数理解析研究所講究録
第 580 巻 1986 年 46-58

複素 Leech 格子と散在型鈴木単純群の 2-local geometry

東大・理　吉荒 聡
(Satoshi Yoshiara)

1. 背景と概略

有限単純群の分類定理によれば、有限単純群は Lie 型の群, 5次以上の交代群, 26 個の散在群に大別される。Lie 型の群には building と呼ばれる, ある公理を満す幾何構造が存在する。交代群には thin な building が対応する。

G を標数 p の有限体上で定義された Lie 型の単純群, B をその Borel 部分群 (G の p-Sylow normalizer である事に注意) $P_1, \cdots, P_r$ を B を含む G の maximal parabolic subgps. 全体とする。

$\mathcal{G}_i := G/P_i = \{gP_i \mid g \in G\}$ とおき、
直和 $\mathcal{G}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{G}_r$ 上に反射的, 対称的な関係 I を

$$gP_i \, I \, hP_j \iff gP_i \cap hP_j \neq \phi$$

により定める。

この時得られる幾何 ($\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_r$; I) を complex 化したものが (G に対応する) building である。

この幾何は次の形でも定義できることに注意しよう。

$\mathfrak{g}_i' := P_i^G = \{ P_i^g \mid g \in G \}$ とおき,

$$P_i^g \ I' \ P_j^h \iff P_i^g \cap P_j^h \supseteq B^k \ (\exists k \in G)$$

により $\mathfrak{g}_1' \cup \cdots \cup \mathfrak{g}_r'$ 上の relation I' を定める。
この時得られる幾何 ($\mathfrak{g}_1', \dots, \mathfrak{g}_r'$; I) は上の幾何 ($\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_r$; I) に同型である。

さて, 散在群についても同様の幾何を構成する試みが, 近年 Buekenhout [1], Ronan-Smith [4] らを中心になされてきた。例えば, [4] において提唱された散在群 G の "2-local geometry" とは, 上の幾何 ("building") の $p=2$ での類似物である。

それは B として散在群 G の 2-Sylow normalizer (ないしは 2-Sylow 群, etc.) をとり, $P_1, \dots, P_r$ として, B を含む適当な性質を持つ (大体 2-constrained でない.) maximal 2-local subgps. 全体をとった時, 先の ($\mathfrak{g}_1', \dots, \mathfrak{g}_r'$; I) と同様に定義して得られる幾何である。

この構成においては, 散在群 G の存在が前提となっている事に注意しよう。一方, Lie 型の群 L に対する上の "building" ($\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_r$; I) or ($\mathfrak{g}_1', \dots, \mathfrak{g}_r'$; I) は

群 L の存在を前提とせずに，他の数学的対象を用いて記述できる。例えば，$L = PSL_{n+1}(q)$ に対する "building" $(\mathcal{G}_1, \cdots, \mathcal{G}_n; I)$ は，

$PV :=$ $\mathbb{F}_q$ 上の n-dim. projective space，

$\mathcal{G}_i :=$ PV の $(i-1)$-dim. subspaces，

$x \; I \; y \Leftrightarrow$ PV の subspaces として $x \subseteq y$ or $x \supseteq y$.

として記述できる。（つまり，これは通常の n-dim. 射影幾何に他ならない。）

群 G を前提とした定義の利点は，その統一性にあるといえるが，個々の幾何を調べる際には，G の存在と無関係な，本当の意味での "幾何" の記述を与える事が重要であろうし，群 G の性質をさぐる上でも見通しのよい手掛りを与えると期待される。（射影幾何と PSL の関係を想起せよ。）

しかしながら，現在の所，散在群 G に対し，[1] [4] などで得られた幾何のうち，この様に全く群を離れた記述法が与えられているものはごく僅かである。（そもそも，うまい表現の与えられた群 G が少ないのだから仕方ない所かも知れぬが‥）ある種の graph の自己同型群の subgp. として構成された群については このグラフを基に，対応する幾何が定義される場合もあるが，1つの line 上に2点しかない（thin）のだから，あまり幾何らしくないし，グラフの構成も複雑なこと

が多いので，明快さを欠く。従って，graph を用いた幾何の記述は，ここでは一応除外して考える。そうすると，散在群の幾何のうち，群と離れた明快な記述の与えられているものは Mathieu 群（特に M_{24}）に対するものだけである。

本稿の主目的は，散在型鈴木単純群 Suz の 2-local geometry として知られていた幾何（[4]）が，Suz の存在を前提とせずにかなり明確に記述できる事実の報告である。（詳しくは [6] をみよ.）

ここで $PSL_{n+1}(q)$ に対する n 次元 proj. space の役目を果すのは，複素 Leech 格子とよばれる，$\mathbb{C}$ 上 12 次元のある複素格子 Λ である。しかし従来の ternary Golay code を用いたこの lattice Λ の表現は我々の目的にはそぐわぬので，Lepowsky-Meurman [3] による Leech 格子の構成の複素版を行なって Λ を構成する。この Λ の表現と，幾何の対象の定義から，Aut Λ（order 6 の center を持ち，それによる商群が Suz に同型）の位数，3 種の maximal 2-constrained subgps. の構造などが全く初等的に，しかもたやすく決定できる。（Suz の存在証明も得られる。）

この Suz の 2-local geometry は散在群の幾何の

中でもとりわけ重要な意味を持つ。それについて以下少し述べる。

[1]において，building の diagram（これは Dynkin diagram になる.）の類似として，一般の幾何に対する diagram が定義された。この diagram は有限個の点と，それらを結ぶ（ある種の記号の付いた）多重線分から成る。幾何 $(\mathcal{G}_1, \cdots; \mathcal{G}_k; I)$ が GAB（geometries that are almost buildings）であるとは，この幾何の diagram のどの2点も [redacted] 記号の付いていない単なる多重線分で結ばれることである。（[2]）ひとくちに言えば この幾何が local には rank 2 の building であるとき，GAB と呼ばれる。

さて，Tits の定理[5]によれば，殆んどの [redacted] GAB は，それと同じ diagram を持つ，一般には無限の building の，ある全射による像となる。上の定義から，building は GAB であるが，この結果は building ではない GAB の重要性を示すといえよう。

今の所，散在群に対する幾何のうちで GAB であることがわかっているのは，Lyons–Sims の群に対するもの（[2]，これは 2-local geometry ではない。）と，そして本稿の主題である Suz の 2-local geometry の2つのみである。（多分この2つのみと思われる。）Tits の定理を用いると，

この2つの幾何は，どちらも適当な無限buildingsの像となることがわかる。この"上の"buildingの如何なる具体的数学表現も，今の所知られていない。これを与える事は非常に魅力的な問題に思われる。

Tits の論文[4]を見ると，Suz の GAB (2-local geometry とよぶよりこちらの方が良い) の自己同型群のsubgp. Suzにますえして，"上の"buildingの自己同型群の部分群（無限群）で，その商群がSuz ~~GABの自己同型群~~ となるものが存在することがわかる。Suzのかなり詳しい群論的解析により，この無限群はBN-pairを持たぬことが示された。従って，"上の"buildingも，かなり対称性の低いトリッキーなものであろう。

いずれにせよ，Suzの2-local geometryは，GAB（buildingではない）であるという点が，この幾何を特にとりあげた大きな理由である。

実際に筆者がこの問題に取り組んだのは，一昨年末から昨年初めにかけて来日されたW. M. Kantor教授の問い"Do you have a (geometrical) description of the geometry associated with Suz?"に答えるためであった。GABに関するものを含む，彼の多くの興味深い講演と，私への様々な激励をふりかえり，ここにあらためてKantor教授へ深く感謝いたします。

2. 複素Leech格子と幾何の構成

以下, $R=\mathbb{Z}[\omega]$, $\omega=(-1+\sqrt{-3})/2$, $\theta=\sqrt{-3}$ とおく。R成分のn行行ベクトルのなすR-module R^n上に,
$$h_n(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$$
によりhermite形式h_nを定義する。ここで$\overline{y_i}$はy_iの複素共役である。R^nのR-submodule XおよびR^mのR-submodule Yに対し, XとYがisometricとは, R-moduleとしてのisomorphism $\rho: X\to Y$が存在して, 任意の$x, y\in X$に対して
$$h_m(\rho(x),\rho(y))=h_n(x,y)$$
が成立する事をいう。

[定義] (複素E_8-格子)

次のR^4のR-submodule Γを複素E_8-latticeという。
$$\Gamma=\{c+\theta x \mid c\in \mathcal{C},\ x\in R^4\},$$
ここで
$$\mathcal{C}=\left\{\begin{array}{l}\pm(1,1,1,0),\ \pm(1,-1,0,1)\\ \pm(1,0,-1,-1),\ \pm(0,1,-1,1),\ 0\end{array}\right\}(\subseteq R^4).$$

$\overline{\Gamma}=\Gamma/2\Gamma$に, h_4から自然にinduceされる非退化hermite形式$\overline{h}_4$が定義される。このとき,
$$\overline{\Gamma}=\overline{\Phi}\oplus\overline{\Psi},$$

ここで $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ は $\overline{\mathfrak{h}}_4$ に関する $\overline{\Gamma}$ の極大 totally isotropic subspaces　　，　と分解される。
この分解に対応して，$\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ の全逆像である Γ の R-submodules Φ, Ψ が存在して

$$\Gamma = \Phi + \Psi \quad , \quad \Phi \cap \Psi = 2\Gamma$$

を満す。

このような Φ, Ψ を一組取り，以下固定する。
また，Γ の R-submodule Π を

$$\Pi = \{ (x, x, y, 0) \mid x, y \in R,\ x - y \in \theta R \}$$

により定義する。

［定義］（複素 Leech 格子）

Γ の 3つの copies の直和 $\Gamma^3 = \{(x^1; x^2; x^3) \mid x^i \in \Gamma\}$ の R-submodule Λ を次により定義する。

$$\Lambda = \left\{ (x^1; x^2; x^3) \in \Gamma^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x^1 + x^2,\ x^1 + x^3 \in \Phi \\ x^1 + x^2 + x^3 \in \Psi \end{array} \right\}$$

また，$S = \mathrm{Aut}\,\Lambda = \{ g : 12 \times 12$ unitary 行列 $\mid \Lambda g = \Lambda \}$ とおく。

［命題］ (Λ, h_{12}) の realization は Leech lattice である。特に，(Λ, h_{12}) は複素 Leech 格子 [redacted] であり，$S/Z(S)$ は散在型鈴木単純群 Suz と同型.

［[redacted] 定義］

Λ の R-submodule X は，R^4 の R-submodule 2Γ $(=\{2x \mid x \in \Gamma\})$ と isometric のとき，point とよばれる。Λ の 3つの points X_1, X_2, X_3 のどの2つも h_{12} に関して直交するならば，3つ組 $\{X_1, X_2, X_3\}$ を line とよぶ。

Λ の R-submodule A は，R^4 の R-submodule 2Π と isometric のとき axis とよばれる。2つの axes A, B が同値であるとは，

$$A \ni {}^{\exists}a,\quad B \ni {}^{\exists}b \quad \text{s.t.} \quad h_{12}(a,a) = h_{12}(b,b) = 24,$$
$$\text{かつ} \quad a - b \in 2\Lambda$$

であることとする。Λ の axes 全体を，この同値関係で類別したときの各同値類を cross とよぶ。

各 cross は互いに直交する 6つの axes から成る事がわかる。

［幾何の定義］

Points, lines, crosses の全体をそれぞれ，$\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ とおく。また，$\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3$ 上の[redacted]関係 I を次の如く定める。

$x, y \in \mathcal{G}_i$ に対し，$x \, I \, y \Leftrightarrow x = y \quad (i = 1, 2, 3)$.

$x = \mathbb{X} \in \mathcal{G}_1$, $y = \{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3\} \in \mathcal{G}_2$ に対し，

$$x \, I \, y \Leftrightarrow \mathbb{X} = \mathbb{X}_i \quad (\exists i)$$

$x = \mathbb{X} \in \mathcal{G}_1$, $z = \{A_1, A_2, \cdots, A_6\} \in \mathcal{G}_3$ に対し，

$$x \, I \, z \Leftrightarrow A_i, A_j \subseteqq \mathbb{X} \quad (1 \leqq \exists i \neq j \leqq 6)$$

$y = \{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3\} \in \mathcal{G}_2$, $z = \{A_1, A_2, \cdots, A_6\} \in \mathcal{G}_3$ に対し，

$y \, I \, z \Leftrightarrow$ 適当に index をつけかえて

$$A_{2i-1}, A_{2i} \subseteqq \mathbb{X}_i \quad (i = 1, 2 \text{ and } 3)$$

［定理］ 上で定義された幾何 $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3 ; I)$ は次を満す。

任意の $x \in \mathcal{G}_1$ に対し，$(\mathcal{G}_2(x), \mathcal{G}_3(x) ; I)$ は $\mathbb{F}_4$ 上4次元射影 Unitary 空間の isotropic line と point のなす幾何に同型。

任意の $z \in \mathcal{G}_3$ に対し，$(\mathcal{G}_1(z), \mathcal{G}_2(z) ; I)$ は $\mathbb{F}_2$ 上4次元射影 Symplectic 空間の isotropic point と line のなす

幾何に同型。

任意の $y \in \mathcal{G}_2$ に対し、$(\mathcal{G}_1(y), \mathcal{G}_3(y); I)$ は trivial geometry；すなわち $x\ I\ z$ $(\forall x \in \mathcal{G}_1(y), z \in \mathcal{G}_3(y))$

但し、以上において $\mathcal{G}_i(x) := \{y \in \mathcal{G}_i \mid y\ I\ x\}$。

注意：特にこの定理は幾何 $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3; I)$ が diagram

に属し、従って GAB である事を示す。

[定理] 群 S は幾何 $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3; I)$ の maximal flags 全体の集合

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathcal{G}_i,\ x_i\ I\ x_j\ (1 \leqq i < j \leqq 3)\}$$

の上に transitive である。

[命題] $|S| = 2^{14}\cdot 3^{8}\cdot 5^{2}\cdot 7\cdot 11\cdot 13$, $Z(S) \cong Z_6$.

また、ひとつの maximal flag $\{x_1, x_2, x_3\}$ $(x_i \in \mathcal{G}_i)$ に対し、S における x_i の stabilizer を P_i と書くとき、

$$P_1/Z(S) \cong 2^{1+6}_{-}\cdot U_4(2)$$

$$P_2/Z(S) \cong 2^{2+8} \rtimes (A_5 \times S_3)$$

$$P_3/Z(S) \cong 2^{4+6} \rtimes (Z_3\cdot A_6)$$

更に $\bigcap_{i=1}^{3} P_i$ は S の 2-Sylow Normalizer.

［命題］ 先の命題の記号を用いる。

$\mathcal{G}_i' := S/P_i = \{ sP_i \mid s \in S \}$,

$\mathcal{G}_i'' := P_i^S = \{ P_i^s \mid s \in S \}$, $(i = 1, 2, 3)$

$sP_i \; I' \; tP_j \Leftrightarrow sP_i \cap tP_j \neq \phi$

$P_i^s \; I'' \; P_j^t \Leftrightarrow P_i^s \cap P_j^t \supseteq (\bigcap_{k=1}^{3} P_k)^u \; (\exists u \in S)$

により幾何 $(\mathcal{G}_1', \mathcal{G}_2', \mathcal{G}_3'; I')$ および

$(\mathcal{G}_1'', \mathcal{G}_2'', \mathcal{G}_3''; I'')$ を定義すれば、これらは先の幾何

$(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3; I)$ に同型。

（ $(\mathcal{G}_1', \mathcal{G}_2', \mathcal{G}_3'; I)$ が従来 Suz の 2-local geometry

と呼ばれていたものである。）

［命題］ 幾何 $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3; I)$ は intersection

property ([1]) をみたす。すなわち、任意の $x \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3$

は $\mathcal{G}_1$ の subset $\mathcal{G}_1(x) = \{ y \in \mathcal{G}_1 \mid y \, I \, x \}$ と同一視でき、

$x \neq y \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3$ に対し

$\mathcal{G}_1(x) \cap \mathcal{G}_1(y) = \phi$ or $\mathcal{G}_1(z)$ $(\exists z \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3)$.

注意：幾何 $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3; I)$ の自己同型群は

$\mathrm{Aut}\,Suz$ $(|\mathrm{Aut}\,Suz : Suz| = 2)$ を部分群として含む。一致する

ことが予想されるが、まだ証明できていない。

文献

1. F. Buekenhout, Diagrams for geometries and groups, J. Combin. Theory Ser. A 27 (1979), 121–151

2. W. M. Kantor, Some geometries that are almost buildings, Europ. J. Combinatorics 2 (1981), 239–247.

3. J. Lepowsky and A. Meurman, An E_8-approach to the Leech lattice and the Conway group, J. Algebra 77 (1982), 484–504.

4. M. A. Ronan and S. D. Smith, 2-local geometries for some sporadic groups, Proc. Symp. Pure Math 37 (1980), 283–289.

5. J. Tits, A ~~local~~ approach to buildings, in "The Geometric Vein. The Coxeter Festschrift" 519–547, Springer, New York-Heidelberg-Belrin, 1981.

6. S. Yoshiara, A lattice theoretical construction of a GAB of the Suzuki sporadic simple group, preprint; Tokyo