

Twisting 作用素について

奈良教育大 浅井照明

(Teruaki Asai)

§0 0.1. 序. 本稿の目的は、筆者が中心が連結の有限古典群の場合に示した結果が、実は SL_n の場合にも成立することを示すことにある。

G. Lusztig [9] は、中心が連結な有限 reductive 群の既約表現達の分類の過程で、既約指標を "family" にグループ分けし、更に各 "family" ごとにある有限群に associate した "Fourier 変換" なる概念を導入し、その Fourier 変換によって既約指標の次元公式及び半単純元における指標値の式を記述することに成功している。本稿が主題とする

twisting 作用素とは、"指標の持ち上げ" (川中 [4]) のノルム写像の定義の過程で導入された類乗数の空間の上の線型作用素であり [1] において筆者は中心が連結な有限古典群の場合に、twisting 作用素の作用が、実は上記の

"family" の Fourier 変換の言葉で記述できることを示した。従って、この両者の間に密接な関係があることがわかるのであるが、この様な現象は SL_2 の指標表を見れば、一般化できることが予測される。ここでは SL_n を取り扱う。

なお本稿の結果は、その motivation において、川中 ([5], §4) の結果に一部影響を受けたものである。

又、現在、中心が連結でない有限 reductive 群の既約指標の分類に関しては、G. Lusztig の "Character Sheaves I-V" において、予測的理論を展開している。本稿において導入される "family" は G. Lusztig の "Character Sheaves" の "family" と同じものと推察される。

0.2 記号その他。

G は常に有限体 k 上定義された連結 reductive 群とし、Frobenius 写像は F で記し、又 F は G に左から作用すると定める。 G^F は G の F -固定点の全点とする。 G^F は有限群であり、その共役類 G^F/\sim の間には次の様な $1-1$ 対応があり、

$$t_1: G^F/\sim \rightarrow G^F/\sim \quad (x = \alpha^{-1}F\alpha \mapsto F\alpha\alpha^{-1}, \alpha \in G)$$

これは、 G^F の類関数の空間 $C(G^F/\sim)$ の上に線型作用素 t_1^* と定める。

$$t_1^*: C(G^F/\sim) \rightarrow C(G^F/\sim) \quad (f \mapsto f \circ t_1)$$

これを twisting 作用素と呼ぶ。

§1, Deligne - Lusztig [2] からの予備知識。

1.1 G, F は 0.2 のものとし、 G^* を G の dual 群とする。 G の F -不変な極大トーラス T と T^F の一次の

指標 θ を考える。 (T, θ) (の G^F -共役) から、 G^* の F -不変な 極大 T -ラス T^* と $\rho \in (T^*)^F$ の pair (T^*, ρ) が $(G^{*F}$ -共役を除いて) 定まる。 (T^*, ρ) を (T, θ) の dual pair と呼ぶことにする。

$$(T, \theta) \longmapsto (T^*, \rho)$$

この対応から、 (T, θ) に対して G^* の F -不変な 半単純共役類 $\{\rho\}$ が定まり、 G^F の既約指標達 (or 既約表現の同値類達) $\widehat{G^F}$ は ます" 次の様に分割する。

$$\widehat{G^F} = \bigcup_{\{\rho\}} \mathcal{E}(G^F, \{\rho\}) \quad (\text{disjoint})$$

但し $\{\rho\}$ は G^* の F -不変な半単純共役類を走り、又

$$\mathcal{E}(G^F, \{\rho\}) = \left\{ \rho \in \widehat{G^F} \mid \begin{array}{l} \langle \rho, R_T^\theta \rangle \neq 0 \\ (T, \theta) \mapsto \{\rho\} \end{array} \right\}$$

であり、 R_T^θ は Deligne - Lusztig の一般指標である。

もしも、 G の中心が連結である時は、次の様な形の既約表現 ρ_σ が $\mathcal{E}(G^F, \{\rho\})$ に属している。

$$\rho_\sigma = \sum_{\substack{(T, \theta) \sim \\ (T, \theta) \mapsto \{\rho\}}} \frac{(-1)^{\sigma(G) - \sigma(T)}}{\langle R_T^\theta, R_T^\theta \rangle} R_T^\theta$$

但し σ は semisimple rank.

1.2 まで以後、 G の中心は、必ずしも連結となりとする。

この時、次の様な \mathbb{F}_q 上定義された連結 reductive 群 \widetilde{G}

が 存在する。

$$(i) G \hookrightarrow \tilde{G} \quad (/ \mathbb{F}_q)$$

(ii) \tilde{G} の 中心は連結。

$$(iii) DG = D\tilde{G}.$$

但し、 DG 及 $U^u D\tilde{G}$ は G 及 $U^u \tilde{G}$ の derived group
である。 G 及 $U^u \tilde{G}$ の dual group をそれぞれ G^* 及 $U^u \tilde{G}^*$
 \tilde{G}^* とすれば 埋め込み

$$z : G \hookrightarrow \tilde{G}$$

により 全射

$$z^* : \tilde{G}^* \longrightarrow G^*$$

が誘導される。そこで $\tilde{\gamma}$ を \tilde{G} の F -不変な極大トーラスとし、
 $\tilde{\theta} \in (\tilde{\gamma}^F)^\wedge$ を定め、

$$T = \tilde{\gamma} \cap G, \quad \theta = \tilde{\theta}|_{T^F} \in (T^F)^\wedge$$

とする。 $(\tilde{\gamma}^*, \tilde{\sigma})$ を $(\tilde{\gamma}, \tilde{\theta})$ の dual pair とし、

(T^*, ρ) を (T, θ) の dual pair とする時、

$$z^*(\{\tilde{\sigma}\}) = \{\rho\}$$

があり、 $z^*(\tilde{\sigma}) = \rho$ と思つて差しつかえない。

W を $\tilde{\gamma}$ の Weyl 群とすれば $T, \tilde{\gamma}^*, T^*$ の Weyl 群とも
同一視できる。 W の部分群を次の様に定める。

$$W_{\tilde{\sigma}} = \{ w \in W \mid \text{ad } w(\tilde{\sigma}) = \tilde{\sigma} \}$$

$$W_{\rho} = \{ w \in W \mid \text{ad } w(\rho) = \rho \}$$

(但し ad は adjoint 作用である: $ad w(x) = wxw^{-1}$) W_0 は次の様にも書ける。

$$W_0 = \{w \in W \mid ad w(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha} \text{ for some } \alpha \in \text{Ker } \tau^*\}$$

従って $W_{\tilde{\alpha}}$ は W_0 の部分群である。 G は中心が連結であるから、 G^* の derived group は単連結であり、従って $\tilde{\alpha}$ の中心化群 $Z_{G^*}(\tilde{\alpha})$ は連結であり、連結な reductive 群となる。 その Weyl 群は $W_{\tilde{\alpha}}$ である。 又 ρ の中心化群 $Z_{G^*}(\rho)$ の単位元成分を $Z_{G^*}(\rho)^0$ とすれば、

$$Z_{G^*}(\rho) / Z_{G^*}(\rho)^0 \cong W_0 / W_{\tilde{\alpha}}$$

さて、ここで、 $Z_{G^*}(\rho)^0$ の T^* に関する root 系 Φ_{ρ} を考え、その F -不変な positive set Φ_{ρ}^+ を定めよう。 $W_{\tilde{\alpha}}$ は Φ_{ρ} に関する Weyl 群であり、又 W_0 は自然に Φ_{ρ} に作用する。そこで、

$$\Gamma = \{w \in W_0 \mid w \Phi_{\rho}^+ = \Phi_{\rho}^+\}$$

によって、 W の部分群 Γ を定めれば、

$$W_0 = W_{\tilde{\alpha}} \cdot \Gamma \quad (\text{半直積})$$

になる。従って特に、

$$Z_{G^*}(\rho) / Z_{G^*}(\rho)^0 \cong \Gamma$$

である。又 Γ は F -不変であるから、上の同型は F の作用と compatible となる。 — 37 —

$W_0 \rightarrow \text{Ker } \psi^* \quad (w \mapsto w \tilde{\sigma} w^{-1} \tilde{\sigma}^{-1})$
 は、 F の作用と可換な準同型で、その核は W_0 である。
 よって、その像は P と同型である。従って P は
 (F の作用を込めて) $\text{Ker } \psi^*$ の部分群と同型である。
 次の様に書ける。

$$P = \{ \sigma \in \text{Ker } \psi^* \mid \tilde{\sigma} \text{ と } \tilde{\sigma}^{-1} \text{ は共役} \}$$

§2. Gelfand-Graev 表現に関連する既約表現。

2.1. Key lemma.

さて、Deligne-Lusztig [2] により次の対応が"定まる"。

$$\left\{ \begin{array}{l} (T', \theta') \\ T': G \text{ の } F\text{-不変な極大トーラス} \\ \theta' \in (T'/F)^\wedge \\ (T', \theta') \text{ と } (T, \theta) \text{ は 閉体上共役} \\ \text{(geo. conj.)} \end{array} \right\} \Big/ \sim_{GF}$$

$$\xrightarrow{|\cdot|} W_0 / \sim_F$$

上の対応を"

$$(T_w, \theta_w) \mapsto \{w\} \in W_0 / \sim_F$$

とする様に、 F -不変な極大トーラス T_w と $\theta_w \in (T_w/F)^\wedge$
 を定める。(G^F -共役を除いて定まる。) 以上の下は
 次の定理が成立する。

定理 2.1.1. F が G の中心 Z の component 群 Z/Z^0

1. identity で作用するとする。その時

① F の $T \setminus 1$ の作用は identity.

② $\forall w \in W_\alpha$ に対して、 $\phi_w \in (ZF)^\wedge$ が定まり、
次の性質が満たされる。

(i) $W_\alpha \ni w \mapsto \phi_w \in (ZF)^\wedge$

は準同型で核は W_α に一致。

(ii) $\forall z \in ZF$ に対して、

$$\theta_w(z) = \phi_w(z) \theta(z)$$

証明は章 11-4 にてあり、省略することとする。

2.2. 今後 F は Z/Z^0 に identity で作用するとする。

従って定理 2.1.1 から F の $T \setminus 1$ の作用は identity である。

さて、 $Z_{G^*F} / (Z_{G^*F})^0 \cong P$ であるから、

$$\{ \rho' \in G^*F \mid \rho' \sim_{G^*F} \rho \} / \sim_{G^*F} \cong T/F = P$$

が成立する。そこで $w \in P$ に対して、 G^*F の半単純元

ρ_w を "閉体上 ρ と共役" 上の対応で

$$\rho_w \leftrightarrow w \in P$$

と定めることを選ぶ。

$$\tau: G \longrightarrow \tilde{G}$$

が, injective であるから, ρ_w の G^{*F} -共役類 $\{\rho_w\}$ は, ある \tilde{G}^{*F} -共役類 $\{\tilde{\rho}_w\}$ の τ^* による像となっている。そこで

$$\tau^*(\tilde{\rho}_w) = \rho_w$$

と置き, τ^* を τ とかえなす。明らかに $\{\rho_w \mid w \in \mathcal{P}\}$ は,

$$\{\sigma' \mid \tilde{G}^* \text{ の半単純元, } \tau^*(\sigma') \sim \rho\}$$

を \tilde{G}^{*F} -共役 に分けた時の $\text{mod}(\text{ker } \tau^*)^F$ の代表である。2.1 で $\mathcal{E}(\tilde{G}^F, \{\tilde{\rho}_w\})$ に属する G^F の既約表現 $\rho_{\tilde{\rho}_w}$ を定義した。以後 簡単の為

$$\tilde{\rho}_w = \rho_{\tilde{\rho}_w}$$

と置く。そして,

$$\rho_w = \tilde{\rho}_w \mid G^F$$

と置く。 ρ_w は $\{\rho_w\}$ のみに依存する G^F の表現である。

さて

$$\{\rho_w \mid w \in \mathcal{P}\}$$

の既約分解を考えよ。その為には,

$$\tau = \theta \mid_{\mathbb{Z}^F}$$

と置き, U を G の F -不変な 極大巾単群とし, χ を U^F の general position の (-次の) 指標とする。

$w \in \mathcal{P}$ に対して, 次の誘導表現を考えよ。

♯

$$I_w = \text{Ind}_{Z^F \times U^F}^{G^F} (\phi_w \tau) \otimes \chi$$

但し $\phi_w \tau$ は Z^F の一次の指標で

$$\phi_w \tau : z \mapsto \phi_w(z) \tau(z)$$

となるものである (ϕ_w は 2.1.1 のもの)。

この時、定理 2.1.1, (2) を使用することによって 要易に示せる。

命題 2.2.1 $\forall w, w' \in \Gamma$ に対して、

$$\langle I_w, P_{w'} \rangle_{G^F} = \begin{cases} 1 & \text{if } w = w', \\ 0 & \text{if otherwise.} \end{cases}$$

命題 2.2.1 より、 $\forall w \in \Gamma$ に対して、 P_w は ある既約表現を multiplicity 1 で含む。ところが P_w は G^F の既約表現の制限であり、従ってその既約成分は G^F の元の adjoint 作用で移り合う。よって

命題 2.2.2 $\forall w \in \Gamma$ に対して、 P_w は multiplicity free である。

2.3. 1.2 によつて、 Γ は $\text{Ker } \tau^*$ の部分群と同視

できず

$$P = \{z \in \text{Ker } \nu^* \mid \tilde{\sigma} \text{ と } \tilde{\sigma}z \text{ は共役}\}$$

である。また、 $\nu^*(\tilde{\sigma})$ と $\nu^*(\tilde{\sigma}w)$ は閉体上共役であるから、

$$P = \{z \in \text{Ker } \nu^* \mid \tilde{\sigma}w \text{ と } \tilde{\sigma}wz \text{ は共役}\}$$

である。さて \tilde{G}^F/G^F はアーベル群であり、

P_w ($w \in P$) は \tilde{G}^F の既約表現 $\tilde{\rho}_w$ の制限である。従って、

$$\langle P_w, P_w \rangle = \#\{\alpha \in (\tilde{G}^F/G^F)^\wedge \mid \tilde{\rho}_w \cong \tilde{\rho}_w \otimes \alpha\}$$

である。dualization によって $\alpha \in (\tilde{G}^F/G^F)^\wedge$ は $z_\alpha \in (\text{Ker } \nu^*)^F$ に対応する。又

$$\tilde{\rho}_w \otimes \alpha = \rho_{\tilde{\sigma}w} \otimes \alpha = \rho_{\tilde{\sigma}w} z_\alpha$$

があり、次が成立。

$$\tilde{\rho}_w \cong \tilde{\rho}_w \otimes \alpha$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\sigma}w \text{ と } \tilde{\sigma}w z_\alpha \text{ が } \tilde{G} \text{ で共役}$$

$$\Leftrightarrow z_\alpha \in P \ (\subset \text{Ker } \nu^*)$$

$$\therefore \langle P_w, P_w \rangle = \#\{z \in P \mid Fz = z\}$$

定理 2.1.1.① より F は P に identity で作用。

よって

命題 2.3.1 $\forall w \in P$ に対して

$$\textcircled{1} \langle P_w, P_w \rangle = |P|$$

\textcircled{2} \tilde{P} は群として同型.

$$\{ \alpha \in (\tilde{G}^F / G^F)^\wedge \mid \tilde{P}_w = \tilde{P}_w \otimes \alpha \} \cong P \quad (\alpha \mapsto \beta \alpha)$$

2.4. $P \subset \text{Ker } \psi$ と思う. $w \in P$ に対応する \tilde{G}^F / G^F の一次の指標を ψ_w で記そう.

$$w \in P \mapsto \psi_w$$

は命題 2.3.1, \textcircled{2} の逆写像である. ± 2 \tilde{G}^F の部分群 K を

$$K = \bigcap_{w \in P} \text{Ker } \psi_w$$

が定義する.

$$\tilde{G}^F \supset K \supset G^F$$

であり, \tilde{G}^F / K がアーベル群があり, 又

$$\{ \psi_w \mid w \in P \}$$

が \tilde{G}^F / K の相異なる指標全てを与えよることから

命題 2.4.1. $\tilde{G}^F / K \cong P$

2.5 P_w ($w \in P$) の既約成分の一つを ρ_0 とすれば, 命題 2.2.2 による 2.4 より

$$K = \{ g \in \tilde{G}^F \mid \rho_0 \cong \rho_0 \cdot \text{ad } g^{-1} \}$$

//

である。今 命題 2.4.1 の同型 \mathbb{I} を固定し、

$w' \in T \cong G^F/K$ に対して、 G^F における代表元を \dot{w}' とする。この時、命題 2.2.1 によって定まる I_w , P_w の共通の既約成分を $P(w, e)$ とすれば、 P_w の既約成分は

$$\{ P(w, e) \cdot \text{ad } \dot{w}'^{-1} \mid w' \in T \}$$

となる。(cf. 命題 2.2.2)

$P(w, w') = P(w, e) \cdot \text{ad } \dot{w}'^{-1}$ ($w, w' \in T$) と置く。明らかに

命題 2.5.1 $\{ P(w, w') \mid w, w' \in T \}$ は互いに同値でない G^F の既約表現を与え、

$$P_w = \sum_{w' \in T} P(w, w') \quad \forall w \in T$$

$$P(w, w') \cdot \text{ad } \dot{w}''^{-1} = P(w, w''w') \quad \forall w, w', w'' \in T$$

が成立する。

2.6. ± 2 有限群 T に対して、次の集合 M 及び \sim pairing を Lusztig [8] に従って導入する。

$$(i) M(T) = \{ (\chi, \sigma) \mid \chi \in T, \sigma \in Z(\chi)^\wedge \} / \sim$$

$$\begin{aligned}
 & \text{(ii)} \quad \{ (x, \sigma), (y, \tau) \} \\
 & = \sum_{g \in \Gamma} |Z(x)|^{-1} |Z(y)|^{-1} \overline{\gamma_h(g'xg, \tau)} \gamma_h(gyg^{-1}, \sigma) \\
 & \quad x(gyg^{-1}) = (gyg^{-1})x \\
 & \quad \forall (x, \sigma), (y, \tau) \in M(\Gamma)
 \end{aligned}$$

今、我々の考察の対象となる群 Γ は、アーベル群である。
この時

$$\begin{aligned}
 & \text{(i)} \quad M(\Gamma) = \{ (x, \sigma) \mid x \in \Gamma, \sigma \in \hat{\Gamma} \} \\
 & \text{(ii)} \quad \{ (x, \sigma), (y, \tau) \} = |\Gamma|^{-1} \overline{\tau(x)} \sigma(y) \\
 & \quad \forall (x, \sigma), (y, \tau) \in M(\Gamma)
 \end{aligned}$$

である。今同型

$$\Gamma \cong \hat{\Gamma} \quad (w \mapsto \tau w)$$

を固定する。この時、命題 2.5.1 の記号の下で、

$$\rho(i, \tau_j) = \rho(i, j) \quad (i, j \in \Gamma)$$

と置く。そこで $(i, j) \in \Gamma$ に対し、

$$\hat{\rho}_{ij} = \sum_{i', j' \in \Gamma} \{ (i, \tau_j), (i', \tau_{j'}) \} \rho(i', j')$$

と定義する。この時、次が成立する。

命題 2.6.1 $p = \text{good prime}$ とする。

$$\begin{aligned}
 & \langle I_k, \tau_i^* \hat{\rho}_{(i,j)} \rangle = \langle I_k, \tau_j(i) \hat{\rho}_{(i,j)} \rangle \\
 & \quad \forall i, j, k \in \Gamma
 \end{aligned}$$

$P = \text{good prime}$ とする理由は、 $\lambda^*(zu)$ ($z \in Z^F$, $u: \text{unip}$) が、 zu にある G^F の $\overline{\alpha}$ の adjoint 作用させたものの形に書ける為である。証明は省略する。
さて、次の (center に指標をつける) Gelfand-Graev 表現を考えよう。

$$I_k \cdot \text{ad } w^{-1} = \text{Ind}_{Z^F \times U^F}^{G^F} (\phi_k \tau) \otimes (\chi \cdot \text{ad } w^{-1})$$

$$k, w, \in P \quad (P \simeq \tilde{G}^F / K)$$

twisting 作用素 λ^* は G^F による adjoint 作用と可換があることから、命題 2.6.1 は

$$\{ I_k \cdot \text{ad } w^{-1} \mid k, w \in P \}$$

の生成する $|P|^2$ -次元の空間と。

$$\{ p_{ij} \mid i, j \in P \}$$

の生成する $|P|^2$ -次元の空間の基底の向の内積関係を与える。これより要易に次が示せる。

定理 2.6.2 ($P = \text{good prime}$)

$\mathcal{E}(G^F, f, \psi)$ に属する G^F の既約表現の指標が張る線型空間が、twisting 作用素 λ^* で固定されると仮定する。すると次が成立。

$$\lambda^* \hat{p}(i, j) = \gamma(i) \hat{p}(j) \quad \forall i, j \in P$$

§3. SL_n

3.1 主定理 $G = SL_n$ とし. $n \mid 8-1$ とする.

(従, $z \in F$ は Z/Z^0 に identity で作用する.)

$\{\lambda\} \subseteq F$ -不変な G^* の単純軌道類とし. W_0^* と $Z_{G^*}(\omega)$ の Weyl 群とし. $\Gamma = Z_{G^*}(\omega) / Z_{G^*}(\omega)^0$ とする. その時

$$\mathcal{S}(G^*, \{\lambda\}) = \bigsqcup_{\lambda \in \widehat{W_0^*} \cdot F} \mathcal{O}_\lambda$$

と分割する. 但し λ は W_0^* の F -不変な既約指標全体を走る. \mathcal{O}_λ は次の有限群 Γ_λ と associate される

$$\Gamma_\lambda = \{i \in \Gamma \mid \lambda \circ \text{adi } i \supseteq \lambda\}$$

その時.

$$\mathcal{O}_\lambda \longleftrightarrow M(\Gamma_\lambda)$$

$$\rho_{(\alpha, \sigma)} \longleftrightarrow (\alpha, \sigma)$$

となる既約表現の parameterization を与えることが出来る.

$$\widehat{\rho}_{(\alpha, \sigma)} = \sum_{(y, \tau) \in M(\Gamma)} \{(x, \sigma), (y, \tau)\} \rho_{(y, \tau)}$$

と定義すれば.

$$\lambda^* \widehat{\rho}_{(\alpha, \sigma)} = \sigma(\alpha) \widehat{\rho}_{(\alpha, \sigma)} \quad \forall (\alpha, \sigma) \in M(\Gamma)$$

が成立する.

証明は.

$$Z_{G^*}(A) \subseteq H^* \subset G^*$$

となる F -不変な regular subgroup $H \subset G$ (i.e. parabolic の Levi subgroup.) が 存在すれば、 H に 帰着する。あとは 定理 2.0.2 の 繰り返し の 適用のみでよい。定理 2.0.2 のみで A の 作用 が 決定できるのは SL_n が type A (cf. proof in [11]) であることによる。詳細は省略する。

References

- [1] T. Asai: On the twisting operators on the finite classical groups, preprint.
- [2] P. Deligne and G. Lusztig: Representations of reductive groups over finite fields, *Ann. of Math. (2)* 103 (1976), 103-161.
- [3] M. T. Karkar and J. A. Green, A theorem on the restriction of group characters and its applications to the character theory of $SL(n, q)$, *Math. Ann.* 215 (1975), 131-134.
- [4] N. Kawanaka, Liftings of irreducible characters of finite classical groups I, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 28 (1982), 851-861, II, *ibid.*, 30 (1984), 499-516.
- [5] N. Kawanaka, Generalized Gelfand-Graev representations of exceptional simple algebraic groups over a finite field, preprint.
- [6] G. I. Lehrer, The characters of the finite special linear groups, *J. Alg.* 26 (1973), 564-583.
- [7] G. I. Lehrer, On the values of characters of semisimple groups over finite fields, *Osaka J. Math.* 15 (1978), 77-99.
- [8] G. Lusztig, Unipotent representations of a finite Chevalley groups of type E_8 , *Quat. J. Math. Oxford* 30 (1979), 315-338.
- [9] G. Lusztig, Characters of reductive groups over a finite field, *Ann. Math. Study* 107, Princeton.
- [10] G. Lusztig, Character Sheaves, I-V, preprint.
- [11] G. Lusztig and B. Srinivasan, The characters of the finite unitary groups, *J. Alg.* 49 (1977), 167-171.
- [12] T. A. Springer and R. Steinberg, Conjugacy classes, in Springer Lecture Notes 131.