

## 温度グリーン関数の自動作成について

岡山理科大学 応用数学科 坂本薫 (Kaoru Sakamoto)

### 1. 研究の目的

- 1) 熱力学的物理定数を計算するとき、必要な温度GREEN関数を自動作成する事。
- 2) 出来るだけ、出力結果は、物理学のテキストに記載されている、数式にちかずける事。波数を表わすアトムを $K_{-1}$ のように、表わされた。
- 3) 今のところ、GREEN関数の自動作成だけであるが、GREEN関数の計算を数式処理システムで行なえるように、ファイルの出力が考慮された。

### 2. ファインマン図形の生成

1)

著者等 が報告した統計力学のファインマン図形の生成する方法は、幾何学的に等

価な図形の除去が考慮されてなく、図形の生成に時間がかかるので、量子電気力学のフ

2)

3)

ファインマン図形の自動作成の方法 を次のように、修正してKCL で作成した。

(1) 入力 of 頂点の数は、偶数にした。

(2) 2個の頂点間を移動する内線フォトン を次の何れかに変更する。

(A) 全て、クーロン ポテンシャルによる、波数、角周波数の移動を表わす内線。

(B) すべてフォノンの移動を示す内線。

但し、AとBと混在しないものとする。

(3) ある頂点から、もとの頂点にもどるループ線を表わす頂点の番号からなるリストには、一本の内線を表わす、2個の頂点番号の点対からなるリストに分解する。例えば、図1のループ(1 2 3)は、((1 . 2) (2 . 3) (3 . 1))のように、書き直す。

(4) 粒子線を表わす、頂点の番号からなるリストをつきの3種類のリストに分解する。

(A) 頂点から出る外線の集まりを表わすリストでその頂点の番号からなるリスト

(B) 頂点に入る外線の集まりを表わすリストでその頂点の番号からリスト

(C) 2個の頂点の番号からなる点対からなるリストで内線の集まりを表わすリスト

(5) (2)の内線フォトンを表わす、2個の頂点の番号の点対( $A_i, A_j$ )の番号 $A_i$ 、 $A_j$ を各々N、N+1と付け直す。ここで、Nは1から、入力頂点の数-1である。次に、内線、外線を表わすすべてのリストに含まれる頂点の番号 $A_i$ と $A_j$ をすべて、N、N+1に書き直す。そのようにしてつくられたファインマン図は、図2で示されている。

4).5)

3. ファインマン図形のリスト表示について

電子とフォノンの移動を表わすのに、波数と角周波数を持った電子線とフォノン線を使用する。これらの線は、内線または、外線である。これらの線に、あとで述べる理由の為に、波数のみを付ける。他に、クローン力による波数の移動を表わす点線の内線がある。KCLでプログラムを作成する為に、これら内線又は、外線の波数を表わすために、アトムを使用する。2の(5)で作られた、外線を表わすリストの要素の頂点の番号に対応させて、夫々の頂点に入るまたは、入る外線の波数を表わすアトムを作り、1、0または1、頂点の番号、アトム名からなるリストを作る。ここで、リストの2番目の要素は、頂点に入る外線のとき1で、出る外線の時0である。同様に内線を表わす2個の頂点の番号の点対に対応させて、内線の波数をあらわす、アトムをつくり、2、2個の頂点の番号の点対、アトム名からなるリストを作る。電子線、フォノン線、点線には、各々先頭に、K、P、Qで区切り記号の下線、後3桁の順序数が、続くアトム名を充てる。各々のアトムに外線と内線を区別する為に、属性STATE1に属性値EXTあるいは、属性値INTを置き、波数を表わすアトムが、他の波数を表わすアトムの線形和で、表わされるかどうかを示すために、属性STATE2にその線形和の属性値あるいは、NILを与える。外線を表わすアトムの場合、頂点に入るか、出るか区別するため、属性STATE3に属性値0または、1を置く。電子線の内線の波数を表わすアトムにのみ、右頂点と左頂点間の電子の移動のとき、属性STATE3に属性値1を、

置き、右頂点あるいは、左頂点から、左頂点あるいは、右頂点に終わるループ線には、

属性値0を置く。 それら以外にNILを置く。

#### 4. 波数の独立性の決定

この論文では、図3のような、頂点といえば、右頂点または、左頂点を表わす。

頂点全体を表わすのに、左頂点と右頂点との番号の点对を取り、その点对のリストを使

用する。 すべての外線と内線の集まりを表わすリストを調べて、ある頂点に入って

くる波数を表わすアトムをそのままにして、そこから、出て行く波数を表わすアトムに

-をつけてそれらの要素からなるリストをつくる。 左頂点と右頂点に対して、各々リ

ストを作り、更に2個のリストの点对作る。 そのとき、運動量保存則により、頂点に

ついで波数の総和は零になる。 又外線の波数の一つは他の独立な外線の波数の線

形和で表わされる。 生成されたリストを要素する全体のリストは、散乱を表わしてい

る。 始め内線の波数はすべて、独立なものとして、図4のようなアルゴリズムによ

って、独立でない、外線と内線の波数を独立な波数の線形和として求められた。

#### 5. 温度グリーン関数の作成

4により、決定された波数をあらわすアトムから、全体の散乱を表わす数式を作る。

波数が独立でないとき、それを表わすアトムの属性STATE2に属性値として、独立な波数

の線形和を表わすリストが置かれている。 波数が独立な時、それを表わすアトムの属

性STATE2の値は、NILである。波数を表わすアトム名、アトムの属性を調べて、数式

を作り、積を表わすリストを作る。数式を作るアルゴリズムは、図5で与えられてい

る。内線の独立な波数がある場合には、波数についての和が現われる。

P, Qについての和は、(SIGMA (P Q) 数式を表わすリスト)のように表

わす。角周波数は同じ線の波数と同様な形に表わされるので、独立でない角周波数は

得られた波数を表わすアトムの属性STATE2の値から、波数を対応する角周波数に変えた

形の独立な角周波数の線形和でもとめられた。散乱を表わすGREEN関数は、次の

規則よって、作られる。

(1)  $r, \ell$  の電子線に  $\epsilon_r(i\omega_\ell) = (i\omega_\ell - \epsilon_r)^{-1}$  を対応させる。また右と左の

頂点間の電子線の移動には  $(i\omega_\ell - \epsilon_r)^{-1} \exp(i\omega_\ell 0)$  を対応させる。

(2) 2体力のクーロンの相互作用を  $\prod_{i=1}^n (\vec{r}_i \vec{s}_i | \nu | \vec{r}'_i \vec{s}'_i)$

とし、ここで、 $(\vec{k}_1, \vec{k}_2 | \nu | \vec{k}_3, \vec{k}_4) = \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2, \vec{k}_3 + \vec{k}_4) \nu(\vec{k}_1 - \vec{k}_3)$

(3) フォノン線には、 $D_q(i\nu_\ell) = |\alpha_q|^2 \left( \frac{1}{\omega_q + i\nu_\ell} + \frac{1}{\omega_q - i\nu_\ell} \right)$ ,  $\nu_\ell = \frac{2\ell\pi}{\beta}$  を対応させ

(4) 数係数  $\frac{(-1)^n (-1)^{n_1}}{n! (2\beta V)^n c(\beta V)^{n_p}}$  を付ける。

但し、 $n_c$  はクーロン相互作用を表わす点線の数で、数  $n_p$  は、フォノン線の数で、又、 $n$

は、摂動の次数で、 $n = n_c + 2 n_p$  で与えられる。 $n_\ell$  は電子線が閉じている図形の

数である。

(5) 内線の独立な波数と角周波数についての和を取る。 角周波数の和について

$\omega_l$  の代わりに  $l$  についての和で表わす。

## 6. 温度 GREEN 関数のリスト表示について

温度 GREEN 関数を次のように、リストで表わす。

$$g_r(i\omega_l) \quad \rightarrow \quad (G1 \text{ アトム1 アトム2})$$

$$(i\omega_l - \epsilon_r)^{-1} \exp(i\omega_l 0) \quad \rightarrow \quad (G0 \text{ アトム1 アトム2})$$

$$D_q(i\nu_l) \quad \rightarrow \quad (D1 \text{ アトム1 アトム2})$$

$$\nu(\vec{q}) \quad \rightarrow \quad (NU \text{ アトム1})$$

ここで、アトム1とアトム2は、各々波数と角周波数を表わすアトムである。

## 7. GREEN 関数の作成の結果

電子線が、外部からはいつてきて、外部に出て行く2次のファインマン図を生成して、

えられた、散乱を表わすリストは、(( (K\_1) . (K\_2 Q\_1) (K\_

2 Q\_1) . (K\_3) )) で、図6のようなファインマン図が対応している。

GREEN 関数は、(SIGMA (Q\_1 N\_1) ((G1 K\_1 L\_1)

(G0 K\_1 (MINUS Q\_1) (L\_1 (MINUS N\_1))))

(NU Q\_1) (G1 K\_1 L\_1)) と出力された、ここで、数係数は、

省いてある。 任意の次数の温度 GREEN 関数も容易に出力される。

## 8. 結論と今後の展望

(1) クーロン力による相互作用による、波数と角周波数の移動と内線フォノンの移動と混在したものについて、ファインマン図の生成を考えられ、開発中である。

(2) 数式処理システムを使って、これらの数式を計算する事

(3) 常態でないファインマン図を生成する事などがある。

謝辞 この研究に対して、御助言と数理研のコンピュータの使用許可された京大数理研の一松信教授に深く感謝します。

### 参考文献

- 1) K. Sakamoto and T. Aoe: The Automatic Generation of Feynman Diagrams in Quantum Statistical Mechanics, J. Infor. Proc. 4, 2, P89-90, (1981)
- 2) T. Sasaki: Automatic Generation of Feynman Graphs in QED., J. Comp. Phys. 22, 2, P189-214, (1976)
- 3) T. Yuasa and M. Hagiya: Kyoto Common Lisp Reference Manual for ECLIPSE MV

(1984)

4) 坂本薫、青江俊夫：統計力学に於けるFeynman図形の自動処理、京大数理研

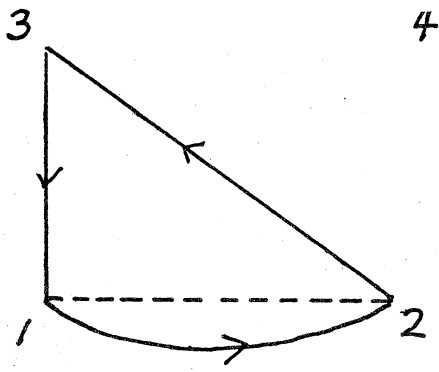
講究録、551、P173-179、(1985)

5) J. A. Campbell and A. C. Hearn: Symbolic

Analysis of Feynman Diagrams by Compu-

ter, J. Comp. Phys. 5, 2, P280-327, (1970)





ループ線

図 1

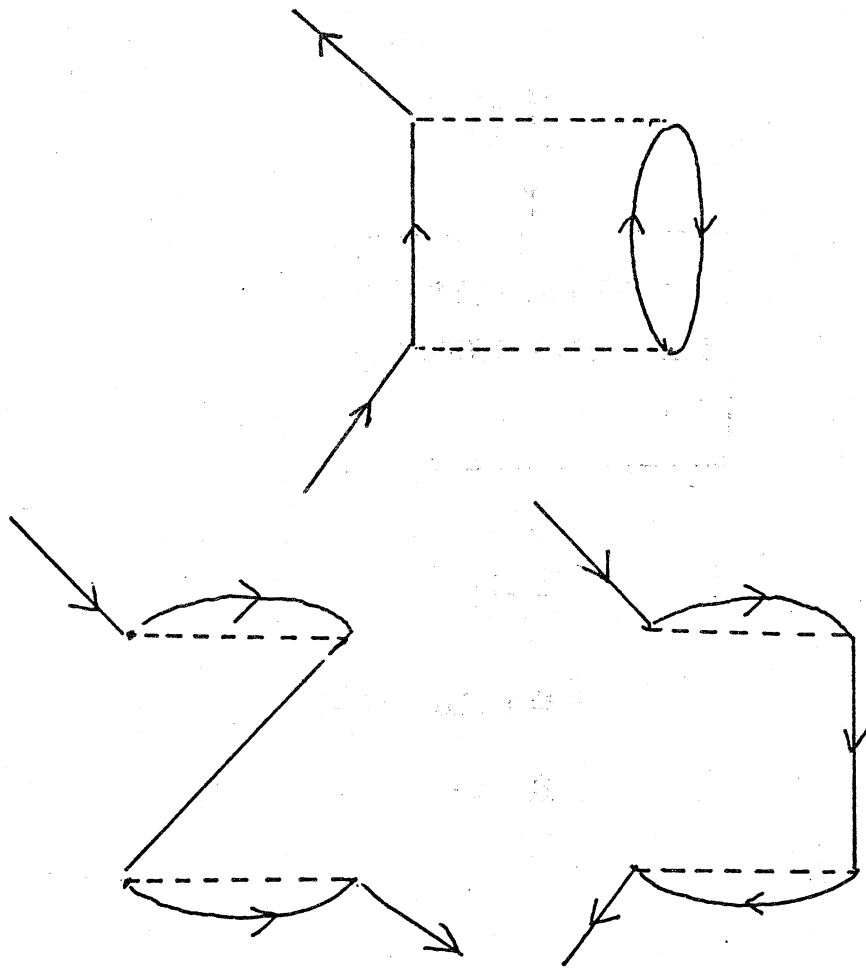


図 2 生成されたファインマン図

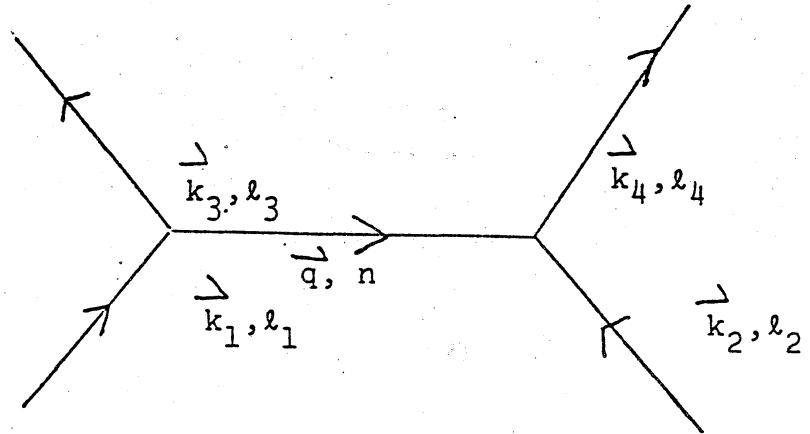
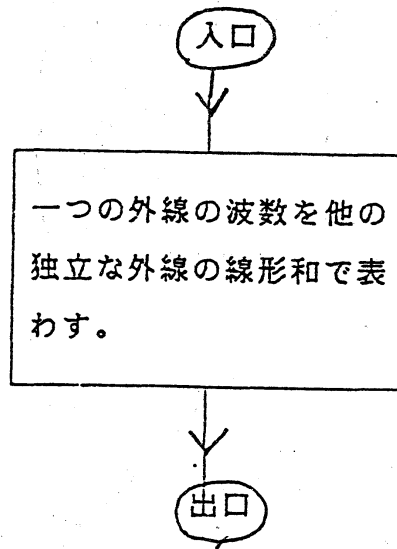


図 3

2 体力相互作用



外線の波数の決定

図 4-1

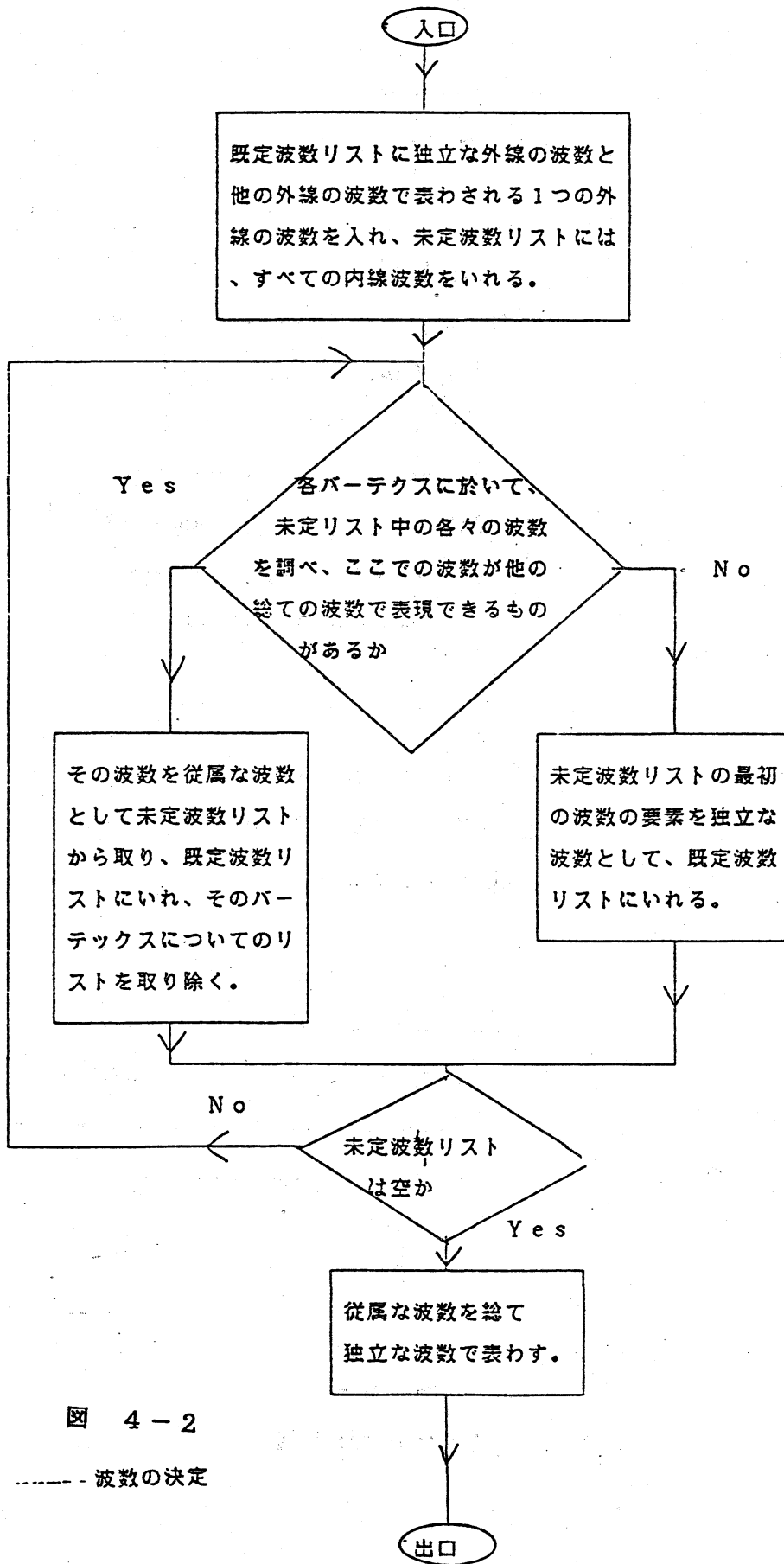


図 4-2

----- 波数の決定

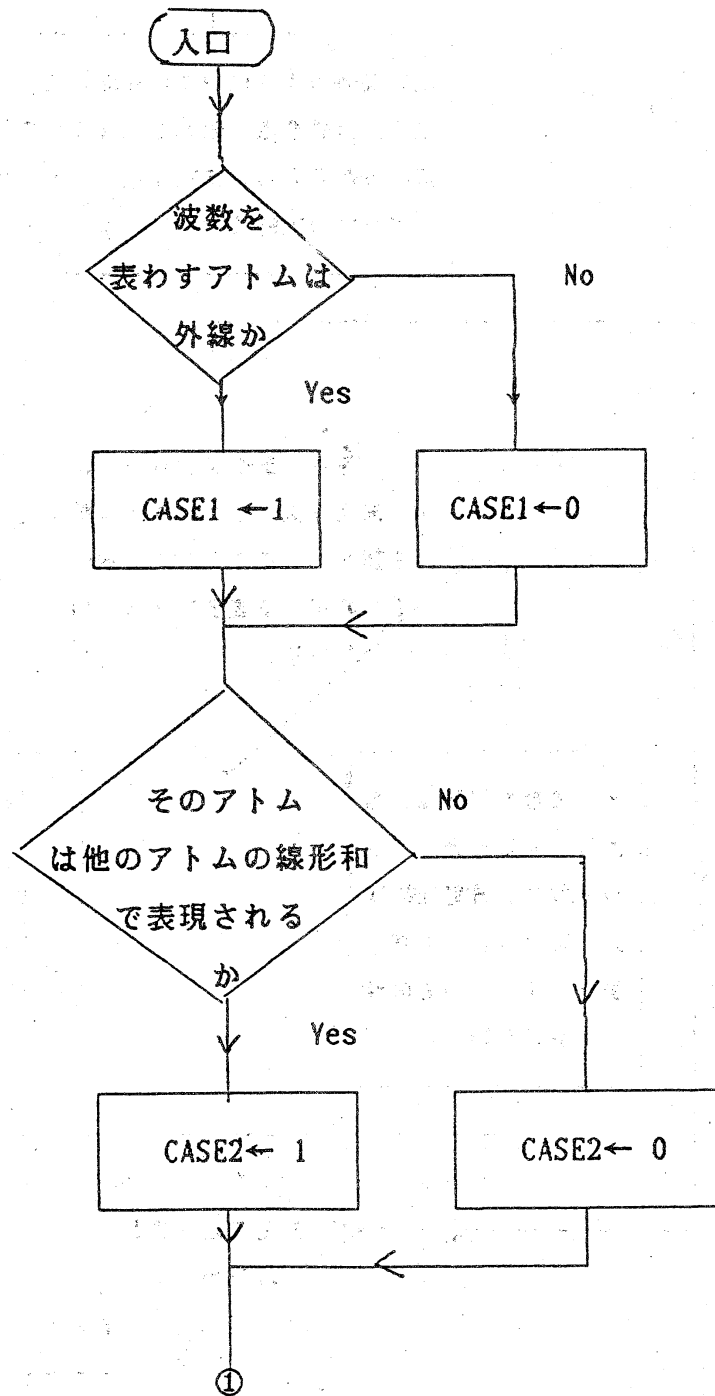


図 5-1  
数式作成の流れ図

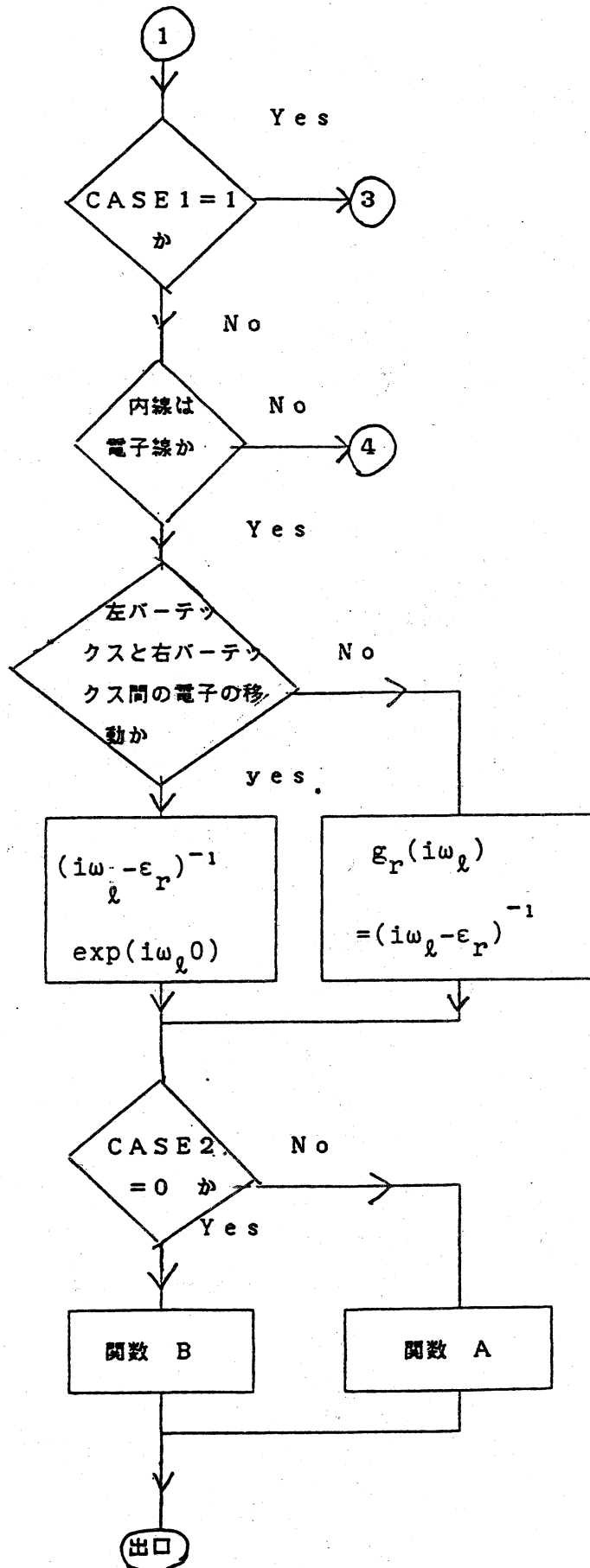


図 5-2

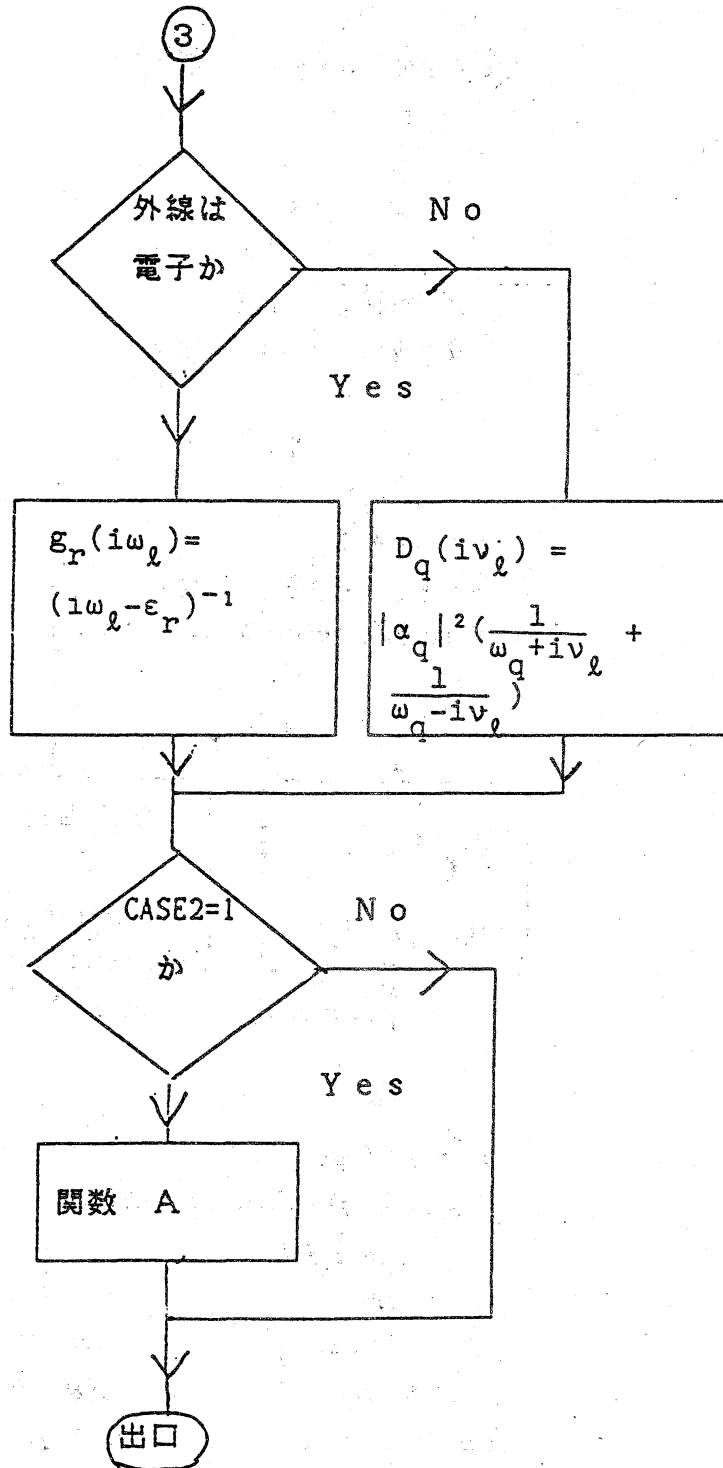


図 5-3

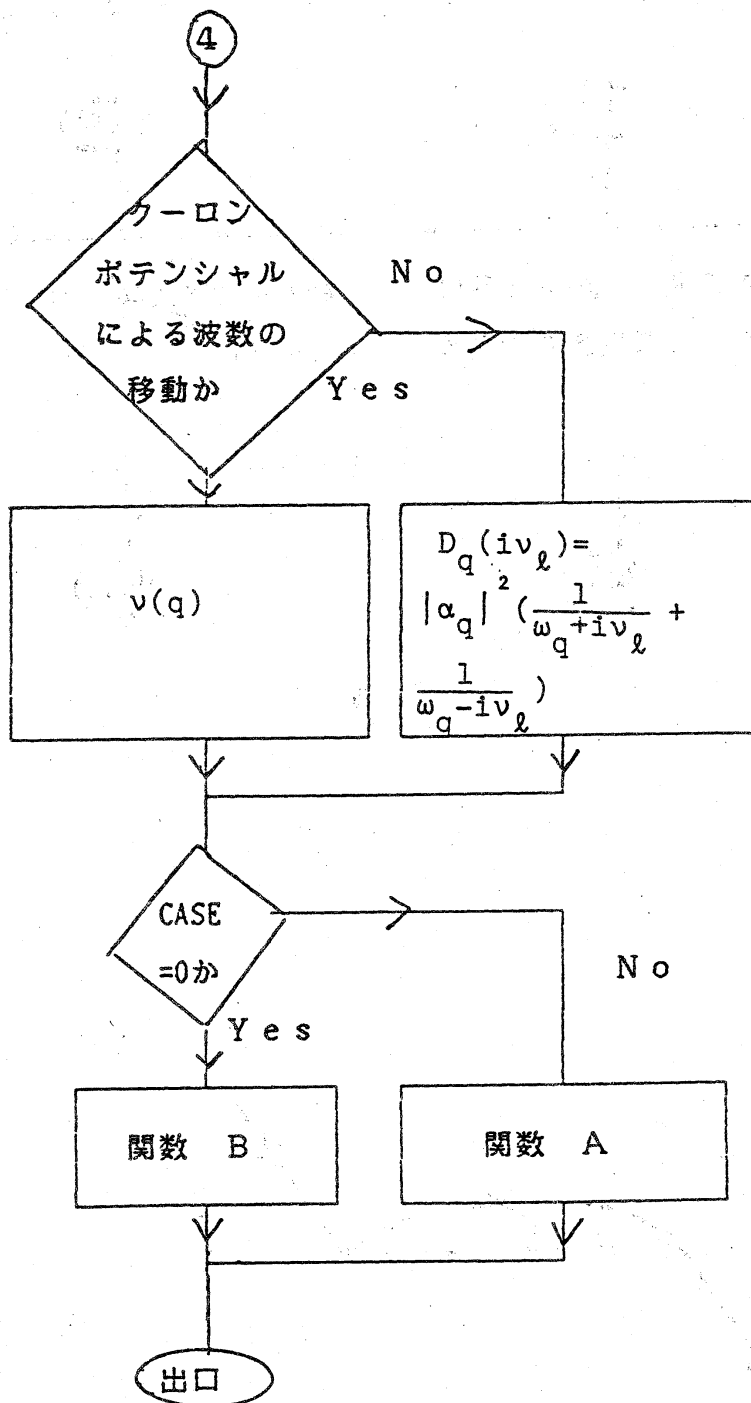


図 5-4

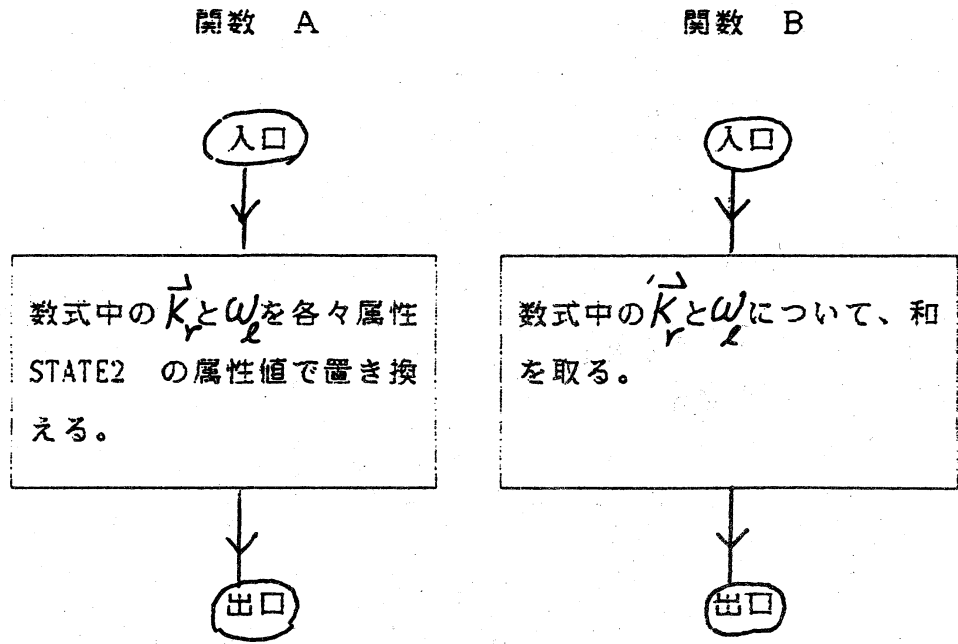


図 5-5

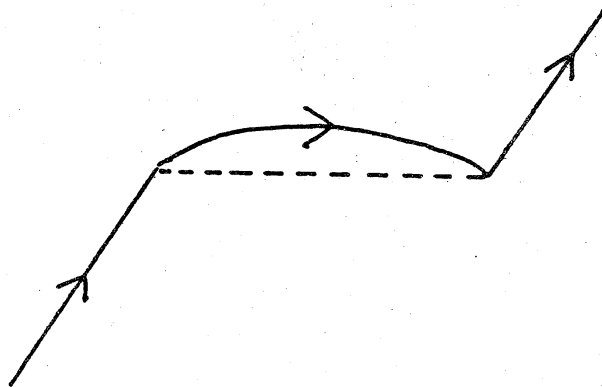


図 6 2次のファインマン図