数理解析研究所講究録
第 580 巻 1986 年 124-148

Mackey functor と G-functor 再論

北大・理　吉田知行 (Tomoyuki Yoshida)

筆者は昔有限群の transfer 定理に興味を持って勉強していたのだが，その過程で transfer 定理の証明に必要なのは，transfer 写像の持つ性質のうちほんのわずかのこと（とくに Mackey 分解）であることに気付いた．また有限群の表現論にも transfer 定理に似た形のものがあるのを不思議に思っていた．それ以来有限群の transfer 定理を，Green の導入した G-functor に拡張し，さらにそれをモジュラー表現論に応用しようとしてきた．この考えは成功したとはとても言えないが，応用についてはやっと目鼻がついてきた状況である．単なる一般論から脱っしつつある現状を紹介したい．ここでの最終目標は，群の作用するグラフやデザインへの応用である．

§1. G-functor.

J. A. Green が 1971 年に導入した G-functor の概念を，

記号を少し変えて定義する．

<u>Def</u>．Gを有限群，kを可換環とする．G-functor $(\mathfrak{a}, \tau, \rho, \sigma)$は，$k$-加群の族 $\mathfrak{a}(H)$, $H \leq G$ と写像の族

$$\tau_H^K : \mathfrak{a}(H) \longrightarrow \mathfrak{a}(K)\ ;\ \alpha \longmapsto \alpha^K \quad , \quad H \leq K \leq G\ ;$$

$$\rho_H^K : \mathfrak{a}(K) \longrightarrow \mathfrak{a}(H)\ ;\ \beta \longmapsto \beta_H \quad , \quad H \leq K \leq G\ ;$$

$$\sigma_H^g : \mathfrak{a}(H) \longrightarrow \mathfrak{a}(H^g)\ ;\ \alpha \longmapsto \alpha^g \quad , \quad H \leq G,\ g \in G,$$

（ここで，$H^g := g^{-1}Hg$）で次の公理をみたすものから成る．以下では，$\alpha \in \mathfrak{a}(H)$，$\beta \in \mathfrak{a}(K)$ とする．

(G.1) $\alpha^H = \alpha$，$(\alpha^K)^L = \alpha^L$ if $H \leq K \leq L \leq G$；

(G.2) $\beta_K = \beta$，$(\beta_H)_D = \beta_D$ if $D \leq H \leq K \leq G$；

(G.3) $(\alpha^g)^{g'} = \alpha^{gg'}$，$\alpha^h = \alpha$ if $g, g' \in G$，$h \in H$；

(G.4) $(\alpha^K)^g = (\alpha^g)^{K^g}$，$(\beta_H)^g = \beta^g{}_{H^g}$ if $H \leq K \leq G$，$g \in G$；

(G.5)（Mackey 分解）$H, K \leq L \leq G$ に対し，

$$\alpha^L{}_K = \sum_{g \in H \backslash L / K} \alpha^g{}_{H^g \cap K}{}^K \qquad (\alpha \text{ は代表元を動く}).$$

明らかに，$H \longmapsto R(H)$（指標環）は，induction map，restriction map などとともに，上の公理をみたす．また，V が kG-加群のとき，$H \mapsto H^n(H, V)$（コホモロジー群）も cor, res, con によって G-functor になる．$n = 0$ のときは，$H^0(H, V) = V^H := \{v \in V \mid vh = v \ \ \forall h \in H\}$ に注意．

<u>Def.</u> G-functor の間の morphism $\theta : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ は，k-linear map の族 $\theta(H) : \mathfrak{a}(H) \to \mathfrak{b}(H)$, $H \leq G$, で，τ, ρ, σ と可換なものから成る．したがって G-functor のカテゴリー $\mathfrak{M}_k(G)$ を得る．

例えば，kG-hom $U \to V$ は $H^n(-, U) \to H^n(-, V)$ を誘導する．

<u>Def.</u> G-functor $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ に対し，pairing $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \to \mathfrak{c}$ は，k-bilinear map の族

$$\mathfrak{a}(H) \times \mathfrak{b}(H) \to \mathfrak{c}(H) \quad ; (\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \cdot \beta$$

で，以下の公理をみたすものから成る：（$H \leq K$, $g \in G$; $\alpha \in \mathfrak{a}(H)$, $\alpha' \in \mathfrak{a}(K)$, $\beta \in \mathfrak{b}(H)$, $\beta' \in \mathfrak{b}(K)$ とする），

(P.1) $(\alpha' \cdot \beta')_H = \alpha'_H \cdot \beta'_H$, $(\alpha \cdot \beta)^g = \alpha^g \cdot \beta^g$;

(P.2) $\alpha^K \cdot \beta' = (\alpha \cdot \beta'_H)^K$;

(P.3) $\alpha' \cdot \beta^K = (\alpha'_H \cdot \beta)^K$.

上で，(P.2) と (P.3) は Frobenius の相互律である．

これによって普通の環や加群の場合と同様に，G-functor についても "ring" や "module" の概念が定義される．例えば，$H \mapsto R(H)$ は "ring" であり，また $U \times V \to W$ が kG 加群の G-pairing なら，$H^n(-, U) \times H^n(-, V) \xrightarrow{\smile} H^n(-, W)$ は

G-functor の pairing である．A が G-algebra なら，$H^n(-,A)$ は "ring" である．

さて，Green の結果を述べよう．G-functor $\mathfrak{a}$ と $D \leq H \leq G$ に対し，$\mathfrak{a}(D)^H := \mathrm{Im}\,(\tau_D^H : \mathfrak{a}(D) \to \mathfrak{a}(H))$ とおく．さらに H の部分群のある族 $\mathfrak{X}$ に対し，

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{X})^H := \sum_{X \in \mathfrak{X}} \mathfrak{a}(X)^H$$

とおく．$\mathrm{Sub}(G) := \{H \leq G\}$ とする．

<u>Def</u>. G-functor $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{Sub}(G)$ に対し，$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{X}$-projective $\underset{def}{\Leftrightarrow}$ $\mathfrak{a}(G) = \mathfrak{a}(\mathfrak{X})^G$．また $\mathfrak{X}$ が $\mathfrak{a}$ の defect base $\underset{def}{\Leftrightarrow}$ $\mathfrak{X}$ は subconjugate closed で $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{X}$-projective，かつ $\mathfrak{X}$ はこの性質をみたすもののうちで最小のもの．

例えば，$H \mapsto R(H)$（指標環）について言えば，その defect base はいわゆる基本部分群全体の族である．加群の vertex や，ブロックの defect group もこの方法で定義できる．

<u>定理</u>（Green）G-functor $\mathfrak{a}$ が "ring"[1] なら，$\mathfrak{a}$ はただ一つの defect base をもつ．

<u>定理</u>（Green）．$\mathfrak{a}$ を G-functor，$D \leq H \leq G$ とし，

$$\mathfrak{X} := \{D^g \cap D \mid g \in G - H\} \subseteq Sub(D),$$
$$\mathfrak{Y} := \{D^g \cap H \mid g \in G - H\} \subseteq Sub(H)$$

とおく．もし $\mathfrak{a}(\mathfrak{X})^H = \mathfrak{a}(D)^H \cap \mathfrak{a}(\mathfrak{Y})^H$ なら，

$$\mathfrak{a}(D)^G / \mathfrak{a}(\mathfrak{X})^G \cong \mathfrak{a}(D)^H / \mathfrak{a}(\mathfrak{X})^H .$$

これはいわば加群の Green 対応の変形である．このほか，Green は，$e^2 = e \in \mathfrak{a}(G)$ に対し，G-functor $e\mathfrak{a}e : H \mapsto e_H\, \mathfrak{a}(H)\, e_H$ の defect base を e の defect base $\mathfrak{D}(e)$ と呼んで，ある場合（$eAe/J(eAe)$ が division ring のとき）に $\mathfrak{D}(e) = \{X \le_G D\}$ となる D の存在を示した．これについて，Brauer の first main が成立している．

§2．transfer 定理と induction 定理．

__Def__. G-functor $\mathfrak{a}$ が cohomological $\underset{def}{\Leftrightarrow}$ $\beta_H{}^K = |K:H|\beta$ ${}^\forall H \le K \le G$.

さて，cohomological G-functor についていくつかの transfer 定理がある．例えば D. Higman の focal subgroup 定理は次のような形になる：

定理. $\mathfrak{a}$ を cohomological な G-functor, $P \in Syl_p(G)$, さらに係数環 R において $|G:P|$ が逆元をもつと仮定する. このとき, ρ^G_P によって

$$\mathfrak{a}(G) \cong \{\alpha \in \mathfrak{a}(P) \mid {\alpha^g}_{P^g \cap P} = \alpha_{P^g \cap P} \quad \forall g \in G\}.$$

この結果は群のコホモロジー群の場合に良く知られている. この他 Wielandt 型の transfer 定理も作れる ([Yo. 80]).

cohomological でない場合の transfer 定理は少し修正を要する.

定理. $\mathfrak{r}$ を "ring", $\mathfrak{a}$ を "$\mathfrak{r}$-module", $\mathfrak{r}$ は H-projective とする. すると $\exists \varphi \in \mathfrak{r}(H)$ s.t. $\varphi^G = 1$. このとき次は完全系列である.

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a}(G) \xrightarrow{\rho^G_H} \mathfrak{a}(H) \underset{\rho''}{\overset{\rho'}{\rightrightarrows}} \prod_{g \in H\backslash G/H} \mathfrak{a}(H^g \cap H)$$

ここで, $\rho'(\alpha) = \left({\alpha^g}_{H^g \cap H} \, {\varphi^g}_{H^g \cap H}\right)_g$,

$\rho''(\alpha) = \left(\alpha_{H^g \cap H} \, {\varphi^g}_{H^g \cap H}\right)_g$.

即ち, $\mathfrak{a}(G) \cong \{\alpha \in \mathfrak{a}(H) \mid \rho'(\alpha) = \rho''(\alpha)\}$.

(この結果は sheaf を思い出させる).

Wielandt 型の transfer 定理については, [Sa. 82] にある.

応用として佐々木氏の次の定理がある．

<u>定理</u>．Fを標数$p\neq 0$の体，Uを直既約FG加群，$vtx(U)=D$はアーベル群，WをUのsourceとする．$N_G(D)\leq H\leq G$，VをUのGreen対応とする（i.e. Vは直既約FH加群で，$vtx(V)=D$，$U\mid V^G$）．$\forall d\in D$に対し，$W(d-1)^{p-1}=0$と仮定する．このとき，コホモロジー群の同型

$$\hat{H}^*(G,U)\cong\hat{H}^*(H,V)$$

がある．

さて，G-functorについてはtransfer定理と並んで，induction定理と呼ばれる結果がある．G-functor $\mathfrak{a}$と部分群族$\mathfrak{X}\subseteq Sub(G)$に対し，

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{X})^G:=\sum_{X\in\mathfrak{X}}Im(\tau_X^G:\mathfrak{a}(X)\to\mathfrak{a}(G))\leq\mathfrak{a}(G),$$

$$K(\mathfrak{a},\mathfrak{X}):=\{\alpha\in\mathfrak{a}(G)\mid \alpha_X=0\quad\forall X\in\mathfrak{X}\}\leq\mathfrak{a}(G)$$

とおく．例えば，$\mathfrak{a}=R:H\longmapsto R(H)$（指標環）のときは，$\mathfrak{C}:=\{\text{cyclic subgp}\}$，$\mathfrak{H}:=\{\text{基本部分群}\}$とおくことにより，次のよく知られたinduction定理が得られる：

Artin：　$|G|\,R(G)\subseteq R(\mathfrak{C})^G$．

Brauer：　$R(G)=R(\mathfrak{H})^G$．

一般のG-functorについてはDressの定理がある．

<u>定理</u>(Dress)　$\mathfrak{a}$ を G-functor，p を素数，$\mathfrak{X} \subseteq Sub(G)$,

$H_p\mathfrak{X} := \{H \leq G \mid \exists X \in \mathfrak{X}\ \text{st}\ X \trianglelefteq H$ かつ H/X は p 群$\}$

とおく．このとき，

$$|G|_p \cdot \mathfrak{a}(G) \subseteq \mathfrak{a}(H_p\mathfrak{X})^G + K(\mathfrak{a}, \mathfrak{X}).$$

$\mathfrak{a} = R$ で $\mathfrak{X} = \mathfrak{C} = \{\text{cyclic subgp}\}$ とすれば，Artin の定理と，Brauer の定理の中間段階（hyper-elementary induction）がただちに得られる．（$K(R, \mathfrak{C}) = 0$ に注意）．いろいろな相対 Grothendieck 群の場合については Dress [Dr. 74]．

Dress の定理の証明には，次節で述べる Burnside 環の理論が必要である．

§3．有限群のバーンサイド環．

有限群 G の Burnside 環 $B(G)$ は有限 G 集合のカテゴリーの直和と直積に関する Grothendieck 環である．対応 $H \longmapsto B(H)$ は G-functor になる．これは "ring" であり，指標環への準同型 $B(H) \longrightarrow R(H)$; $[H\backslash G] \longmapsto 1_H{}^G$ は G-functor の "ring homomorphism" を与える．Burnside 環と G-functor の関係は次の補題で明らかになる．

<u>補題</u>．$\mathfrak{a}$ を G-functor とすると bilinear map

$$\mathfrak{a}(H) \times B(H) \longrightarrow \mathfrak{a}(H)\ ;\ (\alpha, [D\backslash H]) \longmapsto \alpha_D{}^H$$

は G-functor の pairing $\mathcal{A}\times B \to \mathcal{A}$ を与える．

つまり Burnside ring は G-functor の理論において，整数環にあたる．Burnside ring の理論については tom Dieck の本 [Di, 79] に詳しい．

巾等元公式について述べよう．μ を G の部分群束 $Sub(G)$ の Möbius 関数とする．即ち，$\mu(H,H)=1$; $\mu(H,K)=0$ if $H \not\leq K$; $\sum_{H\leq D\leq K}\mu(H,D)=\delta_{H,K}$. また $\mathbb{Z}_{(p)}:=\{a/b \mid a,b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0,\ (b,p)=1\}\subseteq \mathbb{Q}$ とおく．

定理 (Gluck, Yoshida). (i) $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$ の原始巾等元は次の形をしている：

$$e_{G,H} := \frac{1}{|N_G(H)|}\sum_{D\leq H}|D|\mu(D,H)[D\backslash G].$$

$e_{GH}=e_{GK} \Leftrightarrow (H)=(K)$ (i.e. H と K が G で共役).

(ii) $\mathbb{Z}_{(p)}\otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$ の原始巾等元は次の形をしている：

$$e^{p}_{G,Q} := \sum_{(H):\,O^p(H)=Q} e_{GH}$$

ここで，$O^p(H)=\langle p'\text{-元} \in H\rangle$ で，Q は p-perfect (i.e. $O^p(Q)=Q$) な部分群である．

この定理より，sub-conjugate closed な $\mathcal{X}\subseteq Sub(G)$ に対し，

$$\mathbb{Z}_{(p)}\otimes B(G) = \bigoplus_{(Q)} e^{p}_{GQ}(\mathbb{Z}_{(p)}\otimes B(G))$$

$$Q \in \mathcal{H} \iff |G|_{p'} e^{p}_{GQ} \in K(B, \mathcal{H}),$$
$$Q \notin \mathcal{H} \iff |G|_{p'} e^{p}_{GQ} \in B(H_p \mathcal{H})^{G}$$

であることがわかる．これより Burnside 環についての Dress induction 定理が得られる．一般の場合は上の補題による．

他にも多くの応用がある．

定理 (Wielandt 1960). G と V を位数が互いに素な有限群で，G が V に作用しているとする．$\mathcal{C}$ を G の巡回部分群全体，μ を $Sub(G)$ の Möbius 関数とする．このとき，

$$|C_V(G)|^{|G|} = \prod_{Z \in \mathcal{C}} |C_V(Z)|^{|Z|\nu(Z)},$$

ここで，$\nu(Z) := \sum_{Z \subseteq D \in \mathcal{C}} \mu(Z, D)$，$C_V(G) := \{v \in V \mid v^g = v \ \forall g \in G\}$.

この定理の証明は V が FG-加群，ここで F は標数 p の体，$p \nmid |G|$ の場合に帰着される．$R_F(G)$ を FG-加群の Grothendieck 環とする．$p \nmid |G|$ より $K(R_F, \mathcal{C}) = 0$．これより，$B(G) \to R_F(G)$ による e^{p}_{GH} の像 ε^{p}_{GH} は $H \notin \mathcal{C}$ のとき 0．巾等元公式より

$$|G| \cdot [V] = \sum_{Z \in \mathcal{C}} |Z| \nu(Z) [V_{\downarrow Z}{}^{\uparrow G}].$$

$$\therefore \ |G| \cdot \dim C_V(G) = \sum_{Z} |Z| \nu(Z) \dim C_V(Z).$$

となって Wielandt 位数公式を得る．

同様の方法でガロア拡大の中間体のDedekindゼータ関数や類数の間の関係([Hu, 80], [RS, 82])が得られる.

さてkが$\mathbb{Z}_{(p)}$上の可換多元環の場合を考える．このとき，G-functor $\mathcal{B}: H \mapsto \mathcal{B}(H)$は直和分解

$$\mathcal{B} = \bigoplus_{(Q)} e^p_{GQ} \mathcal{B}$$

をもつ．ここで，(Q)は$O^p(Q)=Q$をみたす$Q \leq G$の共役類上を動く．この分解はG-functor $\mathfrak{a}$の分解

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{(Q)} e^p_{GQ} \mathfrak{a}$$

をひきおこす．$e^p_{GQ}\mathcal{B}$はH-projectiveである．ここで$H \leq G$で$H/Q \in Syl_p(N_G(Q)/Q)$．§2の初めの2つのtransfer定理は次のようになる．

<u>定理</u>: $e^p_{GQ}\,\mathfrak{a}(G) \cong e^p_{N_G(Q),Q}\,\mathfrak{a}(N_G(Q))$.

もし$\mathfrak{a}$がcohomologicalなら，$e^p_{G1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$である．

§4. cohomological G-functorとHecke環.

$\mathcal{H}_{kG}$, $\mathcal{M}^{triv}_{kG}$, $\mathcal{M}_{kG}$をそれぞれpermutation kG-modules, trivial source modules, kG-modulesのカテゴリーとする．$\mathcal{H}_{kG} \subsetneq \mathcal{M}^{triv}_{kG} \subseteq \mathcal{M}_{kG}$ (full)である．$\mathcal{H}_{kG}$をHeckeカテゴリーという．

$\mathcal{M}_k(G)^{coh}$をcohomological G-functorのカテゴリーとす

る．次が基本的である：

<u>定理</u> ([Yo 83a]) $\mathcal{M}_k(G)^{coh} \simeq [\mathcal{H}_{kG}, \mathcal{M}_k]$ (functor cat),

$\simeq [\mathcal{M}_{kG}^{triv}, \mathcal{M}_k]$.

対応は，$\mathfrak{a} \longmapsto (k[H\backslash G] \mapsto \mathfrak{a}(H))$ で与えられる．したがって $\mathfrak{a}$ が cohomological G-functor なら $\mathfrak{a}(H)$ は Hecke 環 $k[H\backslash G/H] \simeq End_{kG}(k[H\backslash G])$ 上の加群である，また $kG = \oplus_B e_B kG$ をブロックへの分解とすれば，$\mathfrak{a} = \oplus_B e_B \mathfrak{a}$ となり，$\mathcal{M}_k(G)^{coh}$ でもブロックの概念があることとなる．中心 $Z(kG)$ の $\mathfrak{a}(H)$ への作用は，$C \ni x$ を G-共役類，$\alpha \in \mathfrak{a}(H)$ としたとき，($\bar{C} := \sum_{c\in C} c$)，

$$\mathfrak{a}(H) \times Z(kG) : (\alpha, \bar{C}) \longmapsto |H \cap H^x : C_H(x)|\, \alpha^x$$

で与えられる．このことから次のよく知られた結果を得る：

<u>定理</u>. D が G の p-ブロックの defect 群なら，ある p'-元 x とシロー p 群 P があって，$D = P \cap P^x \in Syl_p C_G(x)$.

モジュラー表現との関係で少し述べておこう．k を標数 p の体としておく．カテゴリーの full な埋めこみ

$$\mathfrak{C} : \mathcal{M}_{kG} \longrightarrow \mathcal{M}_k(G)^{coh} ; V \longmapsto \mathfrak{C}_V$$

ここで $\mathfrak{C}_V$ は $\mathfrak{C}_V(H) := \{v \in V \mid vh = v \ \forall h \in H\}$,

$$Tr_H^K = \tau_H^K : u \longmapsto \sum_{g \in H\backslash K} ug \quad (trace),$$

$$c_H^g : u \longmapsto ug,$$

$$\rho_H^K : V \longmapsto V \quad (\text{inclusion})$$

で定義される G-functor.

V が既約 kG 加群でも $\mathbb{C}_V$ は既約とは限らない. 実際,

$$\mathbb{C}_V'(H) := \mathrm{Im}\,(\tau_1^H : V \longrightarrow \mathbb{C}_V(H)) \subseteq \mathbb{C}_V(H)$$

とおけば $\mathbb{C}_V' \subseteq \mathbb{C}_V$. すると G-functor は既約なモジュラー指標をさらに分解することになる. ここでモジュラー表現論に習って G-functor の理論を作ることが一つの目標となる. うまくいく所もあればいかない所もある. 例えば丹原氏はカルタン写像

$$c : K_0(\mathcal{M}_k(G)^{coh}) \longrightarrow G_0(\mathcal{M}_k(G)^{coh})$$

が単射でないことを示した. G-functor のカテゴリーでも同様である. それでも G-functor について G_0 や K_0 を考えることは意義がある.

cohomological G-functor と Hecke 環についての他の話題については [RS. 82], [Fo. 84].

§5. Mackey functor.

1972 年の論文で, Dress は G-functor の概念を抽象化して Mackey functor の概念を導入した. Dress のこの論文は難解だが今も一読に値する. 有限群の表現論よりもトポロジーでよく使われる概念である. また最近では Neukirich に

よって類体論の簡易化にも使われたと聞く．

<u>Def</u>. 2つのfunctorの対 $M:=(M^*,M_*):\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{B}$ が Mackey functorであるとは，M^*が反変，M_*が共変で，object $X\in\mathcal{C}$に対し $M^*(X)=M_*(X)$ $(=:M(X))$ で次をみたすものをいう：（$\mathcal{C}$はpull-backをもつとする）．

(M1)
$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[g]{} & Z \end{array} \text{ が pullback } \Rightarrow \begin{array}{ccc} M(W) & \xrightarrow{u_*} & M(X) \\ {\scriptstyle v^*}\uparrow & \circlearrowright & \uparrow{\scriptstyle f^*} \\ M(Y) & \xrightarrow[g_*]{} & M(Z) \end{array}$$

ここで $f^*:=M^*(f)$, $g_*:=M_*(g)$ など．

(M2) M^*は$\mathcal{C}$の直和図式 $X\longrightarrow X+Y\longleftarrow Y$ を直積図式 $M(X)\longleftarrow M(X+Y)\longrightarrow M(Y)$ に写し，始対象$\emptyset$を終対象に写す．

．$\mathcal{S}et_f{}^G$を有限G集合のカテゴリーとすると，$\mathcal{S}et_f{}^G$は有限直和，有限直積をもつ．$\mathcal{S}et_f{}^G$から$\mathcal{M}_k$（k加群のカテゴリー）へのMackey functorのカテゴリーを$Mc(\mathcal{S}et_f{}^G,\mathcal{M}_k)$とする．

<u>補題</u>．$\mathcal{M}_k(G)\cong Mac(\mathcal{S}et_f{}^G,\mathcal{M}_k)$.

Mackey functor $M=(M^*,M_*)$が与えられているとして，$a(H):=M(H|G)$，$\tau_H^K:=M_*(H|G\longrightarrow K|G)$，$\rho_H^K:=M^*($

$H\backslash G \to K\backslash G$）などとすればG-functor $\mathfrak{a}$を得る。逆にG-functor $\mathfrak{a}$を与えて、

$$M(X) := \Big(\prod_{x\in X} \mathfrak{a}(G_x)\Big)^G \quad (\text{G-fixed point set})$$

ここで、G_xはxのstabilizer，$(\alpha_x)_{x\in X}{}^g := (\alpha_{xg^{-1}}{}^g)_{x\in X}$によってGを$\prod \mathfrak{a}(G_x)$に作用させる．$f: X \to Y$に対し，

$$f_*: (\alpha_x)_x \longmapsto \Big(\sum_{x\in f^{-1}(y)/G_y} \alpha_x{}^{G_y}\Big)_y ,$$

$$f^*: (\beta_y)_y \longmapsto \big(\beta_{f(x)}{}_{G_x}\big)_x$$

とする。これによってMはMackey functorになる．

この補題によって、G-functorに関する概念はMackey functorの言葉で書き表わせる．例えば次は"focal subgroup theorem"の書き換えである．

<u>定理</u>．AがMackey functor $\mathcal{E} \to \mathfrak{M}_R$で"ring"で、X-projective（ie $A(X) \twoheadrightarrow A(1)$）．Mが"A-module"とする．このとき次は完全

$$0 \leftarrow M(1) \xleftarrow{\partial} M(X) \xleftarrow{\partial} M(X^2) \leftarrow \cdots$$

ここで $\partial = \sum (-1)^i M_*(d_i)$，$d_i: X^n \to X^{n-1}$はface作用素．

有限群のfocal subgroup theoremは$M(X)$での完全性を意味している．もっと高次での完全性は何を意味しているのだろう．

補題. Mackey functorは表現可能. 即ちあるpreadditiveカテゴリー $Sp(\Sigma)$ へのMackey functor $Sp : \Sigma \rightrightarrows Sp(\Sigma)$ があって, $\forall M \in M_c(\Sigma, \mathcal{B})\ \exists! F : Sp(\Sigma) \to \mathcal{B}$ s.t. $M = F \circ Sp$.
とくに $M_c(\Sigma, \mathcal{B}) \cong [Sp(\Sigma), \mathcal{B}]$.

カテゴリー $Sp(\Sigma)$ は次のようにして作られる.

$$Ob(Sp(\Sigma)) = Ob(\Sigma),$$

$$Hom_{Sp(\Sigma)}(X, Y) = \{ X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{f''} Y \mid A \in \Sigma \} / \cong .$$

ここで $\cong$ は $X \times Y$ 上のobjectの同型を意味する. (f', f'') と (g', g'') の合成は次で決まる (h', h'') である:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "h''"] \arrow[dd, bend right, "h'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{pull-back}"] & B \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "g'"] & Z \\
A \arrow[r, "f''"'] \arrow[d, "f'"'] & Y & \\
X & &
\end{tikzcd}$$

有限群の場合, 次のようなfunctorの列がある.

$$Sets_f^G \rightrightarrows Sp(Sets_f^G) \longrightarrow H_{kG} \hookrightarrow \mathcal{M}_{kG}$$

$$\begin{array}{lll}
X & \longmapsto X & \longmapsto kX \\
X \xrightarrow{f} Y & \longmapsto (X \xleftarrow{1} X \xrightarrow{f} Y) & \\
 & (Y \xleftarrow{f} X \to X) & \\
 & (X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{f''} Y) & \longmapsto (|f'^{-1}(x), f''^{-1}(y)|)_{x,y}.
\end{array}$$

(上の補題を用いて)，G-functor の inductionなどを定義できる；

$$\mathcal{S}et_f{}^H \underset{res}{\overset{ind}{\rightleftarrows}} \mathcal{S}et_f{}^G$$

$$\therefore\ Sp(\mathcal{S}et_f{}^H) \underset{res}{\overset{ind}{\rightleftarrows}} Sp(\mathcal{S}et_f{}^G)$$

$$\therefore\ \mathcal{M}_k(H) \underset{res}{\overset{ind}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}_k(G) \qquad (\text{Kan extension}).$$

J. A. Greenなどは，functor category $[\mathcal{M}_{kG}{}^{op}, \mathcal{M}_k]$ を考えている．しかし $\mathcal{M}_k(G) \cong [Sp(\mathcal{S}et_f{}^G), \mathcal{M}_k]$ や $\mathcal{M}_k(G)^{coh} \cong [H_{kG}, \mathcal{M}_k]$ も色々良い性質を持っている．例えば k が体などのとき，これらのカテゴリーで既約な object は有限個である．

Mackey functor M があれば，$\mathrm{End}_{Sp(\varepsilon)}(X)$ は $M(X)$ に作用している．実際 $(X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{f''} X)$ の作用を

$$M(X) \xrightarrow{f'^*} M(A) \xrightarrow{f''_*} M(X)$$

で定義すればよい．この作用を G-functorの言葉でいうと，作用 $[H, x, A, H] : \mathfrak{a}(H) \longrightarrow \mathfrak{a}(H)\ ;\ \alpha \longmapsto \alpha^x{}_A{}^H$ ということになる．(Hecke 環の元 (HxH) の作用は $\alpha \longmapsto \alpha^x{}_{H^x \cap H}{}^H$).

モジュラー表現の Brauer 準同型について考える．$D \trianglelefteq N \leq G$ とする．このとき，対応 $X \longmapsto X^D := \{x \in X \mid x\alpha = x\ \forall \alpha \in D\}$ は functor $Br : \mathcal{S}et_f{}^G \longrightarrow \mathcal{S}et_f{}^N$ を与える．これは次の

functorを誘導する：

$$Br: \mathcal{S}p(\mathcal{S}et_f^G) \longrightarrow \mathcal{S}p(\mathcal{S}et_f^N)\,;\, X \longmapsto X^D.$$

これはさらに次を誘導する：

$$Br: \mathcal{M}_k(N) \longrightarrow \mathcal{M}_k(G).$$

$$br = Z(Br): Z(\mathcal{S}p(\mathcal{S}et_f^G)) \longrightarrow Z(\mathcal{S}p(\mathcal{S}et_f^N)) \quad (\text{中心}).$$

Hecke categoryで考えると，Dがp-部分群$(p=\mathrm{ch}\,k)$のときのみ，

$$Br: \mathcal{H}_{kG} \longrightarrow \mathcal{H}_{kN} \;;\; k[X] \longmapsto k[X^D],$$

$$Br: \mathcal{M}_k(N)^{coh} \longrightarrow \mathcal{M}_k(G)^{coh},$$

$$\begin{array}{ccc} br = Z(Br): Z(\mathcal{H}_{kG}) & \longrightarrow & Z(\mathcal{H}_{kN}) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ Z(kG) & \longrightarrow & Z(kN) \;;\; \sum_{g\in G} a_g g \longmapsto \sum_{g \in C_N(D)} a_g g \end{array}.$$

が誘導され，最後のbrはBrauer準同形である．したがってBrはBrauer functorと呼ぶのがふさわしい．

§6. 組合せ論への応用．

組合せ論への応用が当然考えられる．例えば(P, B)をブロックデザインとし，$A := \{(p,b) \mid p \in b \in B\} \subseteq P \times B$とおけば自然な写像 $P \leftarrow A \rightarrow B$がある．これは$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}p(\mathcal{S}et_f)}(P, B)$の元とみなせる．

明らかに$\mathcal{S}p(\mathcal{S}et_f) \simeq \mathrm{Mat}_{\mathbb{N}_0}$，$\mathcal{H}_k \simeq \mathrm{Mat}_k$．ここで$\mathrm{Mat}_k$はobjectが有限集合で，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mat}_k}(X, Y) = \mathrm{Mat}(X \times Y; k)$

（$X\times Y$ 型の行列全体）．したがって代数的組合せ論のいくつかの概念や結果を G-functor や Mackey functor という面から見ることもできる．以下では有限集合のカテゴリー $\mathcal{S}et_f$ のかわりに有限 G-集合のカテゴリー $\mathcal{S}et_f^G$ で考える．これは有限群 G の作用している組合せ論を研究するのに役立つと思う．群の作用がない場合は与えられた結合構造から何かの functor category を作り，そこで同じように Hecke 環などを調べるということになる．しかしまだ成果は上がっていない．

次は Fischer の不等式である．

<u>定理</u>．(P,B) を 2-(v,k,r,b,λ) デザインで $G\leq Aut(P,B)$ とする．可換環 R において，r, k, $n:=r-\lambda$ は可逆と仮定する．$\mathfrak{a}$ を R 係数の cohomological G-functor とする．このとき，

$$\bigoplus_{p\in P/G}\mathfrak{a}(G_p)\ \text{は}\ \bigoplus_{b\in B/G}\mathfrak{a}(G_b)\ \text{の直和因子．}$$

（ここで $p\in P/G$ は完全代表系をとり，G_p は p の stabilizer）．

実際，$M: \mathcal{H}_{RG}\longrightarrow \mathcal{M}_R$ を $\mathfrak{a}$ に対応する functor とする．

$$(r-\lambda)I+\lambda J: RP\xrightarrow{A} RB\xrightarrow{{}^tA} RP$$

は同型（$\det = rk(v-\lambda)^{v-1}\in R^*$）だから，$M$ で飛ばすと，定理を得る．

$\mathfrak{a}=\mathbb{C}_a$ とすることによって有名な $|P/G|\leqq|B/G|$ を得る．また $RP\,|\,RB$ もわかる．なお A, ${}^tA$ の誘導する写像は次で与えられる：

$$A:\ \Big(\bigoplus_{p\in P}\mathfrak{a}(G_p)\Big)^G \longrightarrow \Big(\bigoplus_{b\in B}\mathfrak{a}(G_b)\Big)^G$$

$$\quad\ \ \psi$$

$$(\alpha_p)_{p\in P}\longmapsto\Big(\sum_{p\in b/G_b}\alpha_p{}_{G_{pb}}^{\ G_b}\Big)_{b\in B},$$

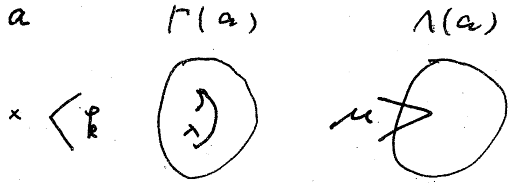
$$A':\quad(\beta_b)_{b\in B}\longmapsto\Big(\sum_{\substack{b\in B/G_p\\ :\,p\in b}}\beta_b{}_{G_{pb}}^{\ G_p}\Big)_{p\in P}.$$

ここで $p\in b/G_b$ は p がブロック b の G_b-orbit の完全代表系を動くことを意味する．

最後に強正則グラフ (X,E) を考える．$G\leq Aut(X,E)$ とする．$E={}^tE\subseteq X\times X$ だから $(X\leftarrow E\rightarrow X)\in End_{\mathcal{S}p(Set_f{}^G)}(X)$ である．しかし $\mathcal{S}p(Set_f{}^G)$ では計算がうまくゆかずやはり H_{RG} で考えざるを得ない．$X\leftarrow E\rightarrow X$ を H_{RG} に落とすと

$$A:RX\longrightarrow RX;\quad x\longmapsto\sum\nolimits_{y\in\Gamma(x)}y$$

となる．ここで $\Gamma(x)=\{y\in X\mid(x,y)\in E\}$．仮定によって $|\Gamma(x)|=k=const.$ A を行列で書いたものが結合行列である．パラメータ $n:=|X|=1+k+l$, λ, μ は次の図で定まる：



$$n = 1 + k + l.$$

すると，Aの最小多項式は

$$(A - k)(A^2 - (\lambda-\mu)A - (k-\mu)) = 0.$$

さて$\mathfrak{A}$をcohomological G-functorとすると，Aは次の写像を誘導する：

$$\rho_A : \Big(\bigoplus_{x\in X} \mathfrak{A}(G_x)\Big)^G \longrightarrow \Big(\bigoplus_{x\in X} \mathfrak{A}(G_x)\Big)^G$$

$$(\alpha_x)_{x\in X} \longmapsto \Big(\sum_{y\in\Gamma(x)/G_x} \alpha_y {}^{G_x}_{G_{xy}}\Big)_{x\in X}.$$

とくにGがX上可移で，$H := G_\infty$，$\infty\in X$とすると，

$$\rho_A : \mathfrak{A}(H)\to\mathfrak{A}(H);\ \alpha \longmapsto \sum_{HgH\in G/H:\ \infty g\in\Gamma(\infty)} \alpha^g {}^H_{H^g\cap H}$$

したがってGがX上rank 3なら，これはHecke環の元(HgH)の作用$\alpha\longmapsto \alpha^g {}^H_{H^g\cap H}$と一致する．

ρ_AもAと同じ多項式を0にするので，G集合でない場合に習ってGの作用をもつ強正則グラフを研究できる．例えばGが素数位数の巡回群でX上正則に作用する場合を考える．すると$\rho := \sum_{g\in G:\ \infty g\in\Gamma(\infty)} g \in \mathbb{Q}G$も$A$と同じ多項式を0にする．$\mathbb{Q}G \cong \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$だから整数論的議論により（ガウスの和），$(X, E)$がPaleyグラフかそのdualとなる．

次に G が X 上可移, $H=G_\infty\ (\infty\in X)$, $P\in Syl_p\, G$, $N_G(P)\subseteq H$, さらに P は可換と仮定する. G-functor

$$\mathcal{G}: H \longmapsto H_1(H, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong H/H^p[H,H]$$

をとる. transfer の計算によって, $\rho_A=0$ となる. したがって 0 が $(x-k)(x^2-(\lambda-\mu)x-(k-\mu))=0$ の $GF(p)$ での根となる. 結局, 上の仮定のもとで

$$k\equiv 0 \text{ or } \mu \mod p \quad \text{if } \exists H_0 \overset{p}{\triangleleft} H$$

となる.

§∞. あとがき.

Mackey functor の理論はさらに発展する. A を有限カテゴリーとし, $\varphi: \mathbb{Z}[A/\cong] \longrightarrow \mathbb{Z}^{A/\cong};\ a\longmapsto (|A(i,a)|)_i$ とおく. A が unique epi-mono 分解性をもち, $\forall a\in A$ $\forall \sigma\in Aut(a)$ に対する 1_a と σ の等化 $a/\langle\sigma\rangle$ の存在を仮定すると, φ は単射で有限余核をもち, φ の像は部分環となる. したがって $\mathbb{Z}[A/\cong]$ は環構造をもつ. これを Abstract Burnside ring という. これから Abstract Hecke カテゴリー, Abstract Mackey functor が順に定義される. この理論は数値計算法や母関数の理論(Rota)とも接している. 近く論文として出る予定である.

References for Transfers.

[Di.73] Tammo tom Dieck, Equivariant homology and Mackey functors, Math. Ann. 206 (1973), 67-78.

[Di.79] Tammo tom Dieck, "Transformation groups and representation theory", Lecture Notes in Math., 766, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[Dr.69] Andreas Dress, A characterization of solvable groups, Math. Z. 110 (1969),213-217.

[Dr.71] Andreas Dress, Notes on the Theory of Representations of Finite Groups I: The Burnside ring of a finite groups and some AGN-applications, Multicopied lecture notes, Bielefeld, 1971.

[Dr.72] Andreas Dress, Contributions to the theory of induced representations, in "Algebraic K-Theory II", Proc. Battle Institute Conference 1972, Springer Lecture Notes in Math., 342 (1973), 183-240.

[Dr.74] Andreas Dress, On relative Grothendieck rings, Springer Lecture Notes in Math., 488 (1974), 79-131.

[Fo.84] Timothy J. Ford, Hecke actions on Brauer groups, J. Pure and Applied Algebra 33 (1984), 11-17.

[Gl.81] David Gluck, Idempotent formula for the Burnside algebra with applications to the p-subgroup simlicial complex, Illinois J. Math. 25 (1981), 63-67.

[Gr.64] J. A. Green, A transfer theorem for modular representations, J. Algebra, 1 (1964), 73-84.

[Gr.71] J. A. Green, Axiomatic representation theory for finite groups, J. Pure and Applied Algebra, 1 (1971), 41-77.

[Hu.79] D. Husemoller, Burnside ring of a Galois group and the relations between zeta functions of intermediate fields,The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979), pp. 603-610, Proc. Symp. in Pure Math., 37, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1980.

[La.68] Tsit-Yuan Lam, Induction theorems for Grothendieck groups and Whitehead groups, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4e serie, 1 (1968), 91-148.

[RS.82] Klaus Roggenkamp and Leonard Scott, Hecke actions on Picard groups, J. Pure and Applied Algebra, 26 (1982), 85-100.

[Sa.82] Hiroki Sasaki, Green correspondence and transfer theorems of Wielandt type for G-functors, J. Algebra, 79 (1982), 98-120.

[Wi.60] Helmut Wielandt, Beziehungen zwischen den Fixpunktzahlen von Automorphismengruppen einer endlichen Gruppe, Math. Zeitschr., 73 (1960), 146-158.

[Yo.78] Tomoyuki Yoshida, Character-theoretic transfer, J.

Algebra, 52 (1978), 1-38.

[Yo.80] Tomoyuki Yoshida, On G-functors (I):Transfer theorems for cohomological G-functors, Hokkaido Math. J., 9 (1980), 222-257.

[Yo.83a] Tomoyuki Yoshida, On G-functors (II):Hecke operators and G-functors, J. Math. Soc. Japan, 35 (1983), 179-190.

[Yo.83b] Tomoyuki Yoshida, Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem, J. Algebra, 80 (1983), 90-105.