数理解析研究所講究録
第 582 巻 1986 年 56-74

対称作用素の自己共役拡張

東大教養（大学院） 前田 修（Osamu Maeda）

§1. 序

対称作用素の自己共役拡張の研究は，自己共役作用素の理論の中でも基本的なものである。これに関し，次のような問題が考えられる。(1) 或る性質（たとえば正値という性質）をもつ自己共役拡張の全体を特徴づけること。(2) 特定の自己共役拡張（たとえば最大・最小のもの）の定義域を具体的に（簡単な形に）求めること。(3) 自己共役拡張の列の収束を調べること。(4) 自己共役拡張の spectrum を調べること。(5) その他。

与えられた対称作用素のもつ性質を保存する自己共役拡張を求めるという観点からは，たとえば次の(A)(B)の型の枠組がある。(A) 有界な逆作用素をもつ対称作用素の，有界な逆作用素をもつ自己共役拡張。(B) 正値対称作用素の正値自己共役拡張。(A)(B)のおのおのに対して上記(1)(2)(3)(4)(5)の問題が考えられるのである。実は，(B)の研究は或る意味で(A)に含まれる（詳しいことについては §4 をみよ）。

(B)に関しては多くの研究がある。Friedrichs [7] は，form の手法により，今日の所謂 Friedrichs 拡張を構成した。その後

Krein[9]はこの問題を組織的に研究し，まとまった一つの理論を創造した。Kreinの仕事は，Birman[3]，安藤・西尾[2]などによって深められた。

これに対し，(A)に関する研究はほとんどなされていないように思われる。そこで本稿では，(A)に重点を置いて上述の問題(1)(2)(3)を考察する。この目的のために，われわれは安藤[1]による operator matrix method をさらに詳しく調べることにする。後にわかるように，この方法は(A)の研究には有効である。しかも，この方法によると，[2][9][13]などに得られている(B)に関する結果を（もっと一般化して）統一的に証明することができるのである。

なお，頁数の都合上，定理などの証明をすべて書くことはできず，また証明を書いても概略にとどめているところもある。そういうわけであるから，詳細については，興味のある読者は[10][11][12]を参照せられよ。

§2. 準備

本稿を通じてHは複素Hilbert空間であるとする。本稿では専ら線型作用素を扱う。$\mathcal{L}(H)$，$\mathcal{L}(H)_{sa}$ はそれぞれH上の有界作用素の全体，有界自己共役作用素の全体をあらわす。1_H はH上の恒等作用素をあらわす。混同の恐れがなければ単に

1とあらわす。Hの閉部分空間Mに対し，$M^{\perp}$はMの直交補空間，P_MはMへの直交射影をあらわす。$x, y \in H$に対し，$(x|y)$はxとyとの内積をあらわす。Hにおける作用素Tに対し，$\mathscr{D}(T)$, $\mathscr{R}(T)$, Ker Tはそれぞれ Tの定義域，値域，核をあらわす。その他の慣用の記号を断わらずに用いることもある。

自己共役作用素の順序(1). $\mathscr{L}(H)_{sa}$に順序が定義される。$A, B \in \mathscr{L}(H)_{sa}$に対し，$A \leqq B$（または$B \geqq A$）とは，すべての$x \in H$に対し$(Ax|x) \leqq (Bx|x)$であることを意味する。$\mathscr{L}(H)_{sa}$はこの順序と通常の作用素normとに関して順序Banach空間となる。

自己共役作用素の順序(2). 有界とは限らない自己共役作用素Tが正値であるとは，すべての$x \in \mathscr{D}(T)$に対し$(Tx|x) \geqq 0$となることをいう。Hにおける有界とは限らない正値自己共役作用素の全体を$\mathscr{S}(H)$と書くことにする。$\mathscr{S}(H)$に対しても順序が定義される。$T, S \in \mathscr{S}(H)$に対し，$T \leqq S$（または$S \geqq T$）とは，$\mathscr{D}(S^{1/2}) \subset \mathscr{D}(T^{1/2})$であってすべての$x \in \mathscr{D}(S^{1/2})$に対し$\|T^{1/2}x\| \leqq \|S^{1/2}x\|$であることを意味する。

$T, S \in \mathscr{L}(H)_{sa} \cap \mathscr{S}(H)$であるときには，(1)の順序と(2)の順序とは同じものである。また，$T, S \in \mathscr{S}(H)$であってT, Sがともに有界な逆作用素をもつとき，(2)の意味において$T \leqq S$であるのと(1)の意味において$S^{-1} \leqq T^{-1}$であるのとは同値である。

MをHの閉部分空間とするとき，Hは通常の方法によって直積Hilbert空間 $M \times M^{\perp}$ と同一視される。 $x+y$ $(x \in M,\ y \in M^{\perp})$ は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M \times M^{\perp}$ と同一視される。

有界作用素 $T \in \mathcal{L}(H)$ は，直交直和分解 $H = M \oplus M^{\perp} \cong M \times M^{\perp}$ に応じて次のような行列表現をもつ。

$$T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$A_{11} \in \mathcal{L}(M)$, $A_{12} \in \mathcal{L}(M^{\perp}, M)$, $A_{21} \in \mathcal{L}(M, M^{\perp})$, $A_{22} \in \mathcal{L}(M^{\perp})$。

つまり，

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}x + A_{12}y \\ A_{21}x + A_{22}y \end{bmatrix} \quad (x \in M,\ y \in M^{\perp})。$$

この記法の下に，Tが自己共役であることと A_{11} および A_{22} が自己共役であって $A_{21}^{*} = A_{12}$ であることとは同値である。

いくつかの補題を準備しておく。

<u>補題</u> 1.（安藤［1］, Theorem I.1. の reformulation ）
$T = \begin{bmatrix} A & C^{*} \\ C & B \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(H)sa$ （A, B は自己共役）を直交直和分解 $H = M \oplus M^{\perp}$ に応じた行列表現とする。このとき次の(a)(b)(c)は同値である。(a) $T \geqq 0$. (b) $A \geqq 0$ であって，すべての $\varepsilon > 0$ に対し $C(A+\varepsilon)^{-1}C^{*} \leqq B$. (c) $A \geqq 0$ であり，$\text{s-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} C(A+\varepsilon)^{-1}C^{*}$ が存在し，$\text{s-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} C(A+\varepsilon)^{-1}C^{*} \leqq B$.

補題 2. E, F を複素Hilbert空間とする。$T \in \mathcal{L}(E)_{sa}$ で或る $\varepsilon > 0$ に対し $T \geqq \varepsilon$ であるとする。$S \in \mathcal{L}(E, F)$ とする。このとき，$SS^* \leqq T$ と $ST^{-1}S^* \leqq 1_F$ とは同値である。

補題 3. (Douglas [4], Theorem 1) E, F, G を複素Hilbert空間とし，$S \in \mathcal{L}(F, E)$, $T \in \mathcal{L}(G, E)$ とする。このとき，次の (a) (b) (c) (d) は同値である。(a) $\mathcal{R}(S) \subset \mathcal{R}(T)$. (b) $\alpha > 0$ が存在して $SS^* \leqq \alpha TT^*$. (c) $V \in \mathcal{L}(F, G)$ が存在して $TV = S$
(d) $V \in \mathcal{L}(F, G)$ がただ一つ存在して $TV = S$, $\mathcal{R}(V) \subset (\mathrm{Ker}\, T)^\perp$

§3. 閉部分空間で定義された有界対称作用素の有界自己共役拡張

本節においてはMをHの閉部分空間とする。$S \in \mathcal{L}(M, H)$ は次の行列表現をもつ。

$$S = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}, \quad A \in \mathcal{L}(M), \quad C \in \mathcal{L}(M, M^\perp).$$

つまり，$x \in M$ に対し $Sx = \begin{pmatrix} Ax \\ Cx \end{pmatrix}$. Sが対称，即ちすべての x, $y \in M$ に対して $(Sx \mid y) = (x \mid Sy)$ となることと，Aが自己共役であることとは同値である。

$S \in \mathcal{L}(M, H)$ を対称とする。$\alpha \geqq \|S\|$ に対し

$$E(S, \alpha) = \{ \tilde{S} \in \mathcal{L}(H)_{sa} \mid \tilde{S}|M = S, \ \|\tilde{S}\| \leqq \alpha \},$$

$$E_+(S, \alpha) = \{ \tilde{S} \in \mathcal{L}(H)_{sa} \mid \tilde{S}|M = S, \ 0 \leqq \tilde{S} \leqq \alpha \}$$

と定義する。$E(S, \alpha)$ は決して空とはならないが，$E_+(S, \alpha)$ は

空となることがある。$E(S,\alpha)$, $E_+(S,\alpha)$ を特徴づけよう。

<u>命題</u> 1.（安藤[1], Corollary I.1.3. の reformulation） $S\in\mathcal{L}(M,H)$ を対称とし，$\alpha\geqq\|S\|$ とする。このとき次の (1)(2) が成り立つ。

(1) $\operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\downarrow 0} C(\alpha\pm A+\varepsilon)^{-1}C^*$ が存在する。$\overline{B}(\alpha)=\alpha-\operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\downarrow 0} C(\alpha-A+\varepsilon)^{-1}C^*$,

$\underline{B}(\alpha)=\operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\downarrow 0} C(\alpha+A+\varepsilon)^{-1}C^*-\alpha$ とおくと，$\underline{B}(\alpha)\leqq\overline{B}(\alpha)$。

(2) $E(S,\alpha)=\left\{ \begin{bmatrix} A & C^* \\ C & B \end{bmatrix} \;\middle|\; B\in\mathcal{L}(M^\perp)_{sa},\ \underline{B}(\alpha)\leqq B\leqq\overline{B}(\alpha)\right\}$.

特に $E(S,\alpha)$ は空ではない。

<u>命題</u> 2. $S\in\mathcal{L}(M,H)$ を対称とし，$\alpha\geqq\|S\|$ とする。次の (a)(b)(c) は同値である。 (a) $E_+(S,\alpha)\neq\phi$ (b) すべての $x\in M$ に対し $\|Sx\|^2\leqq\alpha(Sx|x)$. (c) $\begin{bmatrix} A & C^* \\ C & \overline{B}(\alpha) \end{bmatrix}\geqq 0$, ここに $\overline{B}(\alpha)$ は命題 1 の通りである。

補題 1・命題 2 により，$E_+(S,\alpha)\neq\phi$ ならば，

$B_0=\operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\downarrow 0} C(A+\varepsilon)^{-1}C^*$ が存在する．

<u>命題</u> 3. $S\in\mathcal{L}(M,H)$ を対称とし，$\alpha\geqq\|S\|$ とする。$E_+(S,\alpha)\neq\phi$ であるとき，$E_+(S,\alpha)=\left\{ \begin{bmatrix} A & C^* \\ C & B \end{bmatrix} \;\middle|\; B\in\mathcal{L}(M^\perp)_{sa},\ B_0\leqq B\leqq\overline{B}(\alpha)\right\}$.

ここに，$\overline{B}(\alpha)$, B_0 は上述の通りである。また，$\underline{B}(\alpha)\leqq B_0$

これらの命題は補題1・補題2を用いて証明される。詳細は省略する。

注意。Krein（[9], Theorem 1, Theorem 2, Theorem 3）は，命題1における $E(S, \|S\|)$ を別の方法で求めている。命題2における (a) と (b) との同値性は，安藤・西尾（[2], Theorem 2）による。

§4. 有界な逆作用素をもつ対称作用素の，有界な逆作用素をもつ自己共役拡張

Hにおける対称作用素 L に対し，

$$\ell(L) = \inf\{\, \|Lx\| \mid x \in \mathcal{D}(L),\ \|x\| = 1 \,\},$$

$$m(L) = \inf\{\, (Lx|x) \mid x \in \mathcal{D}(L),\ \|x\| = 1 \,\}$$

と定義する。$m(L) \leq \ell(L)$ が成り立つ。$\ell(L) > 0$ というのは，L が有界な逆作用素をもつことと同値である。$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\ell(\lambda - L) > 0$ であるとき，L は λ において spectral gap をもつということにする。$m(L) \geqq 0$ であるとき，L は正値であるという。

T を $\ell(T) > 0$ を満たす対称作用素とする。

$$F(T) = \{\, \tilde{T} \mid \tilde{T} \text{ は } T \text{ の自己共役拡張},\ \ell(\tilde{T}) > 0 \,\}$$

と定義する。また，$\ell(T) \geqq \gamma$ を満たす正の定数 γ に対し

$$F(T, \gamma) = \{\, \tilde{T} \mid \tilde{T} \text{ は } T \text{ の自己共役拡張},\ \ell(\tilde{T}) \geqq \gamma \,\}$$

と定義する。さらに，$m(T) > 0$ であるとき，$m(T) \geqq \gamma$ を

満たす正の実数γに対し,

$$F_+(T,\gamma)=\{\tilde{T}\mid\tilde{T}\text{はTの自己共役拡張},\ m(\tilde{T})\geqq\gamma\}$$

と定義する。

次の①②③に注意しよう。① Lを$\lambda\in\mathbb{R}$において spectral gap をもつ対称作用素とし, $\ell(\lambda-L)=a$ とおく。$T=L-\lambda$ とおく。γを, $a\geqq\gamma$ を満たす正の実数とする。Lの自己共役拡張$\tilde{L}$で $\ell(\lambda-\tilde{L})\geqq\gamma$ を満たすものの全体を$\mathfrak{A}$とあらわすとき, 写像 $\tilde{T}\mapsto\tilde{T}+\lambda$ は, $F(T,\gamma)$と$\mathfrak{A}$との間の一対一の対応を与える。② Lを正値対称作用素とする。$\gamma>0$をとって, $T=L+\gamma$とおく。Lの正値自己共役拡張の全体を$\mathfrak{B}$とあらわすとき, 写像 $\tilde{T}\mapsto\tilde{T}-\gamma$ は, $F_+(T,\gamma)$と$\mathfrak{B}$との一対一の対応を与える。③ Tが対称作用素で$m(T)>0$であるとする。このとき, $m(T)\geqq\gamma$ を満たす正の実数γに対し, $F_+(T,\gamma)\subset F(T,\gamma)$ が成り立つ。

①②③から, (B)の研究が(A)の研究に含まれることがわかる((A)(B)については§1を参照せよ。また,「含まれる」ことについては下の命題4をも参照せよ)。

以下, 本節では<u>TをHにおける稠密に定義された閉対称作用素で$\ell(T)>0$であるものとする</u>。$\mathcal{R}(T)$はHの閉部分空間である。T^{-1}を$\mathcal{R}(T)$からHへの有界作用素とみるとき, T^{-1}は

次の行列表現をもつ。

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}, \quad A \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(T))_{sa}, \quad C \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(T), \mathcal{R}(T)^{\perp})。$$

つまり，$x, y \in \mathcal{R}(T)$ に対し $T^{-1}x = \begin{pmatrix} Ax \\ Cx \end{pmatrix} = Ax + Cx.$

$F(T)$, $F(T, \gamma)$, $F_+(T, \gamma)$ を特徴づけるのが本節の目標である。まず，次の命題が得られる。

<u>命題</u>4. (1) $F(T) = \left\{ \begin{bmatrix} A & C^* \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} \middle| \ B \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(T)^{\perp})_{sa} \right\}.$

(2) $\ell(T) \geqq \gamma > 0$ に対し，

$$F(T, \gamma) = \left\{ \begin{bmatrix} A & C^* \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} \middle| \ B \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(T)^{\perp})_{sa}, \ \underline{B}(\gamma^{-1}) \leqq B \leqq \overline{B}(\gamma^{-1}) \right\}.$$

ここに，$\overline{B}(\gamma^{-1})$, $\underline{B}(\gamma^{-1})$ は命題1の通りである。

(3) $m(T) > 0$ とする。$m(T) \geqq \gamma > 0$ に対し，

$$F_+(T, \gamma) = \left\{ \begin{bmatrix} A & C^* \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} \middle| \ B \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(T)^{\perp})_{sa}, \ B_0 \leqq B \leqq \overline{B}(\gamma^{-1}) \right\}$$

ここに，$B_0 = \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon \downarrow 0} C(A+\varepsilon)^{-1}C^*$. 特に，$F_+(T, \gamma)$ は最大元・最小元をもつ。

この命題は，命題1・命題3を用いて証明される。たとえば，(3)を示すには $F_+(T, \gamma) = \{ \tilde{S}^{-1} \mid \tilde{S} \in E_+(T^{-1}, \gamma^{-1}) \}$ を示せばよい。詳細は省略する。

Kreinは，稠密に定義された閉正値対称作用素 L の正値自己共役拡張の全体 $\mathfrak{S}(L)$ を特徴づけ，$\mathfrak{S}(L)$ に最大元・最小元の存在することを示した（[9], Lemma 6, Theorem 11）。それはわ

われわれの命題4(3)に相当するものであるが，Kreinの証明法はわれわれのものとは異なる。

（$\ell(T) \geqq \gamma > 0$ に対し）$\tilde{T}_K(\gamma) = \begin{bmatrix} A & C^* \\ C & \overline{B}(\gamma^{-1}) \end{bmatrix}^{-1}$，$\tilde{T}_N(\gamma) = \begin{bmatrix} A & C^* \\ C & \underline{B}(\gamma^{-1}) \end{bmatrix}^{-1}$，（$m(T) > 0$ であるとき）$\tilde{T}_F = \begin{bmatrix} A & C^* \\ C & B_0 \end{bmatrix}^{-1}$ とおく。$\tilde{T}_K(\gamma)$，$\tilde{T}_N(\gamma)$ の名称は必ずしも一定していないが，われわれはこれらをそれぞれ γ に対応するKrein拡張，Neumann拡張と呼ぶことにする。$\tilde{T}_F$ はFriedrichs拡張である。

$$\mathcal{D}[T] = \{ x \in H \mid \text{列 } \{x_n\} \subset \mathcal{D}(T) \text{ が存在して，} \|x_n - x\| \to 0,\ (T(x_n - x_m) | x_n - x_m) \to 0 \}$$

とおくとき，$\mathcal{D}(\tilde{T}_F^{1/2}) = \mathcal{D}[T]$，$\mathcal{D}(\tilde{T}_F) = \mathcal{D}[T] \cap \mathcal{D}(T^*)$ となることはよく知られており，この事実はわれわれの方法によっても証明することができるが，その証明は省略する。

次の諸定理が本節の主要結果である。

定理1．$\ell(T) \geqq \gamma > 0$，$\mathcal{R}(C^*) \subset \mathcal{R}(\gamma^{-1} - A)$ とし，$P = P_{\mathcal{R}(T)^\perp}$ とおく。このとき，$\tilde{T} \in F(T)$ となるための必要十分条件は，$G \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(T)^\perp)_{sa}$ が存在して，$\tilde{T}$ が T^* の

$$\mathcal{D}(T) + \{ u + GPu \mid u \in \mathrm{Ker}(T^* - \gamma) \}$$

への制限となっていることである。写像 $\tilde{T} \mapsto G$ は，$F(T)$ と $\mathcal{L}(\mathcal{R}(T)^\perp)_{sa}$ との間の一対一の対応を与える。

定理 2. $\ell(T) \geqq \gamma > 0$, $\mathcal{R}(C^*) \subset \mathcal{R}(\gamma^{-1} - A)$ とする。定理1における $\tilde{T}$ と G との対応の下に，$\tilde{T} \in F(T, \gamma)$ となるための必要十分条件は，

$$(4.1.) \qquad 2 \cdot \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon \downarrow 0} C(\gamma^{-2} - A^2 + \varepsilon)^{-1} C^* - 2 \leqq G \leqq 0$$

となることである。特に

$$(4.2.) \qquad \mathcal{D}(\tilde{T}_K(\gamma)) = \mathcal{D}(T) + \mathrm{Ker}(T^* - \gamma)$$

定理 3. $m(T) \geqq \gamma > 0$, $\mathcal{R}(C^*) \subset \mathcal{R}(\gamma^{-1} - A)$ とする。定理1における $\tilde{T}$ と G との対応の下に，$\tilde{T} \in F_+(T, \gamma)$ となるための必要十分条件は，

$$(4.3.) \qquad \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon \downarrow 0} C(\gamma^{-1} A - A^2 + \varepsilon)^{-1} C^* - 1 \leqq G \leqq 0$$

となることである。

これらの定理の証明は次の節にまわし，ここではこれらの定理に関する注意を与える。

1. 定理1・定理2における仮定「$\mathcal{R}(C^*) \subset \mathcal{R}(\gamma^{-1} - A)$」を変更して「$\mathcal{R}(C^*) \subset \mathcal{R}(\gamma^{-1} + A)$」とすると，定理1・定理2と類似の定理が得られる。特に

$$(4.4.) \qquad \mathcal{D}(\tilde{T}_N(\gamma)) = \mathcal{D}(T) + \mathrm{Ker}(T^* + \gamma)$$

が得られる。

2. 条件「$\mathcal{R}(C^*) \subset \mathcal{R}(\gamma^{-1} - A)$」というのは，(4.2.) が成り立った

めの十分条件としては，これまでに知られているものの中で最も弱いものである。$\ell(T) \geqq \gamma > 0$ として次の諸条件を考えるとき，下の implication が得られる。(a) $\mathcal{R}(C^*) \subset \mathcal{R}(\gamma^{-1} - A)$．
(a′) $\mathcal{R}(C^*) \subset \mathcal{R}(\gamma^{-1} + A)$．(b) $\mathcal{R}(\gamma - T)$ は H の閉部分空間である。
(b′) $\mathcal{R}(\gamma + T)$ は H の閉部分空間である。(c) $\sup(\sigma(A) \setminus \{\gamma^{-1}\}) < \gamma^{-1}$
(c′) $\inf\{\sigma(A) \setminus \{-\gamma^{-1}\}\} > -\gamma^{-1}$ (d) A は compact である。(e) T は compact である。(f) $\|A\| < \gamma^{-1}$ (g) $\ell(T) > \gamma$．

$$\begin{tikzcd}
 & & (c) \arrow[r, Leftrightarrow] & (b) \arrow[r, Rightarrow] & (a) \\
(e) \arrow[r, Rightarrow] & (d) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (f) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (g) \arrow[l, Rightarrow] & \\
 & & (c') \arrow[r, Leftrightarrow] & (b') \arrow[r, Rightarrow] & (a')
\end{tikzcd}$$

(b)は安藤・西尾[2]の条件，(g)は Krein [9]の条件である。

§5. 定理1・定理2・定理3の証明

本節では T を H における稠密に定義された閉対称作用素で $\ell(T) > 0$ となるものとする。われわれは前節における記法を用いる。たとえば，$T^{-1} = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$．定理1を証明するために，いくつかの補題を必要とする。これらの補題の証明は省略する。

<u>補題</u> 4. $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{R}\begin{bmatrix} A & C^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{R}(T)^{\perp}$．

$x, y \in \mathcal{R}(T)$, $z \in \mathcal{R}(T)^{\perp}$ に対し

$$T^*\begin{pmatrix} Ax + C^*y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

補題5. $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ に対し

$$\mathrm{Ker}(T^* - \lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in \mathcal{R}(T),\ v \in \mathcal{R}(T)^{\perp},\ (\lambda^{-1} - A)u = C^* v \right\}$$

以下，本節を通じて $\ell(T) \geqq \gamma > 0$, $\mathcal{R}(C^*) \subset \mathcal{R}(\gamma^{-1} - A)$ を仮定しておく。さらに，同じことであるから $\gamma = 1$ と仮定しておく。
補題3により，$(1-A)V = C^*$, $\mathcal{R}(V) \subset \mathrm{Ker}(1-A)^{\perp}$ を満たす $V \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(T)^{\perp}, \mathcal{R}(T))$ がただ一つ存在する。

補題6. $B \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(T)^{\perp})_{sa}$ とし，V を上述の通りとする。このとき，

$$\mathcal{R}\begin{bmatrix} A & C^* \\ C & B \end{bmatrix} = \mathcal{R}\begin{bmatrix} A & V \\ C & B + CV \end{bmatrix} \tag{5.1.}$$

補題7. V を上述の通りとする。$Q \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(T)^{\perp})_{sa}$ に対し，全単射 $[Q]$ を次のように定義する。$[Q] : (\mathrm{Ker}\,Q)^{\perp} \to \mathcal{R}(Q)$, $x \mapsto Qx$.
このとき，もし $x \in \mathcal{R}(T)$, $y \in \mathcal{R}(Q)$, $\begin{pmatrix} x \\ [Q]^{-1}y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T^* - 1)$ ならば $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{R}\begin{pmatrix} A & V \\ C & Q \end{pmatrix}$ となる。

補題8. $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(T)^{\perp})_{sa}$ とし，V を上述の通りとする。このとき，

$$\mathcal{R}\begin{pmatrix} A & V \\ C & Q \end{pmatrix} = \mathcal{D}(T) + \{ u + (Q-1)Pu \mid u \in \mathrm{Ker}(T^* - 1) \} \tag{5.2.}$$

定理1の証明. (5.1.)(5.2.)から, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(T)^{\perp})sa$ と上述の V とに対し

$$(5.3.) \qquad \mathcal{R}\begin{bmatrix} A & C^* \\ C & B \end{bmatrix} = \mathcal{D}(T) + \{u + (B + CV - 1)Pu \mid u \in \mathrm{Ker}(T^* - 1)\}$$

が成り立つことがわかる。$\tilde{T} \in F(T)$ ならば, 命題4により, 或る $B \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(T)^{\perp})sa$ に対して $\tilde{T}^{-1} = \begin{bmatrix} A & C^* \\ C & B \end{bmatrix}$ となり, この B に対して (5.3.) から

$$(5.4) \qquad \mathcal{D}(\tilde{T}) = \mathcal{D}(T) + \{u + (B + CV - 1)Pu \mid u \in \mathrm{Ker}(T^* - 1)\}$$

が得られる。

逆に, $\tilde{T}$ が或る $G \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(T)^{\perp})sa$ に対して T^* の

$$\mathcal{D}(T) + \{u + GPu \mid u \in \mathrm{Ker}(T^* - 1)\}$$

への制限となっているならば, (5.3.) から

$$\mathcal{D}(\tilde{T}) = \mathcal{R}\begin{bmatrix} A & C^* \\ C & G - CV + 1 \end{bmatrix} = \mathcal{D}\left(\begin{bmatrix} A & C^* \\ C & G - CV + 1 \end{bmatrix}^{-1}\right)$$

が従う。よって

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} A & C^* \\ C & G - CV + 1 \end{bmatrix}^{-1}. \qquad ▨$$

定理2・定理3は, 命題4・定理1を用いて証明される。その証明は割愛する。

§6. 例

本節では, 定理1・定理2・定理3を適用して簡単な常微分作用素の自己共役拡張を構成する。

<u>例</u> 1. $H=L^2(0,1)$, $T=i^{-1}(d/dx)$, $\mathcal{D}(T)=\{f\in H^1(0,1)\mid f(0)=f(1)=0\}$ とする。このとき，Tは閉対称作用素であり，$\ell(T)=\sqrt{2}$ であり，T^{-1} は compact である。$T^*=i^{-1}(d/dx)$, $\mathcal{D}(T^*)=H^1(0,1)$ となる。$\ell(T)\geqq\gamma>0$ とする。次のことがわかる。$0<\theta<2\pi$ に対し

$$\tilde{T}_\theta=\left(T^* \text{ の } \{f\in H^1(0,1)\mid f(0)=e^{i\theta}f(1)\} \text{ への制限}\right)$$

とおくと，

$$F(T)=\{\tilde{T}_\theta\mid 0<\theta<2\pi\},$$

$$F(T,\gamma)=\{\tilde{T}_\theta\mid \gamma\leqq\theta\leqq 2\pi-\gamma\},$$

$$\mathcal{D}(\tilde{T}_K(\gamma))=\{f\in H^1(0,1)\mid f(0)=e^{-i\gamma}f(1)\},$$

$$\mathcal{D}(\tilde{T}_N(\gamma))=\{f\in H^1(0,1)\mid f(0)=e^{i\gamma}f(1)\}$$

となる。

<u>例</u> 2. $H=L^2(0,1)$, $T=-(d^2/dx^2)$, $\mathcal{D}(T)=\{f\in H^2(0,1)\mid f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0\}$ とする。このとき，Tは閉正値対称作用素であり，$m(T)=\pi^2$ であり，T^{-1} は compact である。$T^*=-(d^2/dx^2)$, $\mathcal{D}(T^*)=H^2(0,1)$ となる。以下，簡単のために $\gamma=\pi^2$ とする。次のことがわかる。$-\pi^2/12\leqq\lambda\leqq 0$ に対し

$$\tilde{T}_\lambda=\begin{cases} T^* \text{ の } \left\{f\in H^2(0,1)\,\middle|\, \begin{pmatrix} f(0)\\ f(1)\end{pmatrix}=-\dfrac{\pi^2+12\lambda}{48\lambda}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} f'(0)\\ f'(1)\end{bmatrix}\right\} \\ \text{への制限 } (-\pi^2/12\leqq\lambda<0) \\ \\ T^* \text{ の } \left\{f\in H^2(0,1)\,\middle|\, f(0)+f(1)=0,\ f'(0)+f'(1)=0\right\} \\ \text{への制限 } (\lambda=0) \end{cases}$$

とおくと,

$$F_+(T, \pi^2) = \{ \hat{\tilde{T}}_\lambda \mid -\pi^2/12 \leqslant \lambda \leqslant 0 \}$$

となる。Friedrichs 拡張は $\lambda = -\pi^2/12$ に対応し, Krein 拡張 $\tilde{T}_K(\pi^2)$ は $\lambda = 0$ に対応する。

§7. 自己共役拡張から成る列の収束

本節では自己共役拡張から成る列の resolvent の収束を調べる。次の定理は, Nenciu [13], Theorem 3 の拡張である。

定理4. T を H における稠密に定義された閉対称作用素で $m(T) > 0$ となるものとする。$\{\tilde{T}_n\}$ を T の自己共役拡張から成る列とし, 各 n に対し $\ell(\tilde{T}_n) > 0$ であるとする。$\beta > 0$ と, 正の実数から成る, 0 に収束する数列 $\{\varepsilon_n\}$ とが存在して

$$\pm(\tilde{T}_n^{-1} - \tilde{T}_F^{-1}) \leqslant \beta \cdot \tilde{T}_F^{-1} + \varepsilon_n$$

となるならば, $\operatorname{s-lim}_{n\to\infty} \tilde{T}_n^{-1} = \tilde{T}_F^{-1}$ となる。さらに, $P_{\mathbb{R}(T)^\perp} \tilde{T}_F^{-1} P_{\mathbb{R}(T)^\perp}$ が compact であるならば, $\lim_{n\to\infty} \| \tilde{T}_n^{-1} - \tilde{T}_F^{-1} \| = 0$ となる。

定理4の証明. §4 における記法を用いる。たとえば,

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}, \quad \tilde{T}_F^{-1} = \begin{bmatrix} A & C^* \\ C & \operatorname{s-lim}_{\varepsilon\downarrow 0} C(A+\varepsilon)^{-1}C^* \end{bmatrix},$$

$$\tilde{T}_n^{-1} - \tilde{T}_F^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_n \end{bmatrix}, \quad Q_n \in \mathscr{L}(\mathbb{R}(T)^\perp)_{sa}$$

とおくことができる。定理の仮定により,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pm Q_n \end{bmatrix} \leqq \beta \begin{bmatrix} A+\varepsilon_n \beta^{-1} & C^* \\ C & C(A+\varepsilon_n\beta^{-1})^{-1}C^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_n \end{bmatrix},$$

ここに $S_n = \underset{\varepsilon \downarrow 0}{\text{s-lim}}\, C(A+\varepsilon)^{-1}C^* - C(A+\varepsilon_n\beta^{-1})^{-1}C^*$, となる。したがって, $x \in \mathcal{R}(T)$, $y \in \mathcal{R}(T)^\perp$ に対し

$$\pm (Q_n y \mid y) \leqq \beta \| (A+\varepsilon_n\beta^{-1})^{1/2} x + (A+\varepsilon_n\beta^{-1})^{-1/2} C^* y \|^2 + \beta (S_n y \mid y)$$

が成り立つから, $\pm Q_n \leqq \beta S_n$ が得られる。よって, $\underset{n\to\infty}{\text{s-lim}}\, Q_n = 0$. さらに, $P_{\mathcal{R}(T)^\perp} \tilde{T}_F^{-1} P_{\mathcal{R}(T)^\perp} = \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\text{s-lim}}\, C(A+\varepsilon)^{-1}C^*$ が compact であるならば, $\lim_{n\to\infty} \|S_n\| = 0$ となるから, $\lim_{n\to\infty} \|Q_n\| = 0$ が得られる。 $\blacksquare$

§8. von Neumann の理論との関連

次の定理は, von Neumann の理論としてよく知られている。

定理（[5], p.1228） Tを稠密に定義された閉対称作用素で不足指数が一致するものとする。このとき, $\tilde{T}$ がTの自己共役拡張であるための必要十分条件は, 或る isometric isomorphism $W : \mathrm{Ker}(T^*-i) \to \mathrm{Ker}(T^*+i)$ が存在して $\tilde{T}$ が T^* の

$$\mathcal{D}(T) + \{ u + Wu \mid u \in \mathrm{Ker}(T^*-i) \}$$

への制限となっていることである。写像 $\tilde{T} \mapsto W$ は, Tの自己共役拡張の全体と, $\mathrm{Ker}(T^*-i)$ から $\mathrm{Ker}(T^*+i)$ への isometric isomorphism の全体との間の一対一の対応を与える。

Wによって定まるTの自己共役拡張を$\tilde{T}_W$と書くことにする。$\ell(T)$の意味は§4 の通りとする。われわれは次の問題を考えよう。

<u>問題</u>　$\ell(T)>0$ とするとき，$\ell(\tilde{T}_W)>0$ となるための（Wに関する）必要十分条件は何か。

この問題の一つの解答として，次の定理が得られる。

<u>定理</u>5.　Tを稠密に定義された閉対称作用素で$\ell(T)>0$ となるものとする。Pを $\mathrm{Ker}\,T^*$ への直交射影とする。このとき，$\ell(\tilde{T}_W)>0$ となるための必要十分条件は，写像 $\mathrm{Ker}(T^*-i)\to\mathrm{Ker}\,T^*$, $u\mapsto P(u-Wu)$ が全単射となることである。

定理5 の証明は割愛する。

参 考 文 献

[1] Ando, Topics on operator inequalities, Lecture note

[2] Ando-Nishio, Positive self-adjoint extensions of positive symmetric operators, Tôhoku Math. J., 22 (1970) 65-75

[3] Birman, On the theory of self-adjoint extensions of positive definite operators, Math. Sbornik, 38 (1956) 431-450 (Russian)

[4] Douglas, On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space, Proc. Amer. Math., 17 (1966) 413-415

[5] Dunford-Schwartz, Linear operators, Part II, Interscience, 1963

[6] Faris, Self-adjoint operators, Lecture Notes in Mathematics, 433, Springer, 1975

[7] Friedrichs, Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, Math. Ann., 109 (1934) 465-487

[8] Fukushima, Dirichlet forms and Markov processes, North-Holland, 1980

[9] Krein, The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded Hermitian transformations and its applications. I, Math. Sbornik 20 (1947) 431-495 (Russian)

[10] Maeda, On a relation between some operator inequalities and two-positivity, Preprint

[11] Maeda, Self-adjoint extensions of symmetric operators with spectral gaps, An operator theoretic treatment, Preprint

[12] Maeda, Some remarks on the von Neumann theory of self-adjoint extensions, Preprint

[13] Nenciu, Applications of the Krein resolvent formula to the theory of self-adjoint extensions of positive symmetric operators, J. Operator Theory, 10 (1983) 209-218

[14] Reed-Simon, Methods of modern mathematical physics II, Academic Press, 1975