数理解析研究所講究録
第 582 巻 1986 年 100-111

作用素単調関数と Donoghue の定理

大阪教育大 藤井 淳一 (Jun Ichi Fujii)

Donoghueによって扱われたヒルベルト空間のノルムの補間と，その積分表示定理[3]を，作用素関数の立場，さらには作用素平均の立場から見ると，作用素凹関数の議論になり，自然に対応する作用素単調関数の議論が展開できる。

したがって，まずヒルベルト空間上の正作用素の平均と，作用素関数の対応の話から始めよう。

1. 作用素関数と作用素平均

ここで扱う作用素関数のクラスは，次の２種類である。

OM： $[0,\infty)$ 上の非負作用素単調関数全体

即ち， $f\in OM \iff 0\leq A\leq B \Longrightarrow 0\leq f(A)\leq f(B)$.

OC： $[0,1]$ 上の非負作用素凹関数全体

即ち， $k\in OC \iff 0\leq A, B\leq 1$

$$\Longrightarrow 0\leq \frac{k(A)+k(B)}{2}\leq k\left(\frac{A+B}{2}\right).$$

特に，連続性を仮定したsub-classを，それぞれ，COM，COCと書くことにする。

作用素平均の話は，Ando [1] に始まり，

$$\text{幾何平均}\quad A\,g\,B = \max\left\{ X \geqq 0 \;\middle|\; \begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix} \geqq 0 \right\}$$

$$\text{調和平均}\quad A\,h\,B = \max\left\{ X \geqq 0 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix} \geqq \begin{pmatrix} X & X \\ X & X \end{pmatrix} \right\}$$

が導入された。A，Bが可換ならば，通常の数の平均にもちろん対応している。また，調和平均は，回路網理論で重要な概念である「平行和(parallel sum)」の2倍にあたるものである。さらに，[4],[5],[6]にあるように，算術平均($A\,a\,B = \frac{A+B}{2}$)とあわせてみれば，算術幾何平均，算術調和平均(実は幾何平均)が定義でき，前述の平均と同様の性質をもつことがわかった。その中で特に重要な性質であり，後にKubo-Ando [11]によって公理化される3つの性質をあげると，作用素平均 m に対し

(M1) $A \leqq C,\ B \leqq D \Rightarrow A\,m\,B \leqq C\,m\,D$ (単調性)

(M2) $A_n \downarrow A,\ B_n \downarrow B \Rightarrow A_n\,m\,B_n \downarrow A\,m\,B$ (半連続性)

(M3) $C^*(A\,m\,B)C \leqq C^*AC\,m\,C^*BC$ (transformer inequality)

が満たされる。ここでは，(M1)-(M3)を満たす正作用素上の二項演算 m を「平均」と呼ぶことにする。

これらの性質から得られる平均の性質をみてみよう。(M2)の条件から，作用素平均は，可逆な作用素の平均に帰着され

ることがわかる： $A \, m \, B = s\text{-}\lim_{n\to\infty} (A + \frac{1}{n}) \, m \, (B + \frac{1}{n})$
また、可逆な作用素 C に対し、(M 3)を使って

$$C^*AC \, m \, C^*BC = C^*C^{*-1}(C^*AC \, m \, C^*BC)C^{-1}C \leq C^*(A \, m \, B)C \leq C^*AC \, m \, C^*BC$$

より，$C^*(A m B)C = C^*AC \, m \, C^*BC$ が得られるので、A が可逆な正作用素ならば

$$A \, m \, B = A^{\frac{1}{2}}(1 \, m \, A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}$$

と変形できるので、本質的には $f(x) = 1 \, m \, x$ という非負実数値関数の話になる。さらに、$0 \leq A \leq B$ ならば

$$0 \leq f(A) = 1 \, m \, A \leq 1 \, m \, B = f(B)$$

から、$f \in OM$，(M 2) より $f \in COM$ となる。

実際，Kubo-Ando [11] によって，平均全体，COM，$\mathbb{R}^+$上の正値ラドン測度の3者の間に，次の関係式で順序同型が存在する事が示された：

$$1 \, m \, x = f(x) = \int_0^\infty \frac{x\,(1+t)}{x+t} \, d\mu(t)$$

一方，Pusz-Woronowicz [12] によって，半双線型形式の平均が論じられていたが，そのアナロジーを辿って，作用素平均からながめると，単位的 C^*－環上の正値線型形式の平均が導入できる．[7]：

φ，ψ を C^*－環 $\mathcal{A}$ 上の正値線型形式とするとき，

$$\mathcal{N} = \{ A \in \mathcal{A} \mid \varphi(A^*A) + \psi(A^*A) = 0 \}$$

は，閉左イデアルになり，$\mathcal{A}/\mathcal{N}$ に内積

$$\langle A^\circ, B^\circ \rangle = \varphi(B^*A) + \psi(B^*A) \quad (^\circ \text{は } \mathcal{A} \to \mathcal{A}/N \text{ の q.map})$$

が定義でき、この内積による $\mathcal{A}/N$ の完備化を $\mathcal{H}$ とする。

絶対連続性から，$\mathcal{H}$ 上の正作用素 H，K で

$$\varphi(B^*A) = \langle HA^\circ, B^\circ \rangle \quad , \quad \psi(B^*A) = \langle KA^\circ, B^\circ \rangle$$

となるもの（ラドン・ニコディムの微係数）が存在する。

すると，

$$\begin{aligned}\langle A^\circ, B^\circ \rangle &= \langle HA^\circ, B^\circ \rangle + \langle KA^\circ, B^\circ \rangle \\ &= \langle HA^\circ, B^\circ \rangle + \langle (1-H)A^\circ, B^\circ \rangle\end{aligned}$$

と変形できるので，正値線型形式の平均として

$$(\varphi\, m\, \psi)(A) = \langle H m (1-H) A^\circ, 1^\circ \rangle$$

という定義ができる。ここでの平均は，正縮小作用素 H と，[0, 1] 上の実数値関数 $k(x) = x\, m\, (1-x)$ の話である。

この関数 k の性質を調べると，$k \in$ COC であることがわかり，平均 m を介して

$$f(x) = 1\, m\, x = (1+x)\left(\frac{1}{1+x}\, m\, \frac{x}{1+x}\right) = (1+x)\, k\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

の関係式で，COM と 1 to 1 に対応する。

以上のように，作用素の平均，COM，COC，Radon 測度の 4 者は同等の概念であることがわかった。この視点に立って，これから述べる Donoghue の定理を見れば，自然に作用素単調関数版の定理が得られるし，もう一つの作用素平均の側面が見られるだろう。

2. Donoghue型の定理

Donoghueは1967年の論文[3]で，ヒルベルト空間のノルムの補間を作用素にやき直して論じている。2つのノルムを$\| \|_a$, $\| \|_b$としたとき，標準のノルムとして

$$\|x\|^2 = \|x\|_a^2 + \|x\|_b^2$$

を考えると，前章の議論と同様に，ラドン・ニコディムの微係数として，次のような正縮小作用素Hが存在する：

$$\|x\|^2 = (x, x) = (Hx, x) + ((1-H)x, x)$$

補間はこのように，Hと$1-H$の補間の話になる。作用素の話に定義を書き直せば，$0 \leqq H \leqq 1$に対し，

定義．K：exact interpolation of H（$K \in EI(H)$と書く）

$$\Longleftrightarrow \quad T^*HT \leqq H,\ T^*(1-H)T \leqq 1-H \Rightarrow T^*KT \leqq K.$$

（ここでexactの意味は $T^*KT \leqq aK$ の $a=1$ のこと）

このとき，Donoghueの定理を，作用素関数で書き直すと，

Donoghueの定理　$K \in EI(H) \Longleftrightarrow {}^\exists k \in OC\,;\ k(H) = K.$

自然な対応として，$H \geqq 0$に対し

定義．K：exact subinterpolation of H（$K \in ES(H)$と書く）

$$\Longleftrightarrow \quad T^*HT \leqq H,\ T^*T \leqq 1 \Longrightarrow T^*KT \leqq K$$

と定めれば，アナロジーを辿って

定理．$K \in ES(H) \Longleftrightarrow {}^\exists f \in OM\,;\ f(H) = K$　[8]

が得られる。証明をすべて述べることはできないが，Donoghue

の証明の改良と紹介を兼ねて，アウトラインを述べよう。

根底には次の平均の不等式がある。たとえば定理の方なら

$$T^*HT \leqq H,\ T^*T \leqq 1 \quad \text{なる} T \text{に対し，}$$

$$T^*KT = T^*(1\,m\,H)T \leqq T^*T\,m\,T^*HT \leqq 1\,m\,H = K,$$

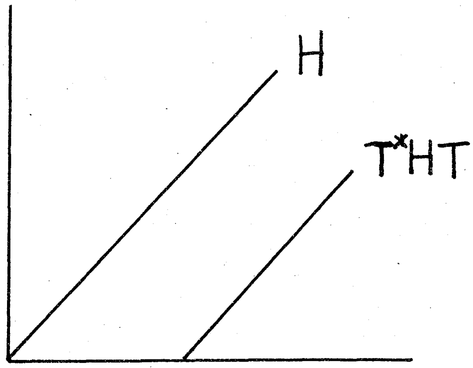
ただし，Hは可逆とする。けれども，Hは可逆としてもよいことがわかるので，$\Longleftarrow$ の証明はこれでよい。

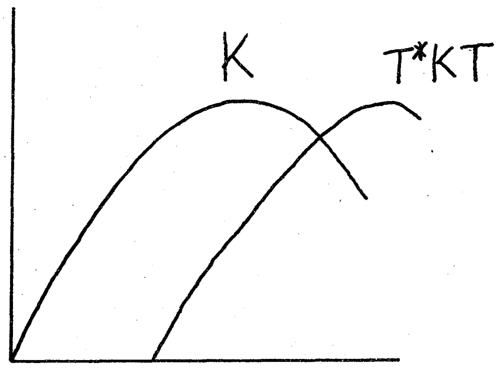
逆に，$K \in ES(H)$ をとれば　$H \smile U$：ユニタリに対し，

$$U^*HU = H,\ U^*U = 1 \quad \text{より，} U^*KU \leqq K,$$

同様に　$H \smile U^*$ だから $UKU^* \leqq K$　が得られ，$K \leqq U^*KU$ から　$K = U^*KU$，即ち　$K \smile U$　がわかる。したがって，Kは，Hの bi-commutant H'' に入るので　$f(H) = K$ となる，$\sigma(H)$ 上の有界可測関数 f が存在する。当然証明は f が $\sigma(H)$ の上で作用素単調であることを示し，さらに $[0, \infty)$ に拡張可能であることを示すという二段階になる。

まず f の初等的な性質を見ていこう。f は，非負で連続で単調非減少となることがわかるが，たとえば，単調非減少を示す場合，イメージ的には次ページの左図のように，T^* と T ではさむと，Hを右側へずらすような T を考えておく。すると，もしKが右図のように減少する部分をもてば，T^*KT をKがおさえられないようになってしまう。連続性も同じようなテクニックで示すことができる。





さらに，Hが可逆のときは明らかに，fはリプシッツ関数となる。このことを利用し，ユニタリ同値な作用素で近似していくことによって，次の補題を得る。

<u>補題1</u>． $f(H)\in ES(H),\ \sigma(H')=\sigma(H) \Longrightarrow f(H')\in ES(H')$

スペクトルが等しいという条件は，容易に $\sigma(H')\subset\sigma(H)$ に変えられる。この形の補題がDonoghue [3]では重要なのだが，それはimplicitに次のような事実を示すからである。

<u>補題2</u>． fは $\sigma(H)$ 上で 作用素単調である．

（証明） $0\leqq A\leqq B$， $\sigma(A),\sigma(B)\subset\sigma(H)$ に対し，

$L=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$ を考えると，$\sigma(L)\subset\sigma(H)$ だから補題1より

$f(L)\in ES(L)$ となる。特に，$T=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ に対し，

$T^*T\leqq 1$，$T^*LT=\begin{pmatrix}0&0\\0&A\end{pmatrix}\leqq\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=L$ を満たすから

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&f(A)\end{pmatrix}=T^*f(L)T\leqq f(L)=\begin{pmatrix}f(A)&0\\0&f(B)\end{pmatrix}$$

となり，(2, 2) 成分を比較すれば $f(A)\leqq f(B)$ を得る。

//

さて、次は作用素単調関数を $[0,\infty)$ に拡張するわけだが、都合よくも、Donoghueは1966年の論文[2]で拡張するための同値条件を求めていた。特に有限の $\sigma(H)=\sigma$ に対し、Hは可逆だから、$\sigma^*=\{\frac{1}{\lambda}\mid\lambda\in\sigma\}$ が定められる。このとき

Donoghueの拡張定理　$f\in OM$ の必要十分条件は、次の3つの関数が、同時に3つの条件を満たすことである：

(i) $\tilde{f}$：作用素単調 on $\sigma\cup\{0\}$ $(\tilde{f}(0)=0,\ \tilde{f}(x)=f(x)\ (x\neq 0))$

(ii) f^*：作用素単調 on $\sigma^*\cup\{0\}$ $(f^*(0)=0,\ f^*(x)=\frac{1}{f(1/x)}\ (x\neq 0))$

(iii) f°：作用素単調 on $\sigma^*\cup\{0\}$ $(f^\circ(0)=0,\ f^\circ(x)=\frac{x}{f(1/x)}\ (x\neq 0))$

この f^* と f° は、もし作用素平均を知らなければ、非常にわかりにくく、この定理のフォーミュレーションが理解しにくい。ところが、$f(x)=1\,m\,x$ という平均を経由すると、

$$f^*(x)=\frac{1}{f(1/x)}=(1\,m\,x^{-1})^{-1}$$ となり、

実は、平均 m の adjoint $A\,m^*\,B=(A^{-1}\,m\,B^{-1})^{-1}$ に対応する。(たとえば、算術平均と調和平均は互いに他のadjointで、幾何平均は、adjoint不変である。) また、

$$f^\circ(x)=\frac{x}{f(1/x)}=x(1\,m\,x^{-1})^{-1}=(x\,m\,1)^{-1}$$ より

実は、平均 m の transpose $A\,m^\circ\,B=B\,m\,A$ に対応している。

したがって、拡張定理の(i)は、小さい方への拡張、(ii)は、大きい方への拡張、(iii)は、平均になるための左側の項の単調性という見方ができるだろう。この条件を逐一チェックする

ことによって，5ページの定理は証明されたことになる。

3．作用素平均と補間（cf.［9］）

ここで，さらにDonoghue型の補間の定義を形式的に拡張し，平均と補間との差を明らかにしよう。自然な拡張としてあらためて，正作用素A，Bに対し，

定義．C：exact interpolation for A, B　$(C\in EI(A,B))$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\quad T^*AT\leqq A,\ T^*BT\leqq B \Longrightarrow T^*CT\leqq C$$

と定める。作用素の「補間」としては，こちらの方がより補間らしいが，前述の補間との関連は次のようになる：

$$K\in EI(H) \Longleftrightarrow K\in EI(H, 1-H)$$

$$K\in ES(H) \Longleftrightarrow K\in EI(1, H)$$

命題．A, B は可逆な正作用素とする。そのとき，

$$C\in EI(A,B) \Longleftrightarrow {}^{\exists}\text{平均 } m;\ C=A\,m\,B$$

（証明）　$\Leftarrow$は，次の不等式でわかる。

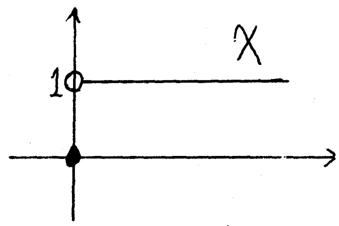
$$T^*(A\,m\,B)T\leqq T^*AT\,m\,T^*BT\leqq A\,m\,B \quad (T^*AT\leqq A,\ T^*BT\leqq B)$$

逆に$C\in EI(A,B)$とすると，$A^{-\frac{1}{2}}CA^{-\frac{1}{2}}\in ES(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})$ となるから，定理より ${}^{\exists}f\in OM;\ f(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})=A^{-\frac{1}{2}}CA^{-\frac{1}{2}}$
ここでA, Bの可逆性より，$f(x)=1\,m\,x$ という平均を考えてよいから，

$$C=A^{\frac{1}{2}}f(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}=A^{\frac{1}{2}}(1\,m\,A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}=A\,m\,B \qquad //$$

この命題の可逆性条件ははずせない。$OM \supsetneqq COM$ となるからである。これがそのまま補間と平均の差になっている。通常，作用素関数は，開区間上の解析関数として扱われているので，$(0,\infty)$ 上では両者の概念は同じである。しかし，たとえば，次のような関数 χ

$$\begin{cases} \chi(x) = 1 & (x \neq 0) \\ \chi(0) = 0 \end{cases}$$



は，$\chi \in OM$ で $\chi \notin COM$ である。ところで，有界な範囲では，$\chi(x) = \lim_{\alpha\to 0} x^{\alpha}$ で χ は得られ，実はこの関数が本質的である。なぜなら $^{\forall} f \in OM$ は，$\hat{f} \in COM$ ($\hat{f}(0) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon)$, $\hat{f}(x) = f(x)$ $(x \neq 0)$) によって，

$$f = (\hat{f} - a)(x) + a\chi \qquad (a = \hat{f}(0) - f(0))$$

とかけ，次の補題を得られるからである。

<u>補題3</u>．
$$f \in OM \iff {}^{\exists} f_{\alpha} \in COM ; f = \lim f_{\alpha}$$
$$k \in OC \iff {}^{\exists} k_{\alpha} \in COC ; k = \lim k_{\alpha}$$

実はこの補題があるからこそ，可逆作用素にすべては帰着されたのである。また，この補題により，COMの定理はたいていOMまで拡張できる。たとえば

<u>Hansen の定理</u>[10]　$f \in OM$，$\|T\| \leqq 1$ ならば

$$T^{*}f(A)T \leqq f(T^{*}AT) \qquad ({}^{\forall}A \geqq 0)$$

などである。

またHansenの定理と，Donoghueの定理があれば，1章で述べたような作用素単調関数と作用素凹関数の対応から，主定理はより自然に得られる。つまり，$T^*HT \leqq H$, $T^*T \leqq 1$ なら

$K=f(H)$ に対し，$T^*KT = T^*f(H)T \leqq f(T^*HT) \leqq f(H) = K$

が得られ，逆に

$$k \in OC \implies f_k(x) = (1+x)k\left(\frac{1}{1+x}\right) \in OM$$

の変換を利用すれば，Donoghueの定理で得られる作用素凹関数から，定理での作用素単調関数が得られることになる。

参考文献

[1] T. Ando : Topics on operator inequalities, Hokkaido Univ. Lecture Note, 1978

[2] W.F.Donoghue, Jr. : The theorems of Loewner and Pick, Israel J. Math., 4 (1966), 153-170.

[3] W.F.Donoghue, Jr. : The interpolation of quadratic norms, Acta Math., 118 (1967), 251-270.

[4] J.I.Fujii : Arithmetico-geometric mean of operators, Math. Japon. 23 (1978), 667-669.

[5] J.I.Fujii : On geometric and harmonic mean of

operators, Math. Japon., 24 (1979), 203-207.

[6] J. I. Fujii and M. Fujii : Some remarks on operator means, Math. Japon., 24 (1979), 335-339.

[7] J. I. Fujii : Operator concave functions and means of positive linear functionals, Math. Japon., 25 (1980), 453-461.

[8] J. I. Fujii : Operator monotone functions and Donoghue's theorem, to appear in Math. Japon.

[9] J. I. Fujii and M. Fujii and H. Takehana : Interpolation theorems of Donoghue's type on positive operators, to appear in Math. Japon.

[10] F. Hansen : An operator inequality, Math. Ann., 246 (1980), 249-250.

[11] F. Kubo and T. Ando : Means of positive linear operators, Math. Ann., 246 (1980), 205-224.

[12] W. Pusz and S. L. Woronowicz : Functional calculus for sesquilinear forms and purification map, Rep. Math. Phys., 8 (1975), 159-170.