathcal{R}) = 3 | \text{plateaus の個数} | + 2 | \text{centers の個数} |$  と定めれば,  
 後は Step 1 と同様に議論が進行して Lemma が証明出来る。

### Step 3. (Proof of Lemma 4.19)

まず  $S_1$  に Step 1 を apply して normal form  $S_1^1$  に持ってくる。

次に  $S_2$  に Step 2 を apply し 新 (1) sutured mfd. の seq. :

$$(M_0, T_0) \xrightarrow{S_1^1} (M_1, T_1) \xrightarrow{S_2^2} (M_2, T_2) \xrightarrow{S_3^3} (M_3, T_3) \xrightarrow{S_4^4} \dots \xrightarrow{S_m^m} (M_m, T_m)$$

を得る。(  $S_1^1$  と  $S_2^2$  から定まる branched surface は normal form に持ってくる )

次に  $S_3^3$  に Step 2 を apply する ... 以下二回をくり返してあげれば,

Lemma 4.19 の, sutured mfd. decomp. の seq. を得る。

Lemma 4.22.  $L \subset S^3 - \overset{\circ}{N}(K)$  : a finite depth lamination with incompressible leaves,  $W$  : a lamination obtained by thickening  $L$ ,  $(M, T)$  : a taut sutured mfd. embedded in  $S^3 - (N(K) \cup W) \Rightarrow (M, T), W$  を isotopy 下動かして  $\mathcal{R}$  のような level plane  $Q$  を見つける。

0)  $Q \cap K \neq \emptyset$

1)  $Q$  は  $\overset{\circ}{W}$  内の有限個の saddles, centers を除いて  $Q$  と横断的。

2)  $\overset{\circ}{W} \cap Q$  の component のうち  $Q - (\overset{\circ}{W} \cup N(K))$  に disk を bound するもののは高々 1 個。

3)  $Q$  は,  $M$  に横断的。  $Q \cap T$  の各 arc component は,  $T$  の



essential arc.

4)  $Q \cap (\partial M - \dot{E})$  の各 arc component は,  $\partial M - \dot{E}$  下 essential.

Proof.  $M$  を isotopy 下動かして次のようにする.

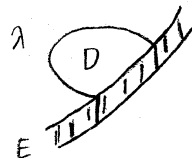
- |  $\partial M$  は, 有限個の saddles, centers を除いて level 2-spheres と横断的.
- |  $\partial T$  は, 有限個の critical points を除いて level 2-spheres と横断的.
- | 全ての tangency は, 相異なる level にある.

$h$  を  $K$  の local min. 下最も高い所にあるものの高さ,  $a$  を  $K$  の local max. 下  $h$  より高い所にあるもののうち最も低いものの高さとする.



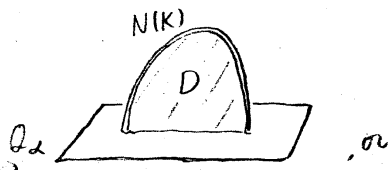
$h < a < a$  とし  $Q = Q_a$  とする。この時  $Q \cap E$  の各 component は,  $\hookrightarrow$  boundary suture  $E$  の essential arc.

$\lambda$ : an arc component of  $(\partial M \cap Q) - E$  とする

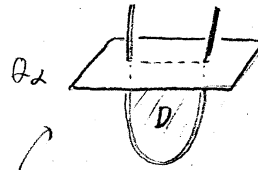


つまり,  $\lambda$  は  $\partial M - E$  下 inessential とし  $D$  を  $Y$  の compressing disk とする。

この  $Q_a, \lambda, D$  を  $S^3$  の中で見ると次の状況:



このように  $Q_a$  を low plane



このように  $Q_a$  を high plane と呼ぶ。

$H(S_{resp.}) = \{ \alpha \in [h, a] \mid Q_\alpha \text{ is a high (low resp.) plane} \}$  とおく。

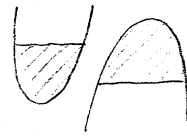
Claim  $[h, a] \neq \overline{H \cup \overline{S}}$   
 $[h, a] = \overline{H \cup \overline{S}}$  とせよ。

Proof of Claim. 以下の事実注意到す

" $I$ : an open interval of  $[h, a]$  s.t.  $\partial M \cap Q_\alpha (\forall \alpha \in I) \Rightarrow 'I \subset H \text{ or } I \cap H = \emptyset'$ "

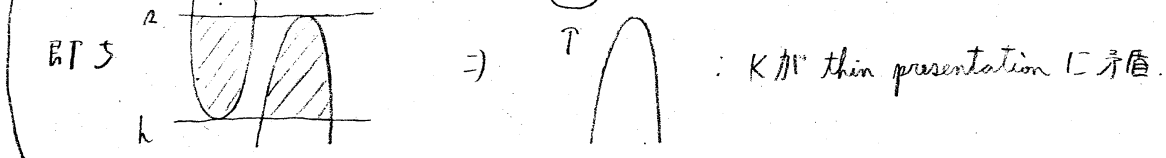
' $I \subset S$  or  $I \cap S = \emptyset$ ' または ' $h \in \bar{H}, \Delta \in \bar{S}$ '

1) また Claim が成立し 右 1) とする。 即ち,



この時 " $\exists \alpha \in [h, \Delta]$  s.t.  $\theta_\alpha$  は  $\partial M$  に tangent"

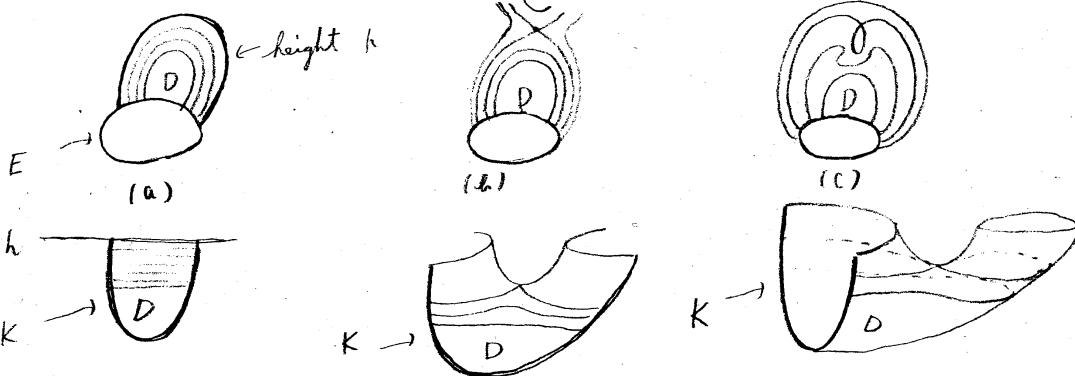
(1)  $\forall \alpha, Q_\alpha$  が  $\partial M$  とする上の注意より  $\bar{H} = \bar{S} = [h, \Delta]$ .



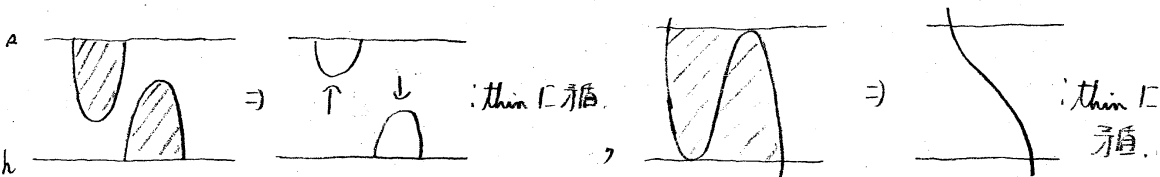
この時,  $\alpha \in (h - \epsilon, h) \Rightarrow \alpha \in H, \alpha \in (h, h + \epsilon) \Rightarrow \alpha \in S$

1) また 4) によ,  $\tau$  が  $\partial M$  上に induce する foliation を考え  $\tau$  が  $\partial M$  に沿,

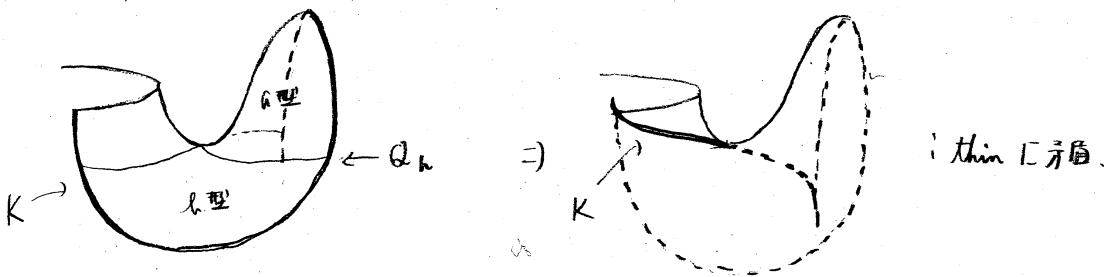
$\tau \cdot D$  を 外側に在ると,  $\tau$  が 伸く 事により 次の 3 つの cases を得る。



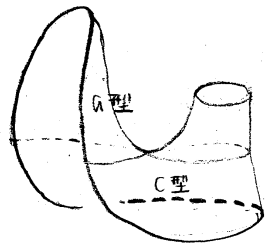
•  $Q_\alpha$  の 上に a 型, 下に a 型の disk が あり 時, 次の 2 つの 状況 を 得る。



• a 型, b 型 の 時,



• a 型, c 型 の 時,



即ち、この時  $K$  は、unknot: 矛盾。

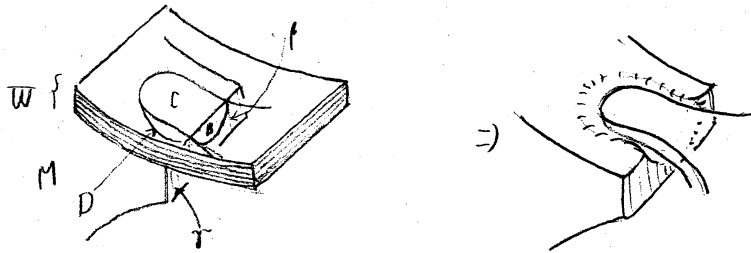
$Q_\alpha$  の取り方より A 型, C 型の組み合わせは右に事がわかる。

以上, Claim の証明終り。

Claim. より  $\exists \alpha$  ( $h < \alpha < n$ ) s.t.  $Q_\alpha \neq \text{high, low plane}$  また  $Q \cap L, Q \cap M$  としてよい。以下この  $Q_\alpha$  が Lemma の条件をみたす事をみる。

まず  $L$  が normal form より (1) は O.K.  $h, n$  の取り方より (2) も O.K.  $\alpha$  の取り方より (4) も O.K. 従って,  $\tau$ ,  $\alpha$  と (3) をみたすように  $M$  を変形する。

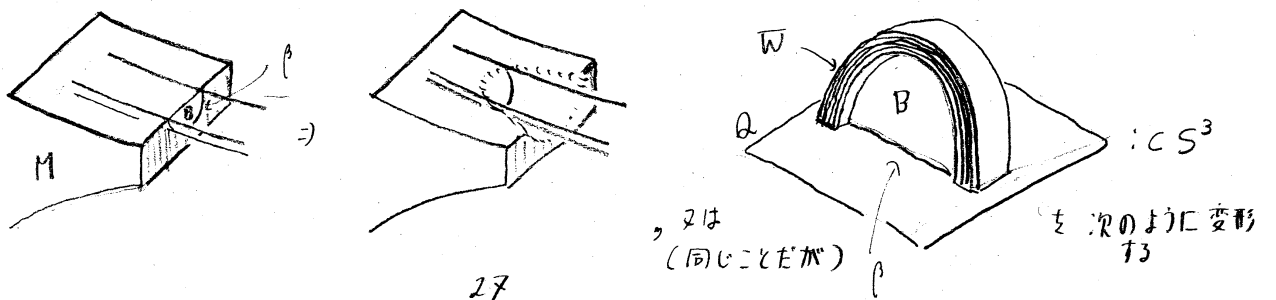
$\exists \beta$ : a comp. of  $Q \cap \tau$ ,  $\exists D \subset \mathbb{C}^2$ : a disk s.t.  $\partial D \subset \mu \cup \bar{\mu}$ ,  $\dot{D} \cap \bar{\mu} \cup \tau = \emptyset$  とする。この時, 次のように  $M$  を isotopy 下動かして  $\beta$  をはずしてしまおう。

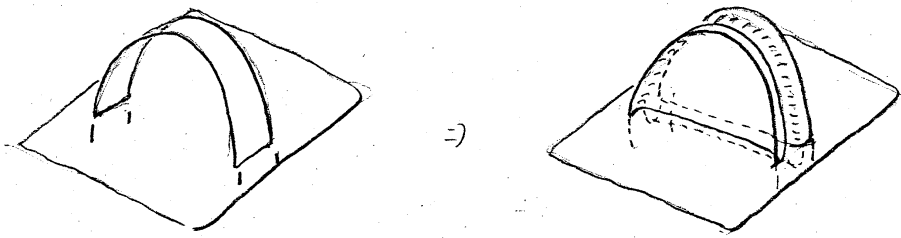


従って,  $\tau \cap Q \cap \tau$  の各 comp. は,  $Q - \bar{W} \cap \tau$  essential としてよい。

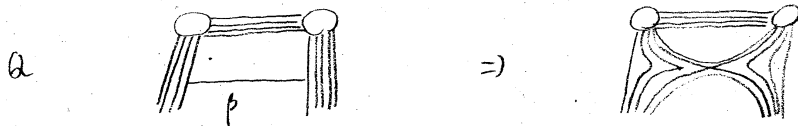
$\exists \beta$ : a comp. of  $Q \cap \tau$ , inessential in  $\tau$ , essential in  $Q - \bar{W}$  とする。

この時, 次のように  $W, M$  を動かして  $\beta$  をはずしてしまおう。





この時、 $Q \cap W$  の pattern は  $\mathbb{R}$  のように変化する。



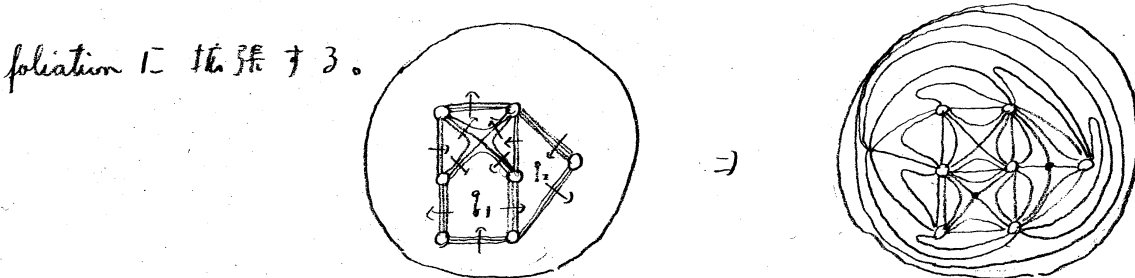
以上より  $Q \cap T$  の comp.  $\neq$  inessential なものは全て消せる。

Lemma 4.24.  $(S^3 - \dot{N}(K), \partial N(K)) \xrightarrow{S_1} (M_1, T_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, T_m)$  : a seq. of sutured mfd. decomp. s.t.   
 •  $(M_i, T_i)$  : taut   
 •  $S_i \cap \partial N(K)$  : a union of simple closed curves   
 •  $V$  : a comp. of  $R(T_{i-1})$  とすると  $S_i \cap V$  は、向き打込込の  $\neq$  parallel to non-sep. simple closed curves, or arcs.

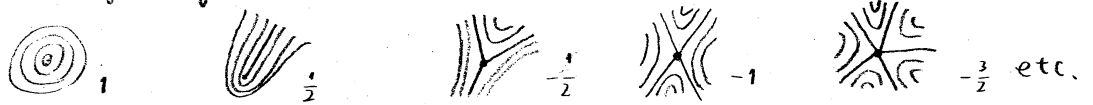
$\Rightarrow \exists Q$  : level 2-sphere s.t.   
 •  $Q \cap K \neq \emptyset$ ,   
 •  $Q \cap M$ ,   
 •  $Q \cap T$  ( $Q \cap \partial M - \dot{E}$  resp.) の各 comp. は、 $\mathcal{R}$  ( $\partial M - \dot{E}$  resp.)  $\neq$  essential   
 •  $Q \cap M = \{I_1, \dots, I_r\} \cup D$ ,  $D = \emptyset$ , or a disk,  $\sum_{i=1}^r \frac{|I_i \cap \partial T|}{4} - \chi(I_i) \leq |Q \cap K| - 1$ .

Proof. 4.16 より、 $S^3 - \dot{N}(K)$  上の finite depth lamination  $L$  が定まる。

$(M_i, T_i)$  : taut より  $L$  の各 leaf は, incompressible. 4.19, 4.10 より  $L$  は, normal form にあるとしてよい。  $Q$  を 4.22  $\neq$  得る  $M$  上の level 2-sphere とする。この時、 $Q - \dot{N}(K)$  上の lamination  $Q \cap L$  は  $\mathbb{R}$  のように singular foliation に拡張する。



二二下各 singularity 上の index を次のように定める。



二の時、 $\chi(Q - \dot{N}(K)) = \sum_i (\text{index of singularities})$  (Poincaré-Hopf index formula)

従って  $\sum_{i=1}^r \chi(Q_i) - \frac{|\partial Q_i \cap \partial N|}{4} = \sum_{i=1}^r \text{index}(Q_i \text{ の sing.})$

$\leq \sum_{i=1}^r \sum_{(i,j) \neq 0} \text{index}(Q_i \text{ の sing.}) = 1 - |Q \cap K|$

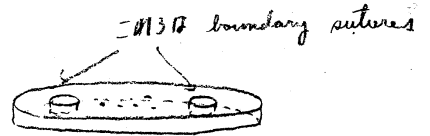
§5

Lemma 5.1.  $K$  : a knot,  $(S^3 - \dot{N}(K), \partial N(K)) \xrightarrow{S_1} (M_1, T_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, T_m)$  : a seq.

of sutured mfd. decomp. n.t.  $(M_i, T_i) - (M_m, T_m)$  : taut

$\cdot \dot{M}$  : a union of 2-spheres,  $\cdot S_i$  : not a compressible torus,  $\cdot S_i \cap \partial N(K)$  : union of circles,

$\cdot V$  : a comp. of  $R(T_{i-1})$  とすると,  $S_i \cap V$  は、向きまたは  $\partial T$  parallel to simple closed curves or arcs  $\Rightarrow$  次の (1) が成り立つ。



1)  $(M_i, T_i)$  : a product sutured mfd. 特に  $\gamma$  の形は

2)  $\exists P \subset (S^3 - \dot{N}(K))$  : a planar surface,  $\exists Q \subset (S^3)$  : a sphere n.t.

$\cdot |K \cap Q| = \mu > 0$ ,  $\cdot P \cap \partial N(K)$  : a union of  $\nu (> 0)$  coherently oriented longitudes,

$\cdot \lambda = \partial P - \partial N(K)$  : a simple closed curve n.t.  $|K \cap Q| \leq \mu - 2$

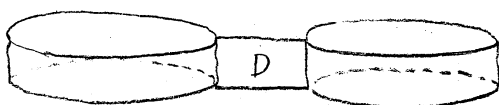
$\cdot$  no component of  $P - Q$  is a disk  $F$  with  $\bar{F} \cap Q$  connected

Q.E.D. Lemma 4.24 のようにする

Proof (of very special case.)  $E = \{A_1, \dots, A_m\}$  : boundary sutures

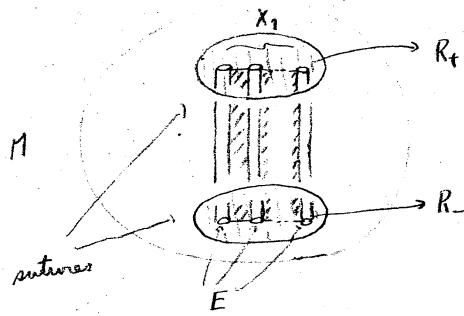
$E$  の元の間には次の relation  $\sim$  生成される equivalence relation を  $\lambda$

する:  $A_i \sim A_j \Leftrightarrow \exists D$  a rectangle of  $Q \cap M$  (D.t.)  $D \cap A_i \neq \emptyset, D \cap A_j \neq \emptyset$



$X_1, \dots, X_t$  上の equivalence class. 1) また  $t=1$  の時に Lemma を証明する  
 事にする. 結論 1) が成り立ち 1) とすると

"  $|Z_i \cap \Gamma| = 2 \Rightarrow Z_i \cap (\Gamma - E) = \emptyset$ , or  $Z_i \neq D^2$ " (注:  $Z_i \cap E \neq \emptyset$ ) とする.  
 See 4.24.

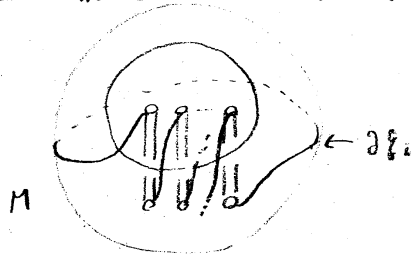


$R_\pm$ : component of  $R(\Gamma)$  を左のように定  
 める。

1) また  $K$  を 0-framed surgery した mfd. が  
 lens space 成分を含まない事より  $\partial Z_i$

が  $E$  と  $\Gamma - E$  を交互に渡るような disk  $Z_i$  は存在しない。即ち

$\# Z_i$ : disk o.t.



$D_\pm$ : the disk  $R_\pm$  reduced in size to eliminate trivial intersections with  $Q$  (?)

とすると, 従って,  $|Z_i \cap \partial D_+| + |Z_i \cap \partial D_-| \leq 2 (|\partial Z_i \cap \partial \Gamma|/4 - \chi(Z_i))$

従って Lemma 4.24 より  $\sum |Z_i \cap \partial D_+| + \sum |Z_i \cap \partial D_-| \leq 2 \sum (|\partial Z_i \cap \partial \Gamma|/4 - \chi(Z_i))$

$\leq 2|Q \cap K| - 2 = 2(\mu - 1)$ . 故に  $D_+ \cap M$  又は  $D_- \cap M$  が 成り立つ P.

一般の場合については, Gabai [G2] 参照.

§ 6.


条件を全て満たす

Lemma 6.1.  $S^2$  上には, 次のような (labell付) グラフは存在しない

1).  $\mu \neq 0$ , even) 個の edges が集まる vertex  $w$  は  $m$  ( $0 \leq m \leq \mu - 2$ ) 個

2) valency  $\mu$  vertex から出る edges は, 時計方向に  $1, 2, \dots, \mu$  と 1)

う labeling がなされる。113。

3)  一つの edge の両端に label がつけられる時、その一方は偶数、他方は奇数。

4)  $D$ : the closure of a comp. of  $S^2 - G$  which is a disk,  $D \cap M = \emptyset$  この時  $\partial D \cap G$ , 7 edge の label を読んでゆくとき  $(j, j-1, j, j-1, \dots, j, j-1) \pmod{\mu}$  という形になる。

証明略。

### §7. Proof of Theorem

Step 1. 3.6 より  $(S^2 - \overset{\circ}{N}(K), \partial N(K))$  から始まる sutured mfd. decomp. の seq. を得る。

Step 2. 4.20, Step 1 より  $S^2 - \overset{\circ}{N}(K)$  内の finite depth lamination  $L$  を得る。  $L$  が  $S^2 - \overset{\circ}{N}(K)$  の foliation  $\mathcal{F}$  に拡張したことを得る。この時 5.1 の結論 2) が成立して  $P, Q$  が存在する。とこが 6.1 よりそのように  $P, Q$  は存在しないう事になる。従って  $L$  は常に foliation  $\mathcal{F}$  に拡張する。

#### References.

- [G1] D. Gabai "Foliations and the topology of 3-mfds", J. Diff. Geom. 18(1983), 445~503
- [G2] ——— "Foliations and the topology of 3-mfds II", preprint.
- [H] J. Hempel, 3-mfds., Ann. Math. Studies 86.
- [T] W. Thurston, "Norm on the homology of 3-mfds" preprint