数理解析研究所講究録
第579巻 1985年 91-100

R^n における Navier-Stokes 方程式の弱解の L^2-decay

広島大理 梶木屋龍治 (Ryuji Kajikiya)
広島大理 宮川鉄朗 (Tetsuro Miyakawa)

次の Navier-Stokes 方程式の初期値問題を考える。

$$
(NS)\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u - \Delta u + (u,\nabla)u + \nabla p = 0 & \text{in } R^n\times(0,\infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } R^n\times(0,\infty) \\ u(x,0) = a(x) & \text{in } R^n \end{cases}
$$

本稿では (NS) の弱解の $t\to\infty$ のときの漸近挙動について述べる。Schonbek [8] は、$n=3$ のとき、Caffarelli, Kohn, Nirenberg [1] によって構成された弱解に対してその L^2-decay を考察した。彼女は初期値が $L^2\cap L^1$ に属するとき [1] の弱解が $t\to\infty$ のとき $t^{-\frac{1}{4}}$ の order で減衰することを示した。(Kato [3] も参照せよ。) 我々はこれを改良し、かつ一般化した結果を得た。実際 $n\geq 2$ $a\in L^2\cap L^r$ $(1\leq^{\exists} r<2)$ のとき [1] によって構成された弱解の L^2 ノルムは $t\to\infty$ のとき $t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})}$ の order で減衰することを示す。これは $n=3$, $r=1$ のとき先にあげた order よりも良い評価である。これは線形熱方程式の解と同じ減衰の order である。

さらに[1]による弱解と、同じ初期値に対する線形熱方程式の解との差を評価する。これによって弱解がただ単にdecayするのではなく、熱方程式の解に近づいていきながら減衰するということがわかる。

§1 記号と定義　超関数の意味で $\mathrm{div}\, u = 0$ なる $u \in (L^r(\mathbb{R}^n))^n$ の全体を L^r_σ で表す。同様に $u \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$ であって $\mathrm{div}\, u = 0$ なる関数の全体を H^1_σ で表す。次の性質をもつ関数 u を(NS)の弱解と呼ぶ。

(i) $u \in L^\infty(0,T : L^2_\sigma) \cap L^2(0,T : H^1_\sigma)$ $(\forall T > 0)$ 及び

(ii) $\displaystyle\int_0^T \{-(u, \Phi_t) + (\nabla u, \nabla \Phi) + ((u,\nabla)u, \Phi)\}\, dt = (a, \Phi(0))$

$\forall T>0,\ \forall \Phi \in C^1([0,\infty) : H^1_\sigma \cap L^n_\sigma),\ \Phi(t) \equiv 0\ (t \fallingdotseq T)$

ここに (u, v) は L^r と $L^{r'}$ $(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1)$ の duality pairing である。

弱解に関しては、いくつかの構成の方法が知られている。[1]において次のような弱解が作られた。非線形項を時間遅れの入ったmollificationによって近似して、遅れ $\delta \to 0$ として弱解を求めようとするものである。

$$(1.1)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_k - \Delta u_k + (w_k, \nabla) u_k + \nabla p_k = 0 \\ \mathrm{div}\, u_k = 0 \quad , \quad u_k(x,0) = a(x) \qquad (k = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

ここで $w_k(x,t) \equiv \delta^{-n-1} \iint \psi(\frac{y}{\delta}, \frac{s}{\delta}) \tilde{u}_k(x-y, t-s)\, dy\, ds$, $\delta = \frac{1}{k}$

$$\tilde{u}_k(x,t) \equiv \begin{cases} u_k(x,t) & (t>0) \\ 0 & (t<0) \end{cases}$$

$0 \leqq \psi, \in C_0^\infty(R^n \times R)$, $\iint \psi\, dx\, dt = 1$, $Supp\, \psi \subset \{(x,t) : |x|^2 < t,\ 1<t<2\}$

ψ の Support に注意すれば、$w_k(x,t)$ は $u_k(\cdot, s)$ の $s \in [t-2\delta, t-\delta]$ の値によってきまることがわかる。こうして(1.1)は時間遅れの入った方程式として解くことができる。このとき $\{u_k\}$ から適当な部分列 $\{u_{k_j}\}$ をとれば、それはある関数 u に $L^2_{loc}(R^n \times [0,\infty))$ の意味で収束する。u は(NS)の弱解になる。この弱解に対して我々は次のような decay の評価を得た。

§2 主結果

定理1 $n \geqq 2$ (i) $a \in L^2_\sigma$ のとき $\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_2 = 0$

(ii) $a \in L^r_\sigma \cap L^2_\sigma$ $(1 \leqq {}^\exists r < 2)$ のとき

$${}^\exists C = C(n, r, \|a\|_r, \|a\|_2) : \quad \|u(t)\|_2 \leqq C\,(t+1)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})}$$

[3]において、Leray の解([4]参照)に対して、$n \leqq 4$ のとき(i)が、$n \leqq 4$ かつ $1<r<2$ のとき(ii)が示されている。我々の結果は $n \geqq 5$ の場合や $r=1$ の場合なども含んでいる。次に $a \in L^2_\sigma$ を初期値とする線形熱方程式(R^n の場合には Stokes 方程式と一致する。)の解を $u_0(x,t)$ と表すと、

定理２ (iii) $a \in L^2_\sigma$ のとき $\|u(t)-u_0(t)\|_2 = o(t^{\frac{1}{2}-\frac{n}{4}})$ $(t \to \infty)$

(iv) $a \in L^r_\sigma \cap L^2_\sigma$ $(1 \overset{\exists}{\leqq} r < 2)$ のとき $\|u(t)-u_0(t)\|_2 = o(t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})})$ $(t \to \infty)$

[3]において次のような結果が示されている。

$$\|u(t)-u_0(t)\|_2 = O(t^{-\varepsilon}) \quad \text{for } 0<\varepsilon<\frac{n}{4}-\frac{1}{2},\ n \leqq 4$$

(iii)はこれより精密な評価である。

§３　定理の略証　(1.1)の各u_kに対してkに無関係な評価式を導く。この不等式において$k \to \infty$とすることによりuに対しての求めるべき評価式を得る。このようにして証明する。kを任意に固定し、$u=u_k$, $w=w_k$とかくと、(1.1)は次式になる。

$$(3.1)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au + P(w,\nabla)u = 0 \quad , \ t>0 \\ \qquad\qquad u(0) = a \in L^2_\sigma \end{cases}$$

ここにPは$(L^r(R^n))^n$からL^r_σ $(1<r<\infty)$への射影であり、Aは$A=-\Delta$, $D(A)=(H^2(R^n))^n$なる作用素である。AとPは可換になる。Aのスペクトル分解を$A=\int_0^\infty \lambda\, dE(\lambda)$とする。定理を証明する前に補題を一つ準備する。

補題 ([2]参照)　(1) $\int_0^t \|w(s)\|_2^2\, ds \leq \int_0^t \|u(s)\|_2^2\, ds$

(2) $\|u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 ds = \|a\|_2^2$

(3) ${}^\exists C = C(n) > 0$: $\|E(\lambda)P(w,\nabla)u\|_2 \le C\|w\|_2\|u\|_2 \lambda^{\frac{n+2}{4}}$ $(\lambda>0)$

<u>定理1の証明</u> 簡単のために以下において、n, r, 初期値 a にのみ依存する定数は、すべて C とかく。(3.1) に u をかけて R^n 上で積分すれば、

$$\frac{d}{dt}\|u\|_2^2 + 2\|A^{1/2}u\|_2^2 = 0$$

$\rho>0$ に対して $\|A^{1/2}u\|_2^2 \ge \int_\rho^\infty \lambda\, d\|E(\lambda)u\|_2^2 \ge \frac{\rho}{2}(\|u\|_2^2 - \|E(\rho)u\|_2^2)$
この不等式を使えば、

$$(3.2)\qquad \frac{d}{dt}\|u\|_2^2 + \rho\|u\|_2^2 \le \rho\|E(\rho)u\|_2^2$$

上式右辺を評価するため (3.1) を次式に書きなおす。

$$u(t) = e^{-tA}a + \int_0^t e^{-(t-s)A}F(w,u)(s)\,ds,$$
$$F(w,u) = -P(w,\nabla)u.$$

ここに $\{e^{-tA};\ t\ge 0\}$ は A によって生成される半群である。
両辺に $E(\rho)$ を作用させ補題を使えば

$$(3.3)\qquad \|E(\rho)u(t)\|_2 \le \|e^{-tA}a\|_2 + C\cdot\rho^{\frac{n+2}{4}}\int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds$$

補題 (2) より $\|u(s)\|_2 \le \|a\|_2$ $({}^\forall s\ge 0)$ が成り立つから、(3.2), (3.3) を使って $\rho = \alpha t^{-1}$ $(\alpha>0)$ とおくと、

$$(3.4)\qquad \|u(t)\|_2^2 \le C[\alpha\cdot t^{-\alpha}\int_0^t s^{\alpha-1}\|e^{-sA}a\|_2^2 ds + (\alpha+1-\tfrac{n}{2})^{-1}\alpha^{\frac{n+4}{2}} t^{1-\frac{n}{2}}] \qquad ({}^\forall\alpha > \tfrac{n}{2}-1)$$

この式から定理1(i)が出る。(ii)を示すには、次のよく知られた不等式を使う。

$$\|e^{-sA}a\|_q \leq t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\|a\|_r \quad , 1\leq r\leq q\leq\infty$$

これを(3.4)に適用すれば次の評価式が得られる。

(3.5) $$\|u(t)\|_2^2 \leq C(t^{-n(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})}\|a\|_r^2 + t^{1-\frac{n}{2}})$$

$n\geq 3$ と仮定する。もし $n(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})\leq\frac{n}{2}-1$ ならば (3.5)式は(ii)が成り立つことを意味している。そうでないときは、$n(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}) > \frac{n}{2}-1 \geqq \frac{1}{2}$ だから、この不等式(3.5)から

$$\|u(t)\|_2^2 \leq C\, t^{-\frac{1}{2}}$$

が出てくる。これを(3.3)に代入して、(3.2)を使って前と同様に進めていくと、(3.5)より良い評価式

$$\|u(t)\|_2^2 \leq C[t^{-n(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})} + t^{-\frac{n}{2}}]$$

が得られる。これより(ii)が示される。

$n=2$ のときに(ii)を示す。この場合はもう少し複雑になる。それは $n=2$ のとき(3.5)式から解の減衰に関する情報が何も得られないためである。$n=2$ の場合には、強解の大域的存在、及び弱解のクラスでの解の一意性が知られている。([11]) 今後はこの解について考えるので(3.1)において $w=u$ とする。まず $a\in L^2_\sigma\cap L^r_\sigma$ $(1<{}^\exists r<2)$ の場合を考える。このとき $u(t)\in L^2_\sigma\cap L^r_\sigma$ $({}^\forall t\geqq 0)$ なることが示される。([2]) 従って定理1(i)により今後 $a\in L^2_\sigma\cap L^r_\sigma$ かつ $\|a\|_2$ は十分小さいと

仮定してよい。次に $2<q<(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})^{-1}$ なる q を固定して、$\|a\|_2$ が十分小さいことを使えば次の評価が得られる。(詳しい証明は[2]を見よ。)

$$\left[\int_0^t \|u(s)\|_2^q ds\right]^{1/q} \leq C\|a\|_r \cdot t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}+\frac{1}{2}}$$

従って(3.3)より

$$\|E(\rho)u(t)\|_2 \leq t^{-(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})}\|a\|_r + C\cdot\rho\cdot t^{1-\frac{2}{q}}\left[\int_0^t \|u(s)\|_2^q ds\right]^{2/q}$$
$$\leq t^{-(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})}\|a\|_r + C\cdot\rho\cdot\|a\|_r^2\cdot t^{2-\frac{2}{r}}$$

(3.2)にこれを代入し、$\rho=\alpha t^{-1}$ $(\alpha>\frac{4}{r}-2)$ として $n\geqq 3$ のときと同様の手法により求める不等式が導かれる。最後に $n=2$, $r=1$ の場合を考える。$a\in L^2_\sigma\cap L^1_\sigma\subset L^2_\sigma\cap L^{4/3}_\sigma$ であるからすでに示したことから $\|u(t)\|_2^2\leq Ct^{-\frac{1}{2}}$ が出てくる。従って(3.3)により $\|E(\rho)u(t)\|_2\leq C(t^{-\frac{1}{2}}+\rho\cdot t^{\frac{1}{2}})$ が得られるので、これを(3.2)に代入し、$\rho=\alpha t^{-1}$ $(\alpha>1)$ として前と同様の論法により求める評価が得られる。

<u>定理2の証明</u>　$v(t)=u(t)-u_0(t)$, $u_0(t)=e^{-tA}a$ とおくと、次の式が成り立つ.

(3.6)
$$\frac{dv}{dt}+Av=-P(w,\nabla)u\ ,\quad v(0)=0$$

$$\frac{d}{dt}\|v\|_2^2+2\|A^{1/2}v\|_2^2=2B(w,u,v)\ ,$$

ここで　$B(w,u,v) = -(P(w,\nabla)u, v) = -((w,\nabla)u, v)$ である。簡単な計算により　$B(w,u,v) = -B(w, v, u_0)$　がわかる。

$\|u_0(t)\|_\infty \le t^{-\frac{n}{2r}}\|a\|_r$ を使えば

$$2|B(w,v,u_0)| \le \|a\|_r^2 \cdot \|w\|_2^2 t^{-\frac{n}{r}} + \|A^{1/2}v\|_2^2$$

であるから次の式が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}\|v\|_2^2 + \|A^{1/2}v\|_2^2 \le \|a\|_r^2 \cdot \|w\|_2^2 t^{-\frac{n}{r}}$$

定理1の証明と同じように $\|A^{1/2}v\|_2^2 \ge \rho(\|v\|_2^2 - \|E(\rho)v\|_2^2)$ （$\rho > 0$）を代入すれば、

$$\frac{d}{dt}\|v\|_2^2 + \rho\|v\|_2^2 \le \rho\|E(\rho)v\|_2^2 + \|a\|_r^2 \|w\|_2^2 \cdot t^{-\frac{n}{r}}$$

(3.6) より　$v(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}F(w,u)(s)ds$　であるから、補題を用いて

$$\|E(\rho)v(t)\|_2 \le \rho^{\frac{n+2}{4}} \cdot C \cdot \int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds$$

従って、

$$\frac{d}{dt}\|v\|_2^2 + \rho\|v\|_2^2 \le C\cdot\rho^{\frac{n+4}{2}}\left(\int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds\right)^2 + \|a\|_r^2 \|w\|_2^2 \cdot t^{-\frac{n}{r}}. \tag{3.7}$$

(iii) を示す。$a \in L^2_\sigma$ を仮定する。$r=2$, $\rho = \alpha t^{-1}$ ($\alpha > \frac{n}{2}+2$) とれば (3.7) より

$$\|v(t)\|_2^2 \le C t^{1-\frac{n}{2}}\left[\left(t^{-1}\int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds\right)^2 + t^{-1}\int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds\right]$$

が得られる。$\|u(t)\|_2^2 \to 0$ $(t\to\infty)$ であるから (iii) が成り立つ。(iv) を示すには $\rho = \alpha t^{-1}$ として (3.7) を今までと同様に変形する。その際に定理1 (ii) 及び補題 (1) に注意して $\|u(t)\|_2$, $\|w(t)\|_2$ を評価すれば次の命題が導かれる。（詳しい証明は [2] を見よ。）　この命題から (iv) は明らかである。

命題 $a \in L^2_\sigma \cap L^r_\sigma$ $(1 \leq {}^\exists r < 2)$ とする。$t \to \infty$ のとき

$$\|v(t)\|_2^2 = \begin{cases} O(t^{1+\frac{n}{2}-\frac{2n}{r}}) & (\frac{n}{r}-\frac{n}{2}<1) \\ O(t^{-1-\frac{n}{2}}(\log t)^2) & (\frac{n}{r}-\frac{n}{2}=1) \\ O(t^{-1-\frac{n}{2}}) & (\frac{n}{r}-\frac{n}{2}>1) \end{cases}$$

参考文献

〔1〕 L. Caffarelli, R. Kohn and L. Nirenberg : Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. Comm. Pure Appl. Math. 35, 771-831 (1982)

〔2〕 R. Kajikiya and T. Miyakawa : On L^2 decay of weak solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$. preprint

〔3〕 T. Kato : Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions. Math. Z. 187, 471-480 (1984)

〔4〕 J. Leray : Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta Math. 63, 193-248 (1934)

〔5〕 J. L. Lions : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris. Dunod et Gauthier-Villars 1969

[6] K. Masuda : Weak solutions of the Navier-Stokes equations Tôhoku Math. J. 36, 623-646 (1984)

[7] M. Reed and B. Simon : Methods of modern mathematical physics Vol. II. ; Fourier analysis, self-adjointness. New York-London-San Francisco : Academic Press 1975.

[8] M.E. Schonbek : L^2 decay for weak solutions of the Navier-Stokes equations. Arch. Rational Mech. Anal. 88, 209-222 (1985)

[9] M.E. Schonbek : Large time behaviour of solutions to the Navier-Stokes equations. preprint

[10] H. Sohr : On the decay of weak solutions of the Navier-Stokes equations. To appear in J. Funct. Anal.

[11] R. Temam : Navier-Stokes equations. Amsterdam : North-Holland Publ. Co. 1977.