

Multiplicative η -products について

東大教養 近藤 武 (Takeshi Kondo)

本講は、实例に就き、話の理論的性質のものではない。紙数の関係で、保型関数論的な証明は省略し、とくに §2 で定義する 2 の変換については、極端に形式的に論ずる。詳しくは文献 [5] を参照された。

§1. Multiplicative η -products の基本的实例.

1.1 便宜のため、次の記号を用いる。シンボリック

$$\pi = \prod_{t=1}^{\infty} t^{r_t} \quad (r_t \in \mathbb{Z})$$

は、有限個の t を除いて $r_t = 0$ のとき、generalized permutation と呼ばれる。

$$\deg(\pi) = \sum_t t r_t$$

$$\text{ord}(\pi) = \text{L.C.M. of } \{t \mid r_t \neq 0\} \text{ 最小公倍数}$$

$$\text{wt}(\pi) = \frac{1}{2} \sum_t r_t$$

とおく。 $\text{wt}(\pi)$ は、integer または half-integer である。

gen. perm. $\pi = \prod_t t^{r_t}$ に対応して、有理式 $\prod_t (x^t - 1)^{r_t}$

を対応させ、これが多項式と成るとき、 π は Frame shape ~~と呼ばれる~~ と呼ばれる。この多項式は、明らかに有理整数係数の最高次の係数は1、しかも根は全て1の n 乗根である。逆にこのようにな多項式は、 $\prod_{\pm} (x^{\pm} - 1)^{r_{\pm}}$ の形に (一意的に) 書か表され、したがって Frame shape $\prod_{\pm} r_{\pm}$ が定まる。

1.2. $\eta(z)$ を Dedekind η -関数とする:

$$\eta(z) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad q = e^{2\pi i z}$$

$$\text{gen. perm. } \pi = \prod_{\pm} x^{\pm r_{\pm}} \quad 1 \leq \pm \leq 2$$

$$\eta_{\pi}(z) = \prod_{\pm} \eta(\pm z)^{r_{\pm}}$$

と置く。 π が

$$(1) \quad \deg(\pi) = 0 \text{ or } 24$$

$$(2) \quad \text{wt}(\pi) \text{ が 正の整数}$$

をみたすとする。 (1) により、 $\eta_{\pi}(z)$ は

$$\eta_{\pi}(z) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots \quad (a_n \in \mathbb{Z})$$

と、 q のべき級数に展開されるか?

$$(3) \quad a_1 \neq 0$$

$$(4) \quad (m, n) = 1 \implies a_1 a_{mn} = a_m a_n$$

をみたすとき、 $\eta_{\pi}(z)$ は multiplicative η -product と呼ばれる。簡単にため " π が multiplicative" と置く。

「うん」方もす。

1.3. 注目すべきことは、Leech lattice の自己同型群 $\cdot O$ から、次のようにして mult. η -products の実例が得られることである。Leech lattice は、24次元ユークリッド空間の lattice であり、 $\cdot O$ は自然数 \mathbb{N} 上の 24次元表現 ρ_0 をもつ。 $\cdot O \rightarrow \sigma$ に対して、固有多項式 $\det(xI - \rho_0(\sigma))$ を考えよと、この多項式は 1.1 で証明したようにして、Frame shape $\prod_{\pm} x^{r_{\pm}}$ が対応する。あまり厳密な書き方は「か」便宜のため

$$\sigma = \prod_{\pm} x^{r_{\pm}}$$

のような書き方をとする。さて、 $\cdot O$ は 16 千個の共役類をもつが、異なる形の Frame shape は 160 個生じ来る。このうち 90 個は、 $\text{wt}(\sigma) = 0$ (i.e. $\sum r_{\pm} = 0$) であり、他の 70 個は、 $\text{wt}(\sigma)$ が正整数 (i.e. $\sum_{\pm} r_{\pm}$ が正の偶数) とする。

$\cdot O$ の Frame shape は、[4] の Table I 7 子に示されているので参照されたい。この著しい事実は、次の定理が成立することである。

定理. (1) $\text{wt}(\sigma) = 0$ とする。 $\eta_0(z) = \prod_{\pm} \eta(tz)^{r_{\pm}}$ は次の性質をもつ：或る $\Gamma_0(N)$ を含む genus 0 の Fuchs 群が存在して、 $\eta_0(z)$ は対応する建物の (本) 生成元である。

(2) $\text{wt}(\sigma) > 0$ とするに、 $\eta_0(z)$ は multiplicative である。

る。

(1) 12711215, 以下本講ではおこなないが, 明らかに有限群の "moonshines" と密接に関連している。(cf. [1], [4])。 (2) の主張は, 部分的には何人かの人によって知られていたが, 全部をもち人と確かめたのは, 小池正夫氏である (cf [3])。

参考のため, (2) の内容をもう少し説明しよう。 $w(\sigma) > 0$ かつ 0 の元 σ の Frame shape $\sigma = \prod_{+} x^{r_x}$ は,

$$r_x \geq 0 \quad (x) \implies \text{Type C}$$

$$r_x < 0 \quad (x) \implies \text{Type E}$$

と呼ばれる。 Type C の Frame shape は, 25 個存在するが, そのうち 21 個は, 24 次 Mathieu 群の元を cycle 分割したものに該当する:

$$1^{24}, 1^8 2^8, 2^{12}, 1^6 3^6, 3^8, 1^4 2^2 4^4, 2^4 4^4, 4^6, 1^4 5^4, 1^3 2^3 4^2, \\ 6^4, 1^3 7^3, 1^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8^2, 2^2 10^2, 1^2 11^2, 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12, 12^2, 1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 14, \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 15, 3 \cdot 21, 1 \cdot 23 \quad (\text{計 } \pm 21 \text{ 個})$$

他の 4 個は,

$$2^3 \cdot 6^3, 4^2 8^2, 4 \cdot 20, 2 \cdot 2 \cdot 2$$

である。 これら 25 個の $\eta_0(z)$ は primitive cusp form であり, $\nu < 12$ multiplicative である (cf Koike [2])。

Type E の Frame shape は 45 (= 70 - 25) 個存在する

が、これは全2乗体の Eisenstein series と同値です
 が、これは $\eta_0(z)$ が multiplicative であることが分る
 (cf [3] の Table I)。例として $\sigma = 2^{16}/8$ とおくと、

$$\eta_0(z) = E(z) - E(2z)$$

$$E(z) = \frac{1}{240} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \quad a_n = \sum_{d|n} d^3$$

である。

1.4. $\cdot 0$ の元の Frame shape に対応するもの \rightarrow ほか1 =
 mult. η -products の使用は、文献の中に多数見出される。

例 1. $3^2 9^2, 6 \cdot 18, 8 \cdot 16$
 $\frac{4^{16}}{2^4 8^4}, \frac{8^8}{4^2 16^2}, \frac{4^5 8^5}{2^2 16^2}$

最初の3つは、Jacobilli (未発表) が述べたものであり、上記
 引用した Koike [2] にも扱われている。5, 6番目のもの
 もその中に見出される。最後のものは、本年1月小池氏に指
 摘されたものである。今までの例は、全2 degree が24のもの
 であり、 $\deg(\pi) = 0$ の例を1つあげておこう:

例 2. $\pi = \frac{2^{10}}{144}$ とおくと

$$\eta_{\pi}(z) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

ここで a_n は、 $x^2 + y^2 = n$ の整数解の数が $\frac{d(n)}{4}$

$$a_n = \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ odd}}} (-1)^{\frac{d-1}{2}}$$

と書ける。これから $\eta_{\pi}(z)$ が mult. η -product であることがわかる。なお、上の等式は最初の等式は、古典的な公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = \theta_3(2z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1})^2$$

を変形したもので、 $q=1$ の等式は自明である。

このほかにも、mult. η -products の実例は多数存在するが、それらと $\cdot 0$ の六の Frame shape に対応するものとの関係を探るための、本講の目的がある。

§2. W-変換と T-変換.

2.1. 上記の目的のため、2種類の変換を考へる。一般に、gen. perm $\pi = \prod_{*} t^{r_t}$ と正整数 $Q=24$ に対し、

$$(5) \quad \pi * Q = \prod_{*} \left(\frac{Qt}{(Q,t)^2} \right)^{r_t}$$

とおく。 (Q, t) は Q と t の最大公約数を表す。 π が、(1), (2) を満たすとき、(i.e. $\deg(\pi) = 0$ または $24 \nmid \text{wt}(\pi) = \sum r_t$) 次の条件を満たす最小の自然数 N をとる:

$$(6) \quad \text{ord}(\pi) \mid N \quad \text{i.e.} \quad t \mid N \quad \forall t \neq 0$$

$$(7) \quad \sum_{*} \frac{N}{t} r_t \equiv 0 \pmod{24}$$

$$(8) \quad D_{\pi} \mid N. \quad \text{ここで } D_{\pi} \text{ は、体 } \mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{\text{wt}(\pi)} \prod_{*} t^{r_t}}) \text{ の判別式を表す。} \quad \text{よって } \prod_{*} t^{r_t} \text{ は有理数と見做す。}$$

「3」。

N の約数 $Q > 1$ の $(Q, \frac{N}{Q}) = 1$ を満たす Q に対して変換 (5) を考える。このとき

$$\pi * Q = \pi * W_{Q,N}$$

と書く。このように変換を W -変換という。これは、保型関数論の Atkin-Lehner の変換と呼ばれるものと同じだが、これについては [1], [4], [5] を参照。

注意。 $\omega(\sigma) > 0$ なる $\cdot 0$ の元の σ に対して、 $\sigma * W_{Q,N}$ は再び $\cdot 0$ の元の Frame shape になるが、 $\deg(\sigma * W_{Q,N}) = 0$ になる。また次の定理が成立すると思われた:

“定理” π を (1), (2) を満たす gen. perm とする。
 $\eta_{\pi}(z)$ が multiplicative ならば、 $\eta_{\pi * W_{Q,N}}(z)$ も multiplicative.

この命題は、現在の所証明されておらず、本稿の理の例に於いては正しい。なお [5; Th 2.2] を参照。

(と ~~本稿~~ 本稿の §3.4)

さらにもう一つの変換を考える。gen. perm. $\pi = \prod_t \gamma_t$ に対して、非負整数 e を次のように定める:

$$2^e | t \quad (\forall t \text{ with } \gamma_t \neq 0)$$

$$2^{e+1} \nmid t \quad (\exists t \text{ with } \gamma_t \neq 0)。$$

このとき、

$$\pi * T = \prod_{2^{2n}|t} t^{r_t} \cdot \prod_{2^{2n} \nmid t} \frac{(2t)^{3r_t}}{t^{r_t} (4t)^{r_t}}$$

とある。このとき,

$$\eta_{\pi * T}(z) = c \eta_{\pi}\left(z + \frac{1}{2^{2n}}\right) \quad (c \text{ は定数})$$

が容易に示され, この区間 π 二次の定理が得られる。

定理 $\eta_{\pi}(z)$ が multiplicative ならば, $\eta_{\pi * T}(z)$ もそうである。

注意. 上の定義した W -変換と T -変換は, とともに involutive な変換である: $\pi * W^2 = \pi * T^2 = \pi$ 。

2.2. この注意したことは, mult. η -products の知られていない事例の殆どに全ては, $\cdot 0$ の π の Frameshape に W -変換, T -変換を何回かして得られると云うことである。

例 3. (1) $\sigma = 1^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8^2$ (M_{240} の π) とする。

$$1^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8^2 \xrightarrow{T} \frac{2^7 8^2}{1^2 4} \xrightarrow{W_{16,16}} \frac{2^2 8^7}{4 \cdot 16^2} \xrightarrow{T} \frac{4^5 8^5}{2^2 16^2}$$

とあり, §1.4 例 1 と同じ様に $\frac{4^5 8^5}{2^2 16^2}$ が $\cdot 0$ の π $1^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8^2$ から得られる。なお σ に W -, T -変換を何回かして得られる

3 のは、これから μ が τ であることに注意された。

(2) $\cdot 0$ の元として $\sigma = \frac{8^4}{4^2}$ とすると、

$$\frac{8^4}{4^2} \xrightarrow{W_{8,8}} \frac{1^4}{2^2} \xrightarrow{T} \frac{2^{10}}{1^4 4^4}$$

となり、§1.4 §3.2 により $\frac{2^{10}}{1^4 4^4}$ が $\cdot 0$ の元 $\frac{8^4}{4^2}$ が
 3 得られる。なお

$$\frac{8^4}{4^2} \xrightarrow{T} \frac{4^2 16^2}{8^2}$$

は mult. η -product $\in \mathcal{S}$ に、 $\frac{8^4}{4^2}$ は W 、 T 変換を
 ほとんども得られるのは、 μ に理由があるから。

注意 $\cdot 0$ の元 σ ($wt(\sigma) > 0$) は W 、 T 変換をほとんども
 1 得られる gen. perm は有限個がある。このようにして、
 $\cdot 0$ の元の Frame shape は有限個の mult. η -products
 から、226 個の mult. η -products の実例が得られ、
 知られた例の総数と合えば、この中に含まれる。これから
 226 個を $\cdot 0$ は associate 1 to mult. η -product
 と呼ぶことにしよう。

§3. $\cdot 0$ の元は associate 1 to 1 mult. η -products

3.1 $\cdot 0$ の元は associate 1 to n mult. η -products の

例として、§1.4 §3.1 により

$$3^2 \cdot 9^2, 6 \cdot 18, 8 \cdot 16$$

がそのようにあるものがある。これは、 $\cdot 0$ の元から、 W 、 T 変換をほいこしは得られぬから、

$$(3^2 \cdot 9^2)^3 = (6 \cdot 18)^6 = 1^6 \cdot 3^6, \quad (8 \cdot 16)^8 = 1^8 \cdot 2^8$$

(変換をほいこの元から、 2 になる)

で、 $1^8 \cdot 2^8$ 、 $1^6 \cdot 3^6$ は M_{24} の元 π の cycle 分解から、 π の上では、 $\cdot 0$ の元に変換に固定される。

3.2. 上の3つのほかにも、 $\cdot 0$ に associate した mult. η -products があるから、 π が $\pi \in \Pi_{24}$ のために2次の問題を考へよう：

問題. Π_{24} は degree 24 の Frame shape 全体の集合 (i.e. 次数24の有理数係数、根が全21の心を持つ) であるように変換された全体の集合とす。 Π_{24} の $\pi = \prod_x \pi_x$ に対して $\eta_\pi(z) = \prod_x \eta(\pi_x z)^{\eta_x}$ が mult. η -product となるのはどんな π か？

この問題に対する答は、次の定理である。

定理. $\eta_\pi(z)$ ($\pi \in \Pi_{24}$) が multiplicative とする。

I. $\text{wt}(\pi)$ が偶数ならば、次の1つが成り立つ：

(i) π は $\cdot 0$ の元の Frame shape が、 π は associate したものの

$$\text{(ii)} \left\{ \begin{array}{l} 3^2 \cdot 9^2, 8 \cdot 16, 6 \cdot 18 \text{ のどれか} \\ \pi \text{ は,} \end{array} \right.$$

(iii) π は、
 次の 6 つのうちのとらえられ:

$$1^3 6^5 / 2^3 \cdot 3 \sim 2^5 \cdot 12^3 / 4 \cdot 6^3$$

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 18^2 / 1 \cdot 6^2 \cdot 9$$

$$3^3 \cdot 18^2 / 6^2 \cdot 9 \sim 2^2 \cdot 12^3 / 4 \cdot 6^2$$

$$1 \cdot 3 \cdot 4^4 \cdot 24^2 / 2^2 \cdot 8^2 \cdot 12^2$$

$\lambda > 7$, \sim は W-, T-変換が互いに後述のこととす。

II $\text{ord}(\pi)$ が half-integer ならば, π は次の 9 つのうちのとらえられ:

$$6^5 / 3^2 \sim 3^2 \cdot 12^2 / 6, \quad 8^3$$

$$16^2 / 8 \sim 8 \cdot 32 / 16, \quad 24$$

$$3 \cdot 18^2 / 6 \cdot 9 \sim 6^2 \cdot 9 \cdot 36 / 3 \cdot 12 \cdot 18 \sim 8^2 \cdot 48 / 16 \cdot 24$$

この定理の証明は、計算機を用いて行われた。もともと、パソコン (NEC-PC9801 F₂) を用いて、 $\text{ord}(\pi) < 100$ ($\pi \in \Pi_{24}$) なる π に対して上の定理が成り立つことを確かめたのであるが、一橋大学の山田裕理氏が大型計算機を用いて、全ての $\pi \in \Pi_{24}$ に対して上の定理が成り立つことを証明した。なお、 $|\Pi_{24}| = 195,966$ であり、このうち $\text{ord}(\pi) < 100$ なるものは 60,914 個である。また multiplicative η -products を与える $\pi \in \Pi_{24}$ (i.e. 上の定理に適用できる) は、全部で 101 個である。

3.3. 証明の概要を述べる。自然数 n に対し $\pi_n \in \Gamma$ の原始 n -乗積を π_n とする。Frame shape とする。

良く知られているように

$$\deg(\pi_n) = \varphi(n)$$

$$\pi_n = \prod_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

である。ここで φ , μ は Euler 関数, Möbius 関数である。また, 次の不定方程式を考へる:

$$\sum_{n=1}^{90} \varphi(n) u_n = 24$$

ここで $\varphi(n) \leq 24$ ならば $n \leq 90$ であることは直感的にわかる。

この方程式の非負整数解 $(u_1, u_2, \dots, u_{90})$ に対し

$$(*) \quad \pi = \pi(u_1, u_2, \dots, u_{90}) = \pi_1^{u_1} \pi_2^{u_2} \dots \pi_{90}^{u_{90}}$$

とあると, $\pi \in \Gamma_{24}$ であり, 逆に $\pi \in \Gamma_{24}$ の Frame shape π は, 全てこのようにして得られる。(*) によつて得られる π

に対し, $\eta_\pi(z) \in \mathbb{C}$, z の Γ -11 区間

$$\eta_\pi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \quad (a_1 = 1)$$

の係数 $a_n \in \mathbb{Z}$ $1 \leq n \leq 21$ に対し計算し,

$$(**) \quad a_{mn} = a_m a_n \quad (m, n) = 1, \quad 1 \leq m, n \leq 21$$

が成り立つよう π を探す。もちろん, このよう $\eta_\pi(z)$ は mult. η -product の候補者として過すものから, 以下が実例

に, mult. η -products を与えるかどうかが, 次のようにして
 確かめる。なお, 幸い $n=24$ のように好適な数の数は, \bullet
 115,966 個の Π_{24} の元のうち, 189 個にしか過ぎない。
 さて, このうちの 189 個の元に対して, 次の条件を満たすか
 どうかを確かめるのが有益である:

(#) $\text{ord}(\pi) \mid N$ となる自然数 N が存在して, $Q > 1$
 $(Q, \frac{N}{Q}) = 1$ となる N の ~~任意~~ 任意の約数 Q に対して,
 $\deg(\pi * Q) > 0$ または 24 .

この条件 (#) は, 一般の gen. perm ($\deg(\pi) = 0$ 又は 24 かつ
 $\text{wt}(\pi) = \text{正整数}$) に対して, $\eta_\pi(x)$ が multiplicative
 になるための必要条件であると思われる。あるいは次の定理
 が成り立つと思われる:

"定理" $\eta_\pi(x)$ が multiplicative ならば, π は (#) を
 満たす。(cf. [5] Th 2.2)

これは証明されずにあるわけではたぶん, (***) を満たす $\pi \in$
 Π_{24} が, (#) を満たさないときは, $n > 24$ ならば a_n を計算し
 て見ると, 147 と 121 が (これは $n=24$ の場合を除く) $\eta_\pi(x)$
 係数の乗法性 $a_{mn} = a_m a_n$ が成立しなくなることも確かめら
 れる。 $\pi \in \Pi_{24}$ が (#) を満たせば, それは既知のものか定理
 の (iii) を満たすものならば, 後者は具体的に Eisenstein

series と同一型である, したがって multiplicative であることが分る。詳しくは, [5] の §3 を参照された。

3.4. 最後は §2.1 (p.7) と比較して 2 つの "定理" (予題) について注意しておく。これらの予題は, 次の節と直接に関連している:

問題. $\pi \in (1), (2)$ をそれぞれ gen. perm. として $\eta_\pi(z)$ が multiplicative とする。このとき $\eta_\pi(z)$ は cusps (i.e. 有理数 $z \in \mathbb{Q}$) 上で holomorphic か? この問題が真ならば, 上の 2 つの予題が正しいことは, 小池正夫氏により確かめられている。なお, (1), (2) をそれぞれ (multiplicative とは限らなくても) gen. perm. π に対して $N \in (6), (7), (8)$ を確かめよ

$$\eta_\pi\left(\frac{az+b}{cNz+d}\right) = \chi(d) (cNz+d)^{wt(\pi)} \eta_\pi(z)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

χ は $\mathbb{F}_N \oplus (\sqrt{-1})^{wt(\pi)} \prod_{\substack{p|N \\ p \neq 4}} (1 + \chi(p))$ の Dirichlet 指標
(cf. [5] Th 2.1)

確かめようとして, 一般にはこの $\eta_\pi(z)$ が $\Gamma_0(N)$ の cusp 上で (meromorphic ではない) holomorphic とは限らばない。上の問題は, 「 $\eta_\pi(z)$ が multiplicative ならば」

$P_0(N)$ の各 cusp 上 holomorphic ϕ_1 に対して $z \mapsto \eta_\pi(z)$ は
 (level N , weight $w(\pi)$, character χ) modular
 form ϕ_1 と一致する。
 と主張している。

文 献

- [1] J.H. Conway and S.P. Norton, Monstrous moonshine, Bull London Math. Soc., 11 (1979), 308-339
- [2] M. Koike, On Mackay's conjecture, Nagoya Math. J., 95 (1984), 85-90.
- [3] M. Koike, Moonshines of $PSL_2(\mathbb{F}_8)$ and the automorphism group of Leech lattice, to appear in Japanese Journal.
- [4] T. Kondo, The automorphism group of Leech lattice and elliptic modular functions, J. Math. Soc. Japan, 37 (1985), 337-362
- [5] T. Kondo, Examples of multiplicative η -products, 東大の表紙記事 近刊.