数理解析研究所講究録
第579巻 1985年 69-90

Forced Vibrations for a Superlinear Wave Equation

早大理工　田中和永 (Kazunaga Tanaka)

0. 序

次の非線型波動方程式の周期解の存在について考える。

(1) $v_{tt} - v_{xx} + g(x, v) = f(x,t)$, $(x,t) \in (0,\pi)\times\mathbb{R}$,

(2) $v(0,t) = v(\pi,t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$,

(3) $v(x,t+2\pi) = v(x,t)$, $(x,t) \in (0,\pi)\times\mathbb{R}$.

ここで $f(x,t)$ は周期 2π をもつ関数、$g(x,\xi) \in C([0,\pi]\times\mathbb{R})$ は $g(x,0) = 0$ かつ

$$g(x,\xi)/\xi \to \infty \quad (|\xi| \to \infty)$$

をみたすと仮定する。(このような g を superlinear と呼ぶ)。

従来、g が superlinear のときは $f \equiv 0$ として非自明な解を求めることが行われている。特に、P. H. Rabinowitz は次を示した。

<u>定理 0 ([15])</u>　$g(x,\xi)$ は次の条件をみたすと仮定する。

(g_1)　$g(x,\xi)$ は ξ について狭義単調増加。

(g_2) ある $\mu > 2$, $\ell > 0$ に対して

$$0 < \mu G(x,\xi) \equiv \mu\int_0^{\xi} g(x,\tau)\,d\tau \leq \xi g(x,\xi)$$

$$\forall x \in [0,\pi] \quad \forall |\xi| \geq \ell$$

このとき、(1)−(3)（$f \equiv 0$）は無限個の弱解をもち、それらは L^∞ で非有界集合をなす。

注意1　条件 (g_2) より $|g(x,\xi)| \geq C_1|\xi|^{\mu-1} - C_2$ が従う。

P. H. Rabinowitz [13], H. Brézis - J. M. Coron - L. Nirenberg [7], J. M. Coron [9] も参照されたい。

ここでは外力項が存在する場合、すなわち $f \neq 0$ のときを考えたい。この場合の研究はまだほとんど行われていない。$f(x,t)$ が t に依存するときには (1)−(3) が解を（ただ一つでも）持つかどうかさえ知られていないと思われる。（$g(x,\xi)$ が ξ について無限大で一次の order を持つ場合、すなわち $\lim_{|\xi|\to\infty} \frac{g(x,\xi)}{\xi} < \infty$ のときには "nonresonance condition" の下で解の存在が知られている。c.f. H. Brézis [6]）。

次の結果が成立する。

定理1（[18]）　仮定 (g_1), (g_2) に加えて $g(x,\xi) \in C([0,\pi]\times\mathbb{R})$ は

(g_3) ある $s>1$, $C>0$ に対して

$$|g(x,\xi)| \le C(|\xi|^s+1) \quad \forall x\in[0,\pi]\ \forall \xi\in\mathbb{R}$$

をみたし、$f(x,t)\in L^\infty([0,\pi]\times\mathbb{R})$ は周期 2π をもつ関数とする。さらに (g_2), (g_3) に現われた μ, s に対して次を仮定する。

(g_4) $\qquad \dfrac{2}{s-1} > \dfrac{\mu}{\mu-1}$

このとき、(1)−(3) は無限個の弱解をもち、それらは L^∞ で非有界集合をなす。

上記の定理の特別な場合として

<u>定理2 ([17])</u> $\quad g(x,\xi)=|\xi|^{s-1}\xi \quad (1<s<1+\sqrt{2})$ とするとき、周期 2π を持つ任意の $f(x,t)\in L^\infty([0,\pi]\times\mathbb{R})$ に対して (1)−(3) は無限個の弱解をもち、それらは L^∞ で非有界集合をなす。

<u>注意2</u> 上の2つの定理で、f の大きさ $\|f\|_\infty$ に対して何も仮定していない。

<u>注意3</u> v が (1)−(3) の弱解であるとは、v は $L^\infty([0,\pi]\times\mathbb{R})$ に属する周期 2π の関数であり、さらに境界条件 (2), (3) をみたす任意の $\phi\in C^2([0,\pi]\times\mathbb{R})$ に対して

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} v(\phi_{tt}-\phi_{xx})\,dx\,dt + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(x,v)\phi\,dx\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\phi\,dx\,dt$$

をみたすことを意味する。

注意4　定理1において $g(x,\xi)$, $f(x,t)$ が共に C^∞ ならば、(1)－(3) のすべての弱解は C^∞ である。（c.f. [8], [13]）

問題 (1)－(3) は次の楕円型の問題と密接に関連している。

(4) $\quad -\Delta u = g(x,u)+f(x), \qquad x\in D,$

(5) $\quad u = 0, \qquad x\in\partial D.$

ここで $D\subset\mathbb{R}^N$ は滑らかな境界 ∂D をもつ有界領域、$f(x)\in L^2(D)$ であり、$g\in C(\bar{D}\times\mathbb{R})$ は次をみたすとする。

$(g_5)\quad g(x,-\xi) = -g(x,\xi) \qquad \forall x\in\bar{D}\ \ \forall\xi\in\mathbb{R}$

この問題は A. Bahri－H. Berestycki [3], M. Struwe [16], P. H. Rabinowitz [14] らにより研究され、任意の $f(x)\in L^2(D)$ に対して無限個の弱解が存在するための $g(x,\xi)$ に対する条件が求められている。彼らは問題を $H_0^1(D)$ 上の functional

$$u \longmapsto \frac{1}{2}\int_D |\nabla u|^2 dx - \int_D G(x,u)\,dx - \int_D fu\,dx$$

の critical point を求めることに帰着し、この functional に対するエネルギー評価とある種の Lusternik－Schnirelman の

理論を用いている。特に、P. H. Rabinowitz [14] の得た結果の $N=2$ の場合は、$(g_2)-(g_4)$ と類似の条件と (g_5) の下で任意の $f(x)$ に対して無限個の解の存在を示している。また、時間に関する対称性を用いることにより、常微分方程式の Hamilton 系に対する周期問題もあつかっている。我々も時間に関する対称性を用いて波動方程式 (1)−(3) の解の存在を (g_5) を仮定せずに示している。

定理 1, 2 を証明する際に、まず問題 (1)−(3) をある functional の critical point を求めることに帰着する。我々の用いる functional は H. Brézis − J. M. Coron − L. Nirenberg [7] によって導入されたもので、ある種の Legendre 変換により得られるものである。(この方法は dual variational method と呼ばれる (§1))。定理はこの functional に対して P. H. Rabinowitz [14] の方法を適用することにより証明される。このとき functional に対する L^q-評価が重要である。また定理 0 の dual variational method による簡単な証明を与えることができる。

ここでは簡単のため、定理 2 の証明を述べ、定理 1 はその概略を述べるにとどめる。最後に定理 0 の dual variational method による別証明を与える。

1. Dual Variational Method

$\Omega = (0,\pi)\times(0,2\pi)$ として、Ω 上の関数と $[0,\pi]\times\mathbb{R}$ 上の周期 2π をもつ関数を同一視する。L^p で Ω 上の p 乗可積分関数の空間を表わし、その norm を $\|\cdot\|_p$ で表わす。

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\, dt\right)^{1/p}$$

次に境界条件 (2) と周期条件 (3) を考慮した L^1 での作用素 $Au = u_{tt} - u_{xx}$ を考える。その核は次で表わされる。

$$N = \{\varphi(t+x) - \varphi(t-x) \; ; \; \varphi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \;\; 2\pi\text{-periodic}\}$$

$$= \overline{\mathrm{span}}\{\sin jx \cos jt, \; \sin jx \sin jt \; ; \; j \in \mathbb{N}\}$$

$\int_\Omega v\phi = 0 \;\; (\forall \phi \in N \cap L^\infty)$ をみたす $v \in L^1$ に対して $Au = v$ かつ $\int_\Omega u\phi = 0 \;\; (\forall \phi \in N)$ をみたす $u \in C(\overline{\Omega})$ が一意的に存在する。この u を $Kv \; (= A^{-1}v)$ とかく。次の性質はよく知られている。(c.f. [7])

$$\|Kv\|_\infty \leq C\|v\|_1$$

$$\|Kv\|_{C^{0,\alpha}} \leq C\|v\|_q \qquad \alpha = 1 - \frac{1}{q}$$

$$\int_\Omega (Kv_1)v_2 = \int_\Omega v_1 (Kv_2)$$

ここで、非線型項 $g(\xi) = |\xi|^{s-1}\xi$ にあらわれる s に対して

$$q = \frac{1}{s} + 1 \in (1, 2)$$

$$E = \{u \in L^q \; ; \; \int_\Omega u\phi = 0 \quad \forall \phi \in N \cap L^p\}$$

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

とおく。以後 Banach 空間 $(E, \|\cdot\|_q)$ で考える。$\langle\cdot,\cdot\rangle$ によ

りE^*とE、あるいはL^pとL^qの積を表わす：$(u,v)=\int_\Omega uv$。
与えられた$f\in L^\infty$に対してE上のfunctional $I(u)$を

$$I(u)=\frac{1}{2}(Ku,u)+\frac{1}{q}\|u+f\|_q^q\in C^1(E,\mathbb{R})$$

で定義する。あきらかに

$$(I'(u),\xi)=(Ku+|u+f|^{q-2}(u+f),\xi)\quad\forall u,\xi\in E$$

ゆえにuが$I(u)$のcritical point（i.e., $I'(u)=0$）ならば$Ku+|u+f|^{q-2}(u+f)\in N\cap L^p$、このとき$v=|u+f|^{q-2}(u+f)$は

$$Av+|v|^{s-1}v=f$$

をみたすことが容易にわかる。したがって(1)−(3)（$g(x,\xi)=|\xi|^{s-1}\xi$）の弱解と$I(u)$のcritical pointが一対一に対応する。（対応する弱解がL^∞に属することは[7, 8]を参照されたい。）ゆえに$I(u)$のcritical pointを求めればよい。
以上が問題(1)−(3)のdual variational formulationと呼ばれる。

2. 定理2の証明

a) functional $J(u)$

我々は[14]で行われているように$I(u)$を以下で定義するfunctional $J(u)$でおきかえる。その理由はのちに述べる命題1が$J(u)$に対してのみ成立するためである。

次の条件をみたす$\chi(\xi)\in C^\infty(\mathbb{R})$をえらぶ。

$$\chi(\xi) = 1 \quad (\xi \le 1), \quad \chi(\xi) = 0 \quad (\xi \ge 2)$$

$$-2 \le \chi'(\xi) \le 0, \quad 0 \le \chi(\xi) \le 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

ここで $u \in E$ に対して

$$\Phi(u) = a(I(u)^2 + 1)^{1/2}, \qquad a = \frac{6q+4}{2-q}$$

$$\psi(u) = \chi(\Phi(u)^{-1}(-Ku, u))$$

$$\begin{aligned} J(u) &= -\frac{1}{2}(-Ku, u) + \frac{1}{q}\|u\|_q^q \\ &\quad + \frac{1}{q}\psi(u)(\|u+f\|_q^q - \|u\|_q^q) \\ &\in C^1(E, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

とおく。

また E 上の S^1-作用を次で定義する。

$$(T_\theta u)(x,t) = u(x, t+\theta) \quad \forall u \in E \ \forall \theta \in [0, 2\pi) \simeq S^1$$

ここで、もし $f \equiv 0$ ならば、functional $I(u)$ $(= J(u))$ は S^1- invariantであること (i.e., $I(T_\theta u) = I(u) \ \forall u \ \forall \theta$) に注意する。

ここで証明なしで2つの命題を述べる (c.f. [17, 18])。命題1は $J(u)$ が S^1-invariant からどのくらいずれているかを表わしている。また命題2は $I(u)$ と $J(u)$ の関係を与えている。

<u>命題1</u>　定数 $\beta = \beta(\|f\|_\infty) > 0$ が存在して、任意の $u \in E$, $\theta \in [0, 2\pi)$ に対して

(6) $|J(T_\theta u) - J(u)| \leq \beta(|J(u)|^{(q-1)/q} + 1)$

命題2　定数 $M = M(\|f\|_\infty) > 0$ が存在して、$J(u) > M$ かつ $\|J'(u)\|_{E^*} < 1$ ならば $J(u) = I(u)$。

系1　$J'(u) = 0$ かつ $J(u) > M$ ならば $I(u) = J(u)$ かつ $I'(u) = 0$。

系2　$J(u) \in C^1(E, \mathbb{R})$ は集合 $\hat{A}_{M+1} = \{u \in E\,;\, J(u) \geq M+1\}$ 上で次の Palais - Smale 条件 (P.S.) をみたす。

(P.S.)　$\{u_j\}_{j=1}^\infty \subset E$ がある $\tilde{M} > 0$ に対して

$$M+1 \leq J(u_j) \leq \tilde{M} \quad \forall j$$

$$J'(u_j) \to 0 \quad \text{in } E^*$$

をみたせば、$\{u_j\}$ は収束部分列をもつ。

系1は命題2から直ちに従う。この系より我々は $J(u)$ の critical point で $J(u) \geq M$ なるものを求めればよい。また系2は命題2と $I(u) \in C^1(E, \mathbb{R})$ が (P.S.) をみたすことから従う。条件 (P.S.) は mountain pass lemma 等で critical point を構成する際に必要な条件である。

b) critical point の構成

作用素 K は

$$E \cap L^2 = \{ u \in L^2 ;\ \int_\Omega u\phi = 0 \quad \forall \phi \in N \cap L^2 \}$$
$$= \overline{\mathrm{span}} \{ \sin jx \cos kt,\ \sin jx \sin kt ;\ j \in \mathbb{N},$$
$$k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ j \neq |k| \}$$

上で compact self-adjoint であり、その固有値は $\{ 1/(j^2-k^2) ;\ j \neq |k| \}$、対応する固有関数は $\sin jx \cos kt$, $\sin jx \sin kt$ である。負の固有値をならべかえて

$$-\mu_1 \leq -\mu_2 \leq \cdots < 0$$

とする。ここで各 $-\mu_n$ に対して 2 次元部分空間

$$\mathrm{span} \{ e_n^+ = \sin jx \cos kt,\ e_n^- = \sin jx \sin kt \}$$

が対応するものとする $(-\mu_n = j^2 - k^2)$。さらに

$$E_n = \mathrm{span} \{ e_1^+, e_1^-, \cdots, e_n^+, e_n^- \}$$
$$E_n^\perp = \{ u \in E ;\ (e_i^+, u) = (e_i^-, u) = 0,$$
$$i = 1, 2, \cdots, n \}$$
$$P_n u = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{i=1}^{n} \left((e_i^+, u) e_i^+ + (e_i^-, u) e_i^- \right)$$
$$: E \longrightarrow E_n$$

とおく。$u \in E_n$ に対して

$$J(u) \leq -\frac{1}{2} \mu_n \|u\|_2^2 + \frac{1}{q} \|u\|_q^q + \frac{1}{q} \|u+f\|_q^q$$

が成立するので、定数 $R_n > 0$ が存在して

$$J(u) \leq 0 \quad \forall u \in E_n \ \text{with} \ \|u\|_q \geq R_n$$

とできる。ここで $0<R_1<R_2<\cdots<R_n<R_{n+1}<\cdots$ としてよい。[14] に従い，$n\in\mathbb{N}$ に対して次のようにおく。

$$B_R=\{u\in E;\ \|u\|_q\le R\},\quad D_n=B_{R_n}\cap E_n,$$

$$\Gamma_n=\{\gamma\in C(D_n,E);$$
$$\gamma(T_\theta u)=T_\theta\gamma(u)\quad \forall u\in D_n\ \forall\theta\in[0,2\pi),$$
$$\gamma(u)=u\qquad \text{if } \|u\|_q=R_n\},$$

$$U_n=\{u=\tau\frac{e^+_{n+1}}{\|e^+_{n+1}\|_q}+w;\ \tau\in[0,R_{n+1}],$$
$$w\in B_{R_{n+1}}\cap E_n,\ \|u\|_q\le R_{n+1}\}$$

$$\Lambda_n=\{\lambda\in C(U_n,E);\ \lambda|_{D_n}\in\Gamma_n,$$
$$\lambda(u)=u\quad \text{if}\quad \|u\|_q=R_{n+1}$$
$$\text{or}\quad u\in(B_{R_{n+1}}\setminus B_{R_n})\cap E_n\}$$

さらに

$$b_n=\inf_{\gamma\in\Gamma_n}\ \sup_{u\in D_n}\ J(\gamma(u)),$$

$$c_n=\inf_{\lambda\in\Lambda_n}\ \sup_{u\in U_n}\ J(\lambda(u))$$

とおく。定義より容易にわかるように $c_n\ge b_n$ である。

$c_n>b_n$ である場合に [14] において次が示されている。

<u>命題 3 ([14])</u>　$c_n>b_n\ge M+1$ を仮定する。$d\in(0,c_n-b_n)$ をえらび

$$\Lambda_n(d)=\{\lambda\in\Lambda_n;\ J(\lambda)\le b_n+d\ \text{ on } D_n\},$$

$$c_n(d)=\inf_{\lambda\in\Lambda_n(d)}\ \sup_{u\in U_n}\ J(\lambda(u)).$$

とすれば、$c_n(d)$ $(\geq c_n)$ は $J(u)$ の critical value である。

上の命題はよく知られた "Deformation Theorem" を用いることにより証明される。
"(1)−(3) の弱解の集合が有界ならば critical value の集合も有界である" こと及び、系1、命題3 に注意すれば、次の命題4より定理2は得られる。

<u>命題4</u>　部分列 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ が存在して次をみたす。

$$c_{n_j} > b_{n_j} \quad \forall j,$$
$$b_{n_j} \longrightarrow \infty \quad \text{as } j \to \infty.$$

命題4の証明は3段階からなる。

<u>Step 1:</u>　$(-Ku, u)$ の評価

まず有界線型作用素 $Q: E \to E$ を次で定義する。

$$(Qu)(x,t) = u(x,t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,\tau)\,d\tau$$

次の補題が成立する。

<u>補題1 ([17, 18])</u>　評価

(7)　$\forall \delta > 0 \ \exists C_\delta > 0 \ : \ a_n \leq C_\delta\, n^{-2(g-1)/g+\delta} \quad \forall n$

をみたす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で、次を満足するものが存在する。

$$(8) \qquad (-Ku, u) \le a_n \|u\|_q^2 \qquad \forall u \in E_n^\perp$$

注意5　楕円型方程式 (4)−(5) に対しては補題1の代わりに Gagliardo − Nirenberg の不等式が用いられている。

補題1の証明　まず $(I-Q)u \in \overline{\mathrm{span}}\{\sin jx\,;\, j \in \mathbb{N}\}$ により $(-Ku, u) \le (-KQu, Qu)$ が得られる。

$u \in E_n^\perp$ より $Qu \in E_n^\perp$ が従うことに注意して、Fourier 級数を用いて

$$Qu = \sum_{i=n+1}^{\infty} (u_i^+ e_i^+ + u_i^- e_i^-) + w$$

$$\left(\begin{array}{l} u_i^+,\ u_i^- \in \mathbb{R} \\ w \in \overline{\mathrm{span}}\{\sin jx \sin kt,\ \sin jx \cos kt\,;\, j^2 - k^2 > 0\} \end{array}\right)$$

と表わすと

$$\begin{aligned}(-KQu, Qu) &\le \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_i (|u_i^+|^2 + |u_i^-|^2) \\ &\le \Big(2\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_i^{q/(2-q)}\Big)^{\frac{2-q}{q}} \Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} (|u_i^+|^p + |u_i^-|^p)\Big)^{\frac{2}{p}} \\ &\le C\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_i^{q/(2-q)}\Big)^{(2-q)/q} \|Qu\|_q^2\end{aligned}$$

ここで、Hölder の不等式と Hausdorff − Young の不等式を用いている。μ_n が

$$\forall \delta > 0\ \exists C_\delta > 0 \ :\ \mu_n \le C_\delta\, n^{-1+\delta} \quad \forall n$$

をみたすことに注意すれば、$a_n = C\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_i^{q/(2-q)}\Big)^{(2-q)/q}$

が求めるものであることがわかる。

Step 2: b_n の評価

次の補題は $P_{n-1}Q\gamma$ ($\gamma \in \Gamma_n$) に対して Borsuk-Ulam の定理の S^1-version ([10]) を適用することにより得られる。

補題 2 ([18]) 任意の $n \in \mathbb{N}$, $\rho \in (0, R_n)$, $\gamma \in \Gamma_n$ に対して

$$\gamma(D_n) \cap \{w \in E_{n-1}^{\perp} ; \|Qw\|_q = \rho\} \neq \phi$$

補題 1, 2 より次が得られる。

補題 3 任意の $\delta > 0$ に対して $C_\delta > 0$ が存在して

$$b_n \geq C_\delta \, n^{2(q-1)/(2-q) - \delta} \quad \forall n \tag{9}$$

証明 補題 2 と b_n の定義から

$$b_n \geq \sup_{0<\rho<R_n} \ \inf_{u \in E_{n-1}^{\perp} : \|Qu\|_q = \rho} J(u)$$

補題 1 を用いると $u \in E_{n-1}^{\perp} : \|Qu\|_q = \rho$ に対して

$$\begin{aligned} J(u) &\geq -\frac{1}{2} a_{n-1} \|Qu\|_q^2 + \frac{1}{2q} \|u\|_q^q - C \\ &\geq -\frac{1}{2} a_{n-1} \rho^2 + \frac{1}{2q} \rho^q - C \end{aligned}$$

ゆえに ρ について max をとれば

$$b_n \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right) a_n^{-q/(2-q)} - C$$

(7) とあわせて求める結果を得る。

Step 3: 結論

命題4を否定すると

補題4 ある $n_0 \in \mathbb{N}$ に対して $c_n = b_n$ ($n \geq n_0$) とすれば、定数 $\gamma > 0$ が存在して

(10) $$b_n \leq \gamma n^{q} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

証明 $\lambda \in \Lambda_n$ に対して $\hat{\lambda} \in \Gamma_{n+1}$ を

$$\hat{\lambda}(T_\theta u) = T_\theta \lambda(u) \qquad u \in U_n, \ \theta \in [0, 2\pi)$$

で定義する。($D_{n+1} = \{T_\theta u ;\ u \in U_n, \ \theta \in [0, 2\pi)\}$ に注意) この $\hat{\lambda}$ に対して $\sup_{D_{n+1}} J(\hat{\lambda})$ を計算する。命題1を用いて

$$\sup_{u \in D_{n+1}} J(\hat{\lambda}(u)) \leq \sup_{\theta} \sup_{u \in U_n} \left[J(\lambda(u)) + |J(T_\theta \lambda(u)) - J(\lambda(u))| \right]$$

$$\leq \sup_{u \in U_n} \left[J(\lambda(u)) + \beta\left(|J(\lambda(u))|^{(q-1)/q} + 1\right)\right]$$

よって

$$b_{n+1} \leq c_n + \beta\left(|c_n|^{(q-1)/q} + 1\right)$$

補題の仮定の下では

$$b_{n+1} \le b_n + \beta(|b_n|^{(q-1)/q} + 1) \qquad n \ge n_0$$

これより induction により求める結果を得る(c.f. [3, 16])。

命題4の証明　$1 < s < 1+\sqrt{2}$ すなわち $\sqrt{2} < q < 2$ の下では、$\frac{2(q-1)}{2-q} > q$ となり、(9), (10) は両立しない。したがって部分列 $\{n_j\}$ で $b_{n_j} < c_{n_j}$ なるものが存在する。$b_{n_j} \to \infty$ は (9) よりあきらか。

以上により定理2が証明された。

次に一般の場合(定理1)の証明の概略を述べる。

定理1の証明の概略

$q = \frac{\mu}{\mu-1}$ (μ は (g_2) に現われた数)とおいて定理2の証明と同様に空間 E と作用素 K を定める。

$h(x, \xi)$ を $g(x, \xi)$ の ξ に関する逆関数とし、$H(x, \xi) = \int_0^\xi h(x, \tau)\,d\tau$ とおく。

次の functional の critical point と (1)-(3) の弱解が一対一に対応する。

$$I(u) = \frac{1}{2}(Ku, u) + \int_\Omega H(u+f) \quad \in C^1(E, \mathbb{R})$$

$g(x, \xi) = |\xi|^{s-1}\xi$ のときはこの functional は Palais -

Smale条件をみたしたが、一般の場合はみたすかどうかわからないので、次のようにfunctional を変形する。

$$I(\varepsilon;u) = I(u) + \int_\Omega \omega(\varepsilon u), \qquad \varepsilon \in [0,1]$$

ここで $\omega(\xi)$ は次をみたす凸関数である。

$$\omega(\xi) = |\xi|^q \qquad (|\xi| \geq 1)$$

$$\omega(\xi) = 0 \qquad (0 \text{ の近傍で})$$

このとき $\varepsilon > 0$ に対しては $I(\varepsilon;u)$ は (P.S.) をみたす。

定理1の証明はまず、$I(\varepsilon;u)$ $(\varepsilon > 0)$ の critical point を構成してから $\varepsilon \searrow 0$ として行われる。

定理2の場合と同様に(但し ε を含む形で) $J(\varepsilon;u)$, $b_n(\varepsilon)$, $c_n(\varepsilon)$ 等を定義する。定理2の証明で用いられた不等式に対応するものを列挙すると

(6)′ $|J(\varepsilon;T_\theta u) - J(\varepsilon;u)| \leq \beta(|J(\varepsilon;u)|^{(q-1)/q} + 1)$

(9)′ $\forall \delta > 0 \ \exists C_\delta > 0 \ : \ b_n(0) \geq C_\delta n^{2/(s-1)-\delta}$

(10)′ $b_n(0) \leq \gamma n^{\mu/(\mu-1)}$

となる。ε について極限操作をする必要上、命題4において部分列 $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ を ε に依存させずにえらぶ必要があるが、それは $b_n(\varepsilon)$, $c_n(\varepsilon)$ の $\varepsilon = 0$ での連続性を用いることにより達成される。くわしくは[18]を参照されたい。

注意6 上で述べた証明は時間に関する対称性を用いてい

る。(g_5) を仮定した場合（この場合は g が t に依存してもよい）の $\mathbb{Z}_2$-作用 $u \to \pm u$ に関する対称性を用いた方法については［17］を参照されたい。

3. 定理 0 の dual variational method による証明

ここでは、定理 0 の証明を dual variational method を用いて mountain pass lemma のみで行う方法を述べる。
簡単のため、$g(x,\xi) = |\xi|^{s-1}\xi$ として説明する。［17］の§4 の trancation を用いれば、容易に一般化される。
今 $f \equiv 0$ なので、(1)−(3) の解として周期 $\frac{2\pi}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ のものを求めてもよい。すなわち (1)−(3) の代わりに

(1)′ $\quad v_{tt} - v_{xx} + |v|^{s-1}v = 0, \qquad (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R},$

(2)′ $\quad v(0,t) = v(\pi,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R},$

(3)′ $\quad v(x, t + \frac{2\pi}{n}) = v(x,t), \qquad (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R},$

の非自明解 v_n を（mountain pass lemma を用いて）求めて、$\|v_n\|_\infty \to \infty$ を示せばよい。§1 と同じ記号の下で

$$\tilde{E}_n = \{ u \in E \; ; \quad u(x, t + \tfrac{2\pi}{n}) = u(x,t) \quad \forall x \, \forall t \}$$

とおくと、$I(u) \in C^1(E, \mathbb{R})$ の $\tilde{E}_n$ への制限 $I|_{\tilde{E}_n}$ の critical point と (1)′−(3)′ の弱解が一対一に対応する。補題 1 に対応するものとして次が成立する。

補題5　$a_n \searrow 0$ なる数列で次をみたすものが存在する。

$$(-Ku, u) \leq a_n \|u\|_q^2 \quad \forall u \in \tilde{E}_n$$

これを用いると容易に

$$I \geq \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right) a_n^{-q/(2-q)} \quad \text{on } \tilde{E}_n \cap \partial B_{\rho_n}$$

$$(\rho_n = a_n^{-1/(2-q)})$$

またあきらかに $e_n \in \tilde{E}_n$ で

$$I(e_n) \leq 0, \quad \|e_n\|_q \geq \rho_n$$

なるものが存在する。したがって mountain pass lemma を $\tilde{E}_n$ で用いることにより

$$b_n = \inf_{\gamma \in \tilde{\Gamma}_n} \sup_{\tau \in [0,1]} I(\gamma(\tau)) \quad \left(\geq \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right) a_n^{-q/(2-q)} \right)$$

$$\text{但し、} \tilde{\Gamma}_n = \{\gamma \in C([0,1], \tilde{E}_n) ; \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e_n\}$$

は $I(u)$ の critical value であり $b_n \nearrow \infty$ をみたす。したがって対応する弱解 v_n は $\|v_n\|_\infty \to \infty$ をみたす。

注意7　$\frac{2\pi}{n}$ 周期の解を求めることは[7]で行われている。しかし $\|v_n\|_\infty \to \infty$ は示されていない。

注意8　(g_5) を仮定する場合（g は t に依存してもよい）は[17]の§4を参照されたい。

REFERENCES

[1] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in a critical point theory and applications, J. Funct. Anal. **14** (1973), 345-381.

[2] A. Bahri, Topological results on a certain class of functionals and application, J. Funct. Anal. **41** (1981), 397-427.

[3] A. Bahri and H. Berestycki, A perturbation method in critical point theorey and applications, Trans. Amer. Math. Soc. **267** (1981), 1-32.

[4] A. Bahri and P. L. Lions, Remarques sur la théorie variationnelle des points critiques et applications, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér I, **301** (1985), 145-147.

[5] V. Benci and D. Fortunato, The dual methods in critical point theory. Multiplicity results for indefinite functionals, Annali. Mat. Pura Appl. **32** (1982), 215-242.

[6] H. Brézis, Periodic solutions of nonlinear vibrating strings and duality principles, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **8** (1983), 409-426.

[7] H. Brézis, J. M. Coron and L. Nirenberg, Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 667-689.

[8] H. Brézis and L. Nirenberg, Forced vibrations for a nonlinear wave equation, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 1-30.

[9] J. M. Coron, Periodic solutions of a nonlinear wave equation without assumption of monotonicity, Math. Ann. **262** (1983), 273-285.

[10] E. R. Fadell, S. Y. Husseini and P. H. Rabinowitz, Borsuk-Ulam theorem for arbitrary S^1 actions and applications, Trans. Amer. Math. Soc. **274** (1982), 345-360.

[11] J. P. Ollivry, Vibrations forcées pour une équation d'onde nonlinéaire, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. I, **297** (1983), 29-32.

[12] P. H. Rabinowitz, Variational methods for nonlinear eigenvalue problems, in Eigenvalues of Nonlinear Problems, Edizioni, Cremonese, Rome, 1974, 141-195.

[13] P. H. Rabinowitz, Free vibrations for a semilinear wave equation, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 31-68.

[14] P. H. Rabinowitz, Multiple critical points of perturbed symmetric functionals, Trans. Amer. Math. Soc. **272** (1982), 753-769.

[15] P. H. Rabinowitz, Large amplitude time periodic solutions of a semilinear wave equation, Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984),189-206.

[16] M. Struwe, Infinitely many critical points for functionals which are not even and applications to superlinear boundary value problems, Manuscripta Math. **32** (1980), 335-364.

[17] K. Tanaka, Infinitely many periodic solutions for the equation: $u_{tt} - u_{xx} \pm |u|^{s-1}u = f(x,t)$, Proc. Japan Acad.

61 (1985), 70-73 and Comm. in P. D. E. (to appear).

[18] K. Tanaka, Infinitely many periodic solutions for a superlinear forced wave equation, Nonlinear Analysis: T. M. A. (to appear).