数理解析研究所講究録
第 579 巻 1985 年 55-68

Formation of shocks for a single conservation law

東京工芸大 工　　中根静男 (Shizuo Nakane)

§1 序

以下では次の様な初期値問題について考える

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_i(u)}{\partial x_i} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^n = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} ; t > 0\} \\ u(0,x) = \phi(x) & \text{on } \mathbb{R}_x^n \end{cases}$$

但し、$f_i \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $u(t,x)$ は $\mathbb{R}$-valued とする。(1)の非線形性のために、初期値 ϕ がどんなに滑らかであっても、解 u は一般に有限時間後には不連続になる。解の不連続点の集合を Shock と言う。

以下で考える問題は次の通りである：

問題　Shock がどのようにして発生し、どう伝播していくのか？

(1)の方程式は、保存則の方程式と呼ばれるものである。何

故かというと，自然界における質量保存則・運動量保存則・エネルギー保存則は(1)のような発散形で表現されるからである。保存則の方程式に関しては，これまでに数多くの研究があり，適当な条件の下で，解の存在と一意性が，(1)より一般のシステムの場合に保障されている。また近年，非線形波動方程式とも関連して，解の blow-up（これは shock の発生に対応する）の研究も盛んになっている。しかし，blow-up した後の解の振舞についての研究は意外に少ない。そこで，この部分に光を当てようと思う。

§2 Historical Remark.

ここでは，shock の構造にまで立ち入った研究について Survey をする。このような研究には2つの方法があり，ひとつは，elementary catastrophe theory を用いる立場，もうひとつは，特性曲線の方法で解を構成していく立場である。前者は，解の大域的性質まで一挙にしてわかってしまうという利点があるが，適用範囲が狭いことと，shock を実際に追跡していくことができないという欠点がある。一方，後者は適用範囲は広く，shock の追跡もできるが，大域的な性質を調べるのが極めて大変であるという特徴を持つ。

前者の立場で，$n=1$ の場合を扱ったのは Schaeffer [6] で

である。彼は $f=f_1$ の convexity を仮定していたが、この convexity を仮定しない場合にはもはや elementary catastrophe は適用できない。この場合は、Guckenheimer [3]、　　　によって完成した。筆者には Guckenheimer [3] が非常に興味深く感じられた。実際、以下の結果は [3] の前半を高次元の場合に拡張したものに他ならない。

さて、こうして $n=1$ のときは片づいたので、$n \geqq 2$ の場合にと移っていったのであるが、残念ながら、(1) の形の方程式で $n \geqq 2$ のときは、elementary catastrophe が適用できないことが Thom [7], Guckenheimer [4] により明らかにされた。Thom などは、従って (1) の形の方程式は物理的に意味がない、$n=1$ でシステムの場合をやるべきだ等と述べている程である。そして、これに懲りたのか、以後、特異点理論の立場から (1) を研究することはしばらく行なわれなくなり、Debeneix [2] でようやく復活する。Schaeffer が成功し、Thom が失敗した理由は、$n=1$ のときは、解の Lax 表示があり、$n \geqq 2$ のときはそれがないことにある。Debeneix は、Lax 表示を持つような高次元の保存則のシステムを導入したのである。それは、Hamilton-Jacobi 方程式と同値な保存系である。

Hamilton-Jacobi 方程式 $\longleftrightarrow$ 最小作用の原理 $\longleftrightarrow$ Lax 表示

という対応を考えると、彼の着眼は自然なものと思われる。

最近、Tsuji [8] は、逆に Hamilton-Jacobi 方程式 ($n=2$) を特性曲線の方法で解析している。

§3 解の構成 〜 特性曲線の方法

(1) の解を特性曲線の方法を用いて具体的に構成する。$f_i'(u) = a_i(u)$ とおくと、(1) の $(0, y)$ を通る特性曲線とは、

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = a_i(u(t, x(t))) \qquad x_i(0) = y_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

の解 $x = x(t)$ である。u が (1) の滑らかな解ならば、$\frac{d}{dt} u(t, x(t)) \equiv 0$ となるのは見易い。故に $u(t, x(t)) \equiv u(0, x(0)) = \phi(y)$。従って、特性曲線は次で与えられる直線になる。

(2) $\qquad x(t) = y + t\, a(\phi(y))$

(2) に付随する C^∞-写像 $H : \mathbb{R}^{1+n}_{(t,y)} \to \mathbb{R}^{1+n}_{(t,x)}$, $H_t : \mathbb{R}^n_y \to \mathbb{R}^n_x$ を次で定義する。

(3) $\qquad H(t, y) = (t, H_t(y)) = (t, y + t\, a(\phi(y)))$

すると、上の議論より、(1) の解 u は、$u(t, x) = \phi(H_t^{-1}(x))$ で与えられる。従って、H_t^{-1} が (あるいは、H^{-1} がといっても同値だが) 存在して 1 価な (t, x) では (1) の解は C^∞ になる。そうでない点では u は一般には多価になる。しかし、我々は 1 価な解が欲しいので、これを 1 価にする必要がある。ここに shock が発生する原因がある。

§4 写像Hの特異点の構造

前節の議論より、Hの特異点について調べる必要がある。

HのJacobianをJ(H)とおくと、

$$J(H) = 1 + t\sum_{i=1}^{n} a_i'(\phi(y))\frac{\partial\phi}{\partial y_i} \equiv 1 + t\lambda(y)$$ 。

今、$\lambda(y) \geqq 0$ ならば $J(H) > 0$ となり H^{-1} が存在してしまうので、次を仮定する。

(A.1) $\min_y \lambda(y) = \lambda(y^0) = -M < 0$.

$\phi \in \mathcal{S}$ ならば (A.1) は自然であろう。$t^0 = \frac{1}{M}$ とおくと、$t < t^0$ ならば $J(H) > 0$ 故、以後、$t \geqq t^0$ で考えるが、今の所、$0 \leqq t - t^0 \ll 1$, $|y - y^0| \ll 1$ のときしか扱えていないので、これも仮定する。即ち、shockが発生してから直後のことしか未だわかってないのである。次も仮定するが、これはgenericと思われる；

(A.2) $\lambda(y)$ の特異点は非退化、i.e. $\mathrm{grad}\,\lambda(y) = 0 \Rightarrow \mathrm{rank\,Hess}\,\lambda = n$.

以上の仮定の下で次を得る。但し、$\Sigma^1 = \{(t, y) \in \mathbb{R}^{1+n};\ 1 + t\lambda(y) = 0\}$。

Lemma 1 Affine座標変換により次を仮定してよい。

(4) $a_n'(\phi(y^0)) > 0$, $\quad a_i(\phi(y^0)) = a_i'(\phi(y^0)) = 0 \quad (1 \leqq i \leqq n-1)$

〈注〉 (4)の第1式は、$n=1$ のときの f の convexity に対応する。即ち、shock が発生した直後は convexity が満たされているのである。

Lemma 2　H の特異点は fold 又は cusp のみ。

〈注〉 一般に C^∞-写像 $T : \mathbb{R}^m_y \to \mathbb{R}^m_x$ の特異点が A_k-型であるとは、座標変換により、次に変換されることをいう。

$$T : \begin{cases} x_1 = y_1 \\ \quad \vdots \\ x_{m-1} = y_{m-1} \\ x_m = y_m^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} y_i y_m^i \end{cases}$$

特に A_1 型を fold、A_2 型を cusp という。

$\Sigma^{1,1} = \{(t,y) \in \Sigma^1 \,;\, (t,y)$ は H の cusp point$\}$ とおく。

Lemma 3　$\Sigma^{1,1} = \{(t,y) \,;\, 1 + t\lambda(y) = 0,\ \sum_{i=1}^n a_i(\phi(y)) \frac{\partial \lambda}{\partial y_i} = 0\}$、かつ $\Sigma^{1,1}$ は $y' = (y_1, \cdots, y_{n-1})$ で parametrize される $\mathbb{R}^{1+n}$ の codim 2 の C^∞-submanifold。

Lemma 4　$H(\Sigma^{1,1})$ は $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ で parametrize される $\mathbb{R}^{1+n}$ の codim 2 の C^∞-submanifold。i.e. $H(\Sigma^{1,1}) = \{(t,x) \,;\, t = \alpha(x'),\ x_n = \beta(x')\}$
$\alpha, \beta : C^\infty$

〈注〉Lemmas の証明は、大学2年生でもできる初等計算しか使わない。但し、Lem.2 では、Morin [5] による A_k-型特異点の特徴付けを用いる。即ち、写像

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ \quad \vdots \\ x_{m-1} = y_{m-1} \\ x_m = \varphi(y) \end{cases}$$

の特異点 0 が A_k-型 $\Longleftrightarrow$ (i) $\left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)^i \varphi(0) = 0 \quad 0 \leq i \leq k$

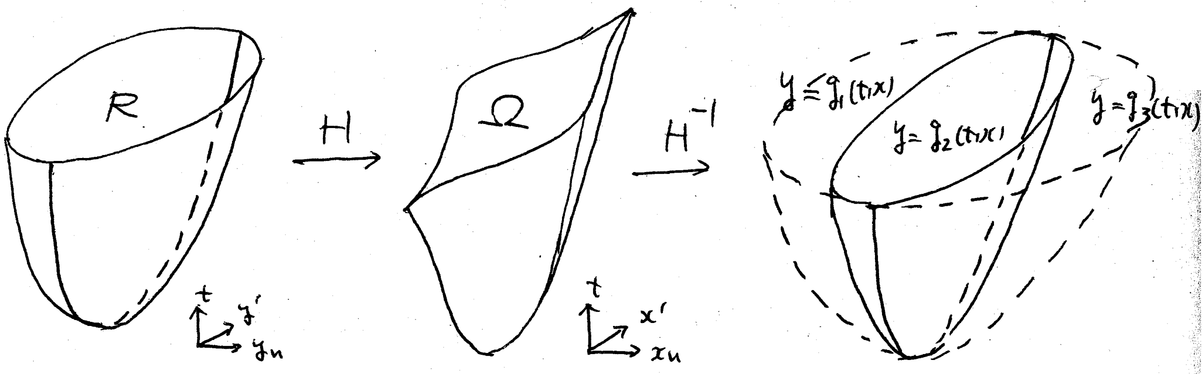
(ii) $\left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)^{k+1} \varphi(0) \neq 0$.

(iii) 写像 $y \longmapsto \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_m}, \cdots \frac{\partial^k \varphi}{\partial y_m^k}\right)$ の rank は (0 で) k 。

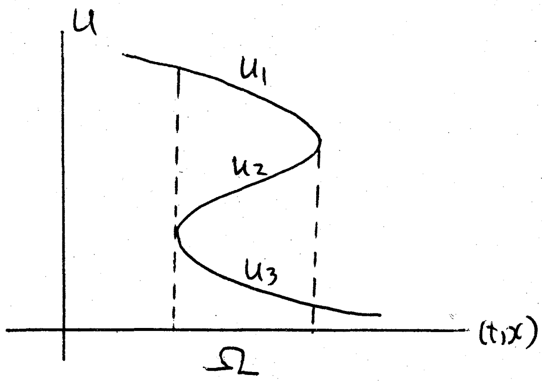
〈注〉以下の議論では使わないが、(A.1) (A.2) の仮定なしに、H の形だけから corank $H|_{\Sigma^1} = 1$ が成り立つ。従って、generic には H の特異点は A_k-型に限る。これは global な性質を見るとき重要な事実であり、例えば、Tsuji [8] の場合、A_k 型以外の特異点も現われる。これは特異点理論からすると深刻な問題である。というのは、一般に特異点の分類は不可能だからである。それは次元とも関係する。Debenaix でも $n \leq 4$ となっているのは、このためである。しかし、我々の場合は、A_k 以外は出てこないことがわかっているので、何ら心配は要らない。

§5. 解の一価化

Σ' の近くでの H, H^{-1} を図示する。。



cuspの標準形が3次式であることから、H^{-1} は上図 Ω で3価になる。これを、上図のように、$y=g_i(t,x)$ $(1\leq i\leq 3)$ とおき、$u_i(t,x)=\phi(g_i(t,x))$ とおくと、



u のグラフは右図のようになる。これを1価にしようとすると、どこかで不連続にならざるを得ない。

こうして不連続性が出てくる必然性が明らかになるのだが、すると、不連続な関数に対して(1)を意味付けなければいけない。我々は弱解として(1)を意味付ける。

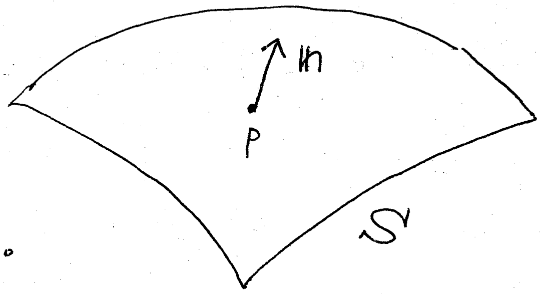
定義 u が(1)の弱解 $\Longleftrightarrow$ $\forall g(t,x)\in C_0^{\infty}(\overline{\mathbb{R}_t^+}\times\mathbb{R}_x^n)$ に対し

$$\iint_{0\,\mathbb{R}^n}^{\infty}\left(u\frac{\partial g}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}f_i(u)\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)dt\,dx+\int_{\mathbb{R}^n}g(0,x)\phi(x)\,dx=0.$$

今、u を (1) の弱解で、滑らかな超曲面 S に沿って不連続とする。$S \ni p$ における S の法線ベクトルを n とし、

$$u_{\pm}(p) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} u(p \pm \varepsilon n)$$

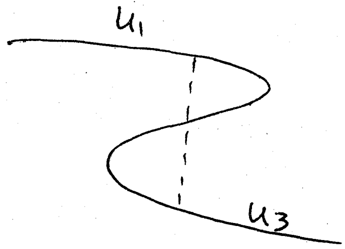
とおくと上の定義より次が従う。



〈Rankine-Hugoniot 条件〉

$$n \cdot (u_+ - u_-, f_1(u_+) - f_1(u_-), \cdots, f_n(u_+) - f_n(u_-)) = 0.$$

この条件を満たすように u を1価化するためには、右のように、u_1 から u_3 に飛ばざるを得ないことがわかる。



Shock surface を $S = \{x_n = \varphi(t, x')\}$ とおくと、Rankine-Hugoniot 条件より、φ は次を満たさねばならぬ。

$$(5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{[f_i(u)]}{[u]} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{[f_n(u)]}{[u]}$$

但し、$[u] = u_1(t, x', \varphi(t, x')) - u_3(t, x', \varphi(t, x'))$

$[f_i(u)] = f_i(u_1(t, x', \varphi(t, x'))) - f_i(u_3(t, x', \varphi(t, x')))$。

又、S は $H(\Sigma^{(1)})$ を通らねばならないので、

$$(6) \quad \varphi(\alpha(x'), x') = \beta(x')$$

をも満たさねばならぬ。(α, β については．Lem 4 を見よ)

即ち，φ は，非線形1階偏微分方程式の Cauchy 問題 (5)–(6) を満たさねばならない。

§6　(5)–(6) の C^∞ 解の存在について

Cauchy 問題 (5)–(6) は，non characteristic だが，$H(\Sigma^{(1)})$ で $u_i(t, x)$ が連続ではあるが，Lipschitz 連続でない（多分，Hölder 連続にはなっている）ために，通常の方法，例えば，特性曲線の方法と不動点定理の方法で解こうとしてもうまくいかない。たとえ解けたとしても，初期値のパラメータ y に関する滑らかさが解に伝わらないので，φ の滑らかさを示すことができない。$u_i(t, x)$ がリプシッツ連続でなくなるのは H の特異点のためであるから，これを乗り切るために，(t, x)–空間で考えるのをやめて，(t, y) 空間で考える。これは [ ] の方法である。

次のベクトル場を考えよう，

$$X = (1+t\lambda(y))\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{[f_i(u)]}{[u]}\frac{\partial}{\partial x_i}\right\} \quad \text{in } \Omega.$$

$$Y = (1+t\lambda(y))\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left\{(1+t\lambda(y))\left(\frac{[f_i(u)]}{[u]} - a_i(\phi)\right) - s a_i'(\phi)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial y_j}\left(\frac{[f_j(u)]}{[u]} - a_j(\phi)\right)\right\}\frac{\partial}{\partial y_i} \quad \text{in } \overline{R}$$

但し，R 上 $u_i = \phi(g_i(H(t, y)))$ と定義し直す。このとき次が成り立つ。

Lemma 5 $(dH)Y = X$

Lemma 6. Yの特異点集合 $= \Sigma^{1,1}$

ここでベクトル場の特異点とは、その係数がすべて消える点を意味する。即ち、上の Lemmas は、ベクトル場 X の係数の滑らかでないという意味での特異点が、H によって、Y のベクトル場としての特異点に引きもどされることを主張しているのである。

Lemma 7

$$Y\text{の Jacobi 行列 at } (t^0, y^0) = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & \rho \end{array}\right]$$

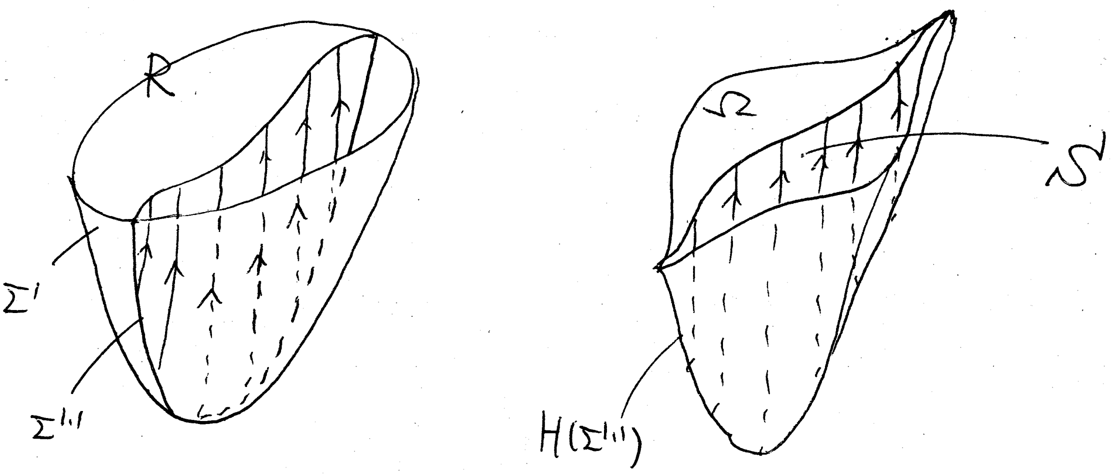
かつ $\rho < 0$, ($\lambda = \lambda(y^0) < 0$)。

従って、shearing 変換により、(t^0, y^0) は(故に $\Sigma^{1,1}$ も)、Y の saddle point になる。すると、安定多様体の理論から次が従う。

Lemma 8. $\Sigma^{1,1}$ の各点 $q = q(y^1)$ に対し、Y の積分曲線で、

その closure が q を含むものが存在する。しかもこの曲線は y' に関し C^∞ に依存する。

従って、これら積分曲線の族は R^{1+n} の超曲面を為すが、この超曲面の H による像として、C^∞ な shock surface S が定義される。



又、shock は安定多様体であるとも言えるのである。以上をまとめて、

Theorem　(A.1), (A.2) の下で、(t^0, x^0)　$(x^0 = H_{t^0}(y^0))$ の近くで C^∞ な shock surface を持つ (1) の弱解を構成できる。shock surface は (5) (6) の解として与えられる。実は、この解がエントロピー条件を満たすことも Lemma 1 より容易にわかる。

〈注〉. (1)が線形のとき, (5)は(1)に対する特性曲面の方程式と一致する。従って, 以上の事実は, 「線形方程式の解の特異性は特性曲線に沿って伝わる」という, 線形の場合によく知られた事実の非線形への拡張になっていると考えられる。その意味で, (5)(6)の解曲面を一般化された特性曲面ということができる。前頁の図の矢印は, 一般化された特性曲線を表わす。これは, Dafermos [1] が定義した generalized characteristics と一致している。

文献

[1] C. M. Dafermos, Generalized characteristics and the structure of solutions of hyperbolic conservation laws, Indiana Univ. Math. J. 26. (1977), 1097 – 1119.

[2] T. Debeneix, Certain systèmes hyperboliques quasi-linéaires. preprint.

[3] J. Guckenheimer, Solving a single conservation law, Lect. Notes Math. 468 (1975) 108 – 134.

[4] J. Guckenheimer, Shocks and rarefactions in two space dimensions, Arch. Rat. Mech. Anal. 59 (1975) 281 – 291.

[5] B. Morin; Formes canoniques des singularités d'une application differentiable, C.R. Acad. Sc. Paris. 260 (1965). 5662–5665, 6503–6506

[6] D. Schaeffer, A regularity theorem for conservation laws. Advances in Math., 11 (1973) 368-386.

[7] R. Thom, The two-fold way of catastrophe theory, Lect. Notes Math., 525 (1976) 235-252.

[8] M. Tsuji, Propagation of singularities for Hamilton-Jacobi equation, preprint.