数理解析研究所講究録
第580巻 1986年 77-90

組合せ論とLie環論のある種の関係
（R.P. Stanley, R.A. Proctorらの最近の結果の紹介）

東大 理　　岩堀長慶 Nagayoshi Iwahori
中村博之 Hiroyuki Nakamura
岡田聡一 Soichi Okada

§1. 1985年8月に名大の松村英之教授がorganizerとなって，代数幾何学と組合せ論との関連を主題とする研究集会が京大数理解析研で開催され，R.P. Stanley, D.Eisenbud達を招き興味ある講演が多々なされた。Stanleyを中心とするグループは組合せ論と他の諸分野（代数幾何学・半順序集合・旗多様体のセル分割・Lie環論など）との関連について精力的な活動を展開中である。ここでは特にLie環論との関係についてStanley達がやっている興味あるいくつかの事実を紹介したい。

先ず必要な定義や記号を述べておく。有限半順序集合Pがrankedとは，Pの部分集合 $P_0, P_1, \cdots, P_r$ のdisjoint unionとしてPが書かれ，かつ次の性質を満たすことをいう：『$x \in P_i$, $y \in P$ が「$x > y$ を満たし，かつ $x > z > y$ なる $z \in P$ が存在しない」ならば（これを「xがyをcoverする」という），

$y \in P_{i-1}$ となる。」以下かかるPを ranked poset と呼ぶ。Pの部分集合 A が anti-chain をなすとは，Aの相異なる2元 a, b について $a > b$ も $b > a$ も成立しない（i.e. aとbは比較不能）— という性質をもつことをいう。以下集合Xの元の個数を$|X|$と書く。ranked poset $P(=\bigcup_{i=0}^{r} P_i)$ が Sperner的であるとは（rをPの長さという）

$$\underset{A:\text{anti-chain}}{\mathrm{Max}} |A| \leqq \mathrm{Max}(|P_0|, |P_1|, \cdots, |P_r|)$$

が成立つことをいう。Pが強Sperner的であるとは，各自然数kに対して，どのようにk個の anti-chain $A_1, \cdots, A_k$ をとっても $|A_1 \cup \cdots \cup A_k| \leqq |P_{i_1} \cup \cdots \cup P_{i_k}|$ が成立つことをいう。ただし，$P_{i_1}, \cdots, P_{i_k}$ は何れも $|P_{i_\nu}| = \underset{0 \leqq i \leqq r}{\mathrm{Max}} |P_i|$ を満たすものとする。Pが rank-symmetric とは，$0 \leqq i < r/2$ なる各番号iに対して $|P_i| = |P_{r-i}|$ となることである。Pが rank-unimodal（i.e. rankが単一峰型）であるとは，或る番号 k が存在して，

$$|P_0| \leqq |P_1| \leqq \cdots \leqq |P_k| \geqq |P_{k+1}| \geqq \cdots \geqq |P_r|$$

となることをいう。PがPeck的であるとは，① 強Sperner的，② rank-symmetric，③ rank-unimodal — の3条件を満たすことをいう。

さて，ranked poset P の元を基底とする複素数体 $\mathbb{C}$ 上

のベクトル空間を $\mathbb{C}P$ と書く。$\mathbb{C}P$ から $\mathbb{C}P$ への $\mathbb{C}$-linear な写像全体を $\mathrm{End}(\mathbb{C}P)$ と書く。これは bracket 積

$$[X, Y] = XY - YX \quad (X, Y \in \mathrm{End}(\mathbb{C}P))$$

に関し $\mathbb{C}$ 上の Lie 環となる。$X \in \mathrm{End}(\mathbb{C}P)$ に対して次の定義をする：（$P_{-1} = \phi$, $P_{r+1} = \phi$ とおく）

(イ) X が P の lowering 作用素 $\rightleftarrows$ $X(\mathbb{C}P_i) \subseteq \mathbb{C}P_{i-1}$ $(\forall i)$

(ロ) X が P の raising 作用素 $\rightleftarrows$ $X(\mathbb{C}P_i) \subseteq \mathbb{C}P_{i+1}$ $(\forall i)$

(ハ) X が P の order-raising 作用素 $\rightleftarrows$ 各 i と各 $a \in P_i$ に対して，Xa は a を cover する元の一次結合

* * *

さて単純 Lie 環 $sl(2, \mathbb{C}) = \{ z \in M_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{trace}(z) = 0 \}$ の基底 h, x, y を次のようにとる：（$M_2(\mathbb{C})$ = (2次複素行列の全体)）

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

従って，$[h, x] = 2x$，$[h, y] = -2y$，$[x, y] = h$ である。周知のように $sl(2, \mathbb{C})$ は各自然数 $d+1$ に対して $d+1$ 次元の既約表現を（同値を除いて）唯一つもつ。それは表現空間 V の基底 $v_0, v_1, \cdots, v_d$ を適当にとれば次のように与えられる：$h \longmapsto H$，$x \longmapsto X$，$y \longmapsto Y$；ただし

$$Hv_j = (2j - d) v_j \qquad (0 \leqq j \leqq d)$$

$$Xv_j = v_{j+1} \qquad (0 \leqq j \leqq d-1)$$

$$Yv_j = j(d-j+1)v_{j-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant d)$$

とおく。

[定義] 長さ r の ranked poset $P = \bigcup_{j=0}^{r} P_j$ が $sl(2,\mathbb{C})$ の表現をのせている(carry)とは，$V = \mathbb{C}P$ を表現空間とする $sl(2,\mathbb{C})$ の表現 $h \mapsto H$, $x \mapsto X$, $y \mapsto Y$ が存在して，Y は P の lowering 作用素であり，かつ X は P の order-raising 作用素となることをいう。

さて Stanley は [1] 中で，長さ r の ranked poset P が Peck 的であるための必要十分性を次の形で与えている：$\mathbb{C}P$ 上の order-raising 作用素 X が存在して，各 i $(0 \leqq i < r/2)$ に対して，線型写像 $X^{r-2i}: \mathbb{C}P_i \longrightarrow \mathbb{C}P_{r-i}$ が linearly isomorphic となること。Proctor [3] はこの条件が $sl(2,\mathbb{C})$ を用いてより美しく述べられることを示した。すなわち

ranked poset P が Peck 的 $\Longleftrightarrow$ P が $sl(2,\mathbb{C})$ の表現をのせている

という定理である。$\Longleftrightarrow$ を示すのに Proctor は Stanley の結果を用いているが，この形の方が印象的である。Proctor はこの定理の応用として，Peck 的な ranked poset P, Q の直積も Peck 的であるという定理の簡単な美しい証明を得ている。これはもとは E.R. Canfield (Linear and Multilinear Alg. 9, 1980, 151-157) や Proctor-Saks-Sturtevant

(Discrete Math 30, 1980, 173-180)で示されたが，どちらもStanleyの上の結果を用いている。

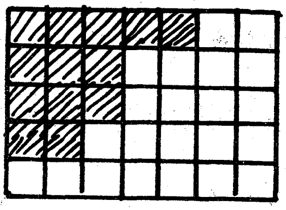
半単純Lie環のWeyl群 W 上にはBruhat半順序と呼ばれる半順序が定義されている。(詳しい定義は略する。例えばStanley [1] 参照。) Stanley [1] は上の結果と，代数幾何学でhard Lefschetz Theoremと呼ばれている定理とを併用して，Bruhat posetがPeck的なことを示した。

Proctor [3] は $sl(2, \mathbb{C})$ のBruhat poset上の表現を具体的に作って，上記のStanleyの結果をcombinatorialに(代数幾何を使わずに)再現した。その後hard Lefschetz Theoremを示すのに $sl(2, \mathbb{C})$ の表現論が使えることが認識されるようになった。(ついでに，Peck的なranked poset P, Q の直積がPeck的となる ― という事実のProctorの解釈は，これが $sl(2, \mathbb{C})$ の表現のテンソル積の話になるというものである。また P_i はweight spaceのbaseに他ならぬという解釈である。) Proctor [3] 中の面白い定理をもう一つ述べておこう。

[定義] 型 $1^{k_1} 2^{k_2} \cdots m^{k_m}$ ($k_1, \cdots, k_m$ は整数で $\geqq 0$) を一つ定める。$k_1 + \cdots + k_m = n$ とし，自然数を成分とする n 次元ベクトル $(a_1, \cdots, a_n)$ であって，成分は 1 が k_1 個, 2 が k_2 個, $\cdots$, m が k_m 個であるようなもの全体のなす集

合を Ω とおく。次のように定義される半順序を Ω 中に導入する。『$a=(a_1,\cdots,a_n)$ において、$j>i$ かつ $a_j \leqq a_i$ なる i,j があれば、a の成分のうち a_i と a_j とを取りかえて得られるベクトル a' は $a' \geqq a$』とおく。この操作をくりかえして Ω 中に半順序をいれたとき、Ω を $1^{k_1}\cdots m^{k_m}$ 上の Shuffle poset という。

[例.] $1^m 2^n$ 上の Shuffle poset は、サイズ $n\times m$ の矩形を nm 個の合同な小正方形に仕切って、此の矩形中の Young diagram の全体に包含関係を用いて半順序をいれたものである。(左図)



(Ω の最大元は $\underbrace{1\cdots1}_{k_1}\underbrace{2\cdots2}_{k_2}\cdots\cdots\underbrace{m\cdots\cdots m}_{k_m}$ である。)

すると Proctor の得た定理は "Shuffle poset は恒に Peck 的である" というものである。

§2. Stanley の他の興味ある定理(原形は Dynkin の論文[4]にある。これのもつ意味が Stanley [2] に豊富な例と共に述べてある)を紹介しよう。複素数体 $\mathbb{C}$ 上の単純リー環 $\mathfrak{g}$ (従って型は $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ の何れか)を考え、$\mathfrak{g}$ のある Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ をとり、$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関するルート系を Δ とおく。Δ の基本ルート系(i.e. 単純ルート系) Π を一つ固定し、

$$\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

とおく．Πに関するΔ中の正ルートの全体をΔ^+とおき，各$\beta \in \Delta^+$に対して

$$\beta = \nu_1\alpha_1 + \nu_2\alpha_2 + \cdots + \nu_n\alpha_n$$

（$\nu_1, \cdots, \nu_n$は非負整数）と表わしたときの係数ν_iを

$$\nu_i = k_i(\beta) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

と書く。そしてn変数多項式$P_\Delta(x_1, \cdots, x_n)$を

$$P_\Delta(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{\beta \in \Delta^+} (1 - x_1^{k_1(\beta)} \cdots x_n^{k_n(\beta)})$$

で定義する。P_Δ^{-1}の巾級数展開の係数がB. Kostantの分割関数である。これの特徴づけ及びこれの持つ種々の興味ある性質は雨宮－岩堀－小池［6］に述べられている。Stanley［2］にある定理を以下証明をつけて紹介しよう。

定理　自然数$m_1, \cdots, m_n$に対し，変数qの関数Q_Δを

$$Q_\Delta(q; m_1, \cdots, m_n) = \frac{P_\Delta(q^{m_1}, \cdots, q^{m_n})}{P_\Delta(q, \cdots, q)}$$

により定義すると，Q_Δはqの多項式$c_0 + c_1 q + \cdots + c_r q^r$の形となる。しかもここで$c_0, \cdots, c_r$は非負整数であり，かつ

$$\begin{cases} \text{対称性：} \quad c_i = c_{r-i} \quad (0 \leq i \leq r) \quad \text{及び} \\ \text{unimodality：ある番号} s \text{が存在して} \quad c_0 \leq \cdots \leq c_s \geq c_{s+1} \geq \cdots \geq c_r \end{cases}$$

を満たす。

証明のための準備として若干の記号を導入する。ルート系Δの元の実係数の一次結合の全体をEとし、$\mathfrak{g}$のKilling形式が定めるEの内積を(ξ, η) $(\xi, \eta \in E)$と書く。E中のweightの全体のなすlatticeをΛとおく：

$$\Lambda = \{ \lambda \in E \mid 2(\lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z} (= \text{整数環}) \}$$

すると周知のように（δ_{ij}はKroneckerのデルタ）

$$2(\lambda_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

で定まるΛの元$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$（いわゆる基本weight w.r.t. Π）がΛの$\mathbb{Z}$-基底となる。$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$の非負整係数の一次結合全体のなす$\Lambda$の部分集合を$\Lambda^+$とおく。すると周知のように各$\lambda \in \Lambda^+$に対し、$\lambda$を最高weightにもつ$\mathfrak{g}$の複素既約表現$\rho_\lambda$が同値を除いて一意的に存在する。$\rho_\lambda$の表現空間を$V(\lambda)$とおく。

さてΛの$\mathbb{Z}$上の群環$\mathbb{Z}[\Lambda]$を考える。但し$\lambda \in \Lambda$に対応する$\mathbb{Z}[\Lambda]$の元（基底の一部）をe^λと書く。いま$\lambda \in \Lambda^+$に対応する$\mathfrak{g}$の既約表現ρ_λに対し、そのweight μの重複度を$m_\lambda(\mu)$と書く。そして$\mathbb{Z}[\Lambda]$の元

$$\mathrm{ch}\, V(\lambda) = \sum_{\mu} m_\lambda(\mu) e^\mu \quad (\text{有限和！})$$

を$\mathfrak{g}$の表現ρ_λ（又は$V(\lambda)$）のformal characterという。

さて表現$V(\lambda)$のweight μは$\lambda - (k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n)$の形（$k_1, \cdots, k_n$は非負整数）に一意的に表わされることも周知

である。便宜上 $k_1+\cdots+k_n$ を μ の level と呼び，level が j となる $V(\lambda)$ の weight 全体の集合を $L_\lambda(j)$ と書く．そして

$$s_j = \sum_{\mu\in L_\lambda(j)} m_\lambda(\mu)$$

とおく。すると変数 q の多項式

$$\dim_q V(\lambda) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{j\geqq 0} s_j q^j$$

が生ずる。これを $V(\lambda)$ の q-次元と呼ぶ。$q=1$ とおくと q次元は通常の次元 $\dim V(\lambda)$ となる。

さて目標の定理は次の2つの命題から直ちに得られる。

［命題 1］ $\dim_q V(\lambda) = s_0 + s_1 q + \cdots + s_r q^r$ の係数 $s_0, \cdots, s_r$ は対称性と unimodality を満たす。（E.B. Dynkin, [4], [5]）

［命題 2］ $\dim_q V(\lambda)$ は既約表現の次元公式の q-version（q-類似）となっている。即ち

$$\dim_q V(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Delta^+} \frac{1-q^{\langle\lambda+\delta,\alpha\rangle}}{1-q^{\langle\delta,\alpha\rangle}}$$

但し，$\delta = \frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Delta^+}\beta = \lambda_1+\cdots+\lambda_n$，また

$$\langle\xi,\eta\rangle = 2(\xi,\eta)/(\eta,\eta)$$

（V. G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, Progress in Math. 44, 1983, Birkhäuser 社, 128頁参照）

何故ならば自然数 $m_1, \cdots, m_n$ に対し $\lambda \in \Lambda^+$ を

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} (m_j - 1)\lambda_j$$

で定めると，$Q_\Delta(q\,;\,m_1, \cdots, m_n)$ は命題2の右辺の式に他ならぬからである。

§3．命題1の証明

B.Kostant の論文［7］にある principal TDS（$\cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ なる $\mathfrak{g}$ の Lie subalgebra のうちで principal なもの）をとり，これを $\mathfrak{a}_0 = \mathbb{C}x_0 + \mathbb{C}e_0 + \mathbb{C}f_0$ とおく。但し，$x_0 \in \mathfrak{h}$，$\alpha_i(x_0) = 1$ $(i = 1, \cdots, n)$，$[x_0, e_0] = e_0$，$[x_0, f_0] = -f_0$ である。$\mathfrak{g}$ の表現 $V(\lambda)$ の $\mathfrak{a}_0$ への制限を ρ とし，$ch\, V(\lambda) = \sum m_\lambda(\mu) e^\mu$ に対応して

$$ch_\rho(q) = \sum_\mu m_\lambda(\mu)\, q^{\mu(x_0)}$$

を考える。但し $\mu(x_0) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ であるから $ch_\rho(q)$ は $\mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$ の元である。すると $\dim_q V(\lambda)$ の定義から

$$\dim_q V(\lambda) = q^{\lambda(x_0)}\, ch_\rho(q^{-1}) \qquad \cdots\cdots (*)$$

を得る。一方 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の表現論で周知のように

$$ch_\rho(q) = a_{-m}q^{-m} + a_{-m+1}q^{-m+1} + \cdots + a_m q^m$$

（m は $\in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$）の形で，かつ係数 $a_{-m}, a_{-m+1}, \cdots, a_m$ は symmetric かつ unimodal である。よって (*) を用いれば命題1が得られる。

§4．命題2の証明

Weyl の指標公式から次元公式が導びかれるのと同様の考え方をする。指標公式は Weyl 群 W を用いて

$$\left(\sum_{w\in W} \varepsilon(w) e^{w\delta}\right) ch\, V(\lambda) = \sum_{w\in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda+\delta)}$$

と書かれる。($\varepsilon(w) = det(w) = (-1)^{\ell(w)}$, $\ell(w)$ は W の生成元 $w_{\alpha_1}, \cdots, w_{\alpha_n}$ に関する w の長さ。) 上式より

$$e^{-\lambda} ch\, V(\lambda) = \frac{\sum_{w\in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda+\delta)-(\lambda+\delta)}}{\sum_{w\in W} \varepsilon(w) e^{w(\delta)-\delta}} \quad \cdots\cdots (1)$$

を得る。今記号 N_μ $(\mu\in\Lambda^+)$ を $N_\mu = \sum_{w\in W} \varepsilon(w) e^{w(\mu)-\mu}$ で定義すれば (1) は

$$e^{-\lambda} ch\, V(\lambda) = \frac{N_{\lambda+\delta}}{N_\delta} \quad \cdots\cdots (2)$$

となる。今 $\mathbb{Z}[\Lambda]$ の部分環 $A = \mathbb{Z}[e^{-\alpha_1}, \cdots, e^{-\alpha_n}]$ を考える。すると各 $\mu\in\Lambda^+$ と各 $w\in W$ に対して $\mu - w(\mu)$ は Δ^+ の元の和となるから, $N_\mu \in A$ である。また $V(\lambda)$ 中に登場するどの weight も $\lambda - (k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n)$ $(\forall k_j \in \mathbb{Z}_+)$ の形であったから, (2) の左辺も $\in A$ である。そこで環準同型 $F_s : A \longrightarrow \mathbb{Z}[q]$ を $s = (s_1, \cdots, s_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して次式で定義する:

$$F_s(e^{-\alpha_i}) = q^{s_i} \qquad (1\leqslant i \leqslant n)$$

($e^{-\alpha_1}, \cdots, e^{-\alpha_n}$ が代数的に独立故，上の F_s はwell-defined!)
特に $s=(1, \cdots, 1)$ の時 F_s を単に F と書く。F を (2) の両辺に作用させると，定義から直ちに

$$F(e^{-\lambda}\, ch\, V(\lambda)) = \dim_q V(\lambda) \qquad \cdots (3)$$

を得る。よって命題2を示すには次の補題が云えればよい。

[補題] $\mu \in \Lambda^+$ のとき

$$F(N_\mu) = \prod_{\alpha\in\Delta^+} (1 - q^{\langle \mu, \alpha \rangle})$$

[証明] Δ の dual root 系 Δ^* を考える：

$$\Delta^* = \{\alpha^* \mid \alpha \in \Delta\}, \text{ 但し } \alpha^* = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$$

すると $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して $\langle \alpha, \beta \rangle = 2(\alpha,\beta)/(\beta,\beta) = (\alpha, \beta^*)$ となる。そして $\Pi^* = \{\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*\}$ は Δ^* の基本ルート系となる。$\delta^* = \frac{1}{2}\sum_{\alpha^*\in(\Delta^*)_+} \alpha^*$ とおく。$\lambda_1^*, \cdots, \lambda_n^*$ を $\langle \lambda_i^*, \alpha_j^* \rangle = (\lambda_i^*, \alpha_j) = \delta_{ij}$ で定義する。前と同様に

$$\delta^* = \lambda_1^* + \cdots + \lambda_n^*$$

となる。

$\mu \in \Delta^+$, $w \in W$ に対して $\mu - w(\mu) = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n$ $(\forall k_j \in \mathbb{Z}_+)$ とおくと

$$F(N_\mu) = F\Big(\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, e^{w(\mu)-\mu}\Big) = \sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, q^{\sum_j k_j}$$

$$= \sum \varepsilon(w)\, q^{(\delta^*, \mu - w(\mu))} = \sum \varepsilon(w)\, q^{(\mu, \delta^* - w(\delta^*))}$$

となる。今 $s = (s_1, \cdots, s_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して 環準同型

$$F_s^* : \mathbb{Z}[e^{-\alpha_1^*}, \cdots, e^{-\alpha_n^*}] \longrightarrow \mathbb{Z}[q]$$

を $F_s^*(e^{-\alpha_j^*}) = q^{s_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ で定義すれば，上の $F(N_\mu)$ の式の右辺は $= F_\gamma^*(\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, e^{w(\delta^*)-\delta^*})$ となる。但し

$$\gamma = ((\mu, \alpha_1^*), \cdots, (\mu, \alpha_n^*)) = (\langle\mu, \alpha_1\rangle, \cdots, \langle\mu, \alpha_n\rangle)$$

である。さて Weyl の分母公式

$$\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, e^{w(\delta)} = e^{\delta} \prod_{\alpha\in\Delta^+} (1-e^{-\alpha})$$

をルート系 Δ^* に適用すると

$$\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, e^{w(\delta^*)-\delta^*} = \prod_{\alpha^*\in(\Delta^*)^+} (1-e^{-\alpha^*})$$

となる。一方 $(\Delta^*)^+ = (\Delta^+)^*$ 故，上述の $F(N_\mu)$ の表示式と Δ^* での Weyl の分母公式とから

$$F(N_\mu) = F_\gamma^*\Big(\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha^*})\Big) = \prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-q^{\langle\mu,\alpha\rangle})$$

が出る。よって証明された。

[参考文献]

[1] R. P. Stanley, Weyl groups, the hard Lefschetz theorem, and the Sperner property, SIAM. J. Algebraic and Discrete Methods, 1, 1980, 168–184

[2] R. P. Stanley, Unimodal sequences arising from Lie algebras, Combinatorics, Representation Theory and statistical methods in Groups, Lecture Notes

in Pure and Applied Mathematics, 57, 1980, Dekker, pp. 127–136

[3] R. A. Proctor, Representations of $sl(2, \mathbb{C})$ on posets and the Sperner property, SIAM. J. Alg. Disc. Meth. 3, 1982, 275-280

[4] E. B. Dynkin, Some properties of the weight system of a linear representation of semisimple Lie group, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N. S.) 71, 1950, 221-224

[5] E. B. Dynkin, The maximal subgroups of the classical groups, Amer. Math. Soc. Transl. 6, 1957, 245-378

[6] 雨宮一郎・岩堀長慶・小池和彦, On some generalization of B. Kostant's partition function, Progress in Math. 14, 1981, 1–20

[7] B. Kostant, The principal three-dimensional subgroups and the Betti numbers of a complex simple Lie group, Amer. J. Math. 81, 1959, 973–1032