数理解析研究所講究録
第 582 巻 1986 年 125-129

値域を含む定義域をもつ閉作用素

九大 理 太田昇一 (Schôichi Ôta)

1. 非有界微分子 [2] および非有界作用素環 [1] に関連して、値域が定義域に含まれる (すなわち, 定義域を不変にする) ような閉作用素の有界性について [3] において、議論したが、まず始めにその復習からはじめる。

<u>定理 1.</u> $\mathcal{H}$ を Hilbert space とし、T を densely defined, closed (linear) operator in $\mathcal{H}$ とします。T が定義域 $\mathcal{D}(T)$ を不変にする i.e., $T\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$ とする。もしも、十分大なる λ に対して ($\lambda \in \mathbb{R}$), $(\lambda I - T)\mathcal{D}(T)$ が closed ならば, T は bounded (i.e., $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$)。

<u>証明.</u> $\mathcal{D}(T)$ に、

$$(x, y)_T \equiv (x, y) + (Tx, Ty) \qquad (x, y \in \mathcal{D}(T))$$

でもって、内積を入れると, Hilbert space になる。それを、$\{\mathcal{D}(T), (\cdot, \cdot)_T\}$ でかくことにする。あきらかに T は、この新しい Hilbert space $\{\mathcal{D}(T), (\cdot, \cdot)_T\}$ における closed operator だから、closed graph theorem より、T はこの space での

bounded operator になる。 よって spectral theory より十分大きい λ に対して $(\lambda I - T)\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T)$ 。 故に $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$ を得る。

特に、Tが dissipative ならば、定理の仮定を満たすから、

系 2 [3].

(1). Tが densely defined, closed dissipative operator in $\mathcal{H}$ のとき，もしも $T\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$ ならば Tは bounded である。

(2). Tが densely defined, closed operator in $\mathcal{H}$ とせよ。もしも $T\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$ ならば、Tは bounded である。

2. closed (linear) operator で定義域を不変にする unbounded なものは、多く存在する。 その代表的な例として、idempotent がある。 このような unbounded な idempotent は [4] の §4 における dual pair の解析に重要な役を演ずる。 ここでは 一般の unbounded, closed operator で定義域を不変にするもののもつ性質を、述べる。

命題 3 [3]. Tを densely defined, closed operator in $\mathcal{H}$ で，定義域を不変にするとせよ。 このとき，

(1). $\mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(T^*)$ は T の core である。

(2). もしも、T が unbounded ならば、$W(T) = \mathbb{C}$,
ここに、$W(T)$ は T の numerical range i.e., $W(T) \equiv \{(Tx, x)\ ;\ \|x\| = 1,\ x \in \mathcal{D}(T)\}$ を示す。

3. 上で述べた densely defined, unbounded closed idempotent T は $(T^*)^2 = T^*$ をみたすから、T^* も又その定義域を不変にしている。定義域を不変にするような closed operator で unbounded な典型的な例 ([3]) の共役作用素 T^* もやはり $T^*\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(T^*)$ を満たしている。そこで、次のような question を考える：

「T を densely defined, closed linear operator in a Hilbert space $\mathcal{H}$ で $T\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$ を満たすとせよ。このとき、T^* も同じ性質 i.e., $T^*\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(T^*)$ が成り立つか？」

この question に対して我々は counter-example を構成出来るが、以下では、そのことを述べる。

各 $\xi \in \mathcal{H}$ に対して、rank-one operator e_ξ を

$$e_\xi(\eta) \equiv (\eta, \xi)\xi \qquad (\eta \in \mathcal{H})$$

で定義すると、明らかに $e_\xi^* = e_\xi$.

<u>定理4.</u> $\mathcal{H}$ を Hilbert space とし，T を <u>unbounded</u> densely defined, closed linear operator in $\mathcal{H}$ such that $T\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$ とする。このとき，以下の性質をもつ $\mathcal{H}$ 上の bounded linear operator K が存在する：

$T_K \equiv T + K$ とおいたとき，

$$T_K \mathcal{D}(T_K) \subset \mathcal{D}(T_K) \text{ だが}$$

$$T_K^* \mathcal{D}(T_K^*) \not\subset \mathcal{D}(T_K^*).$$

<u>証明</u>. T は unbounded より $\mathcal{D}(T) \neq \mathcal{D}(T^*)$ ($\because$ 系2の(2))。ゆえに $\exists\, \xi \in \mathcal{D}(T)$ but $\xi \notin \mathcal{D}(T^*)$

そこで K として

$$K \equiv e_\xi$$

とおく。この K が求めるものであることを以下示せば良い。

$\xi \in \mathcal{D}(T)$ より $T_K = T + K$ が $\mathcal{D}(T_K) = \mathcal{D}(T)$ を不変にしていることは明らかである。

又 $T_K^* = T^* + e_\xi$ より，もしも T_K^* が $\mathcal{D}(T_K^*) = \mathcal{D}(T^*)$ を不変にするならば，$\xi \notin \mathcal{D}(T^*)$ に矛盾する。

References

1. G. Lassner, Topological algebras of operators, Rep. Math. Phys. 3 (1972), 279–293.

2. S. Ôta, Closed derivations in C^*-algebras, Math. Ann. 257 (1981), 239–250.

3. ———, Unbounded closed linear operators with domain containing their range, Proc. Edinburg Math. Soc. 27 (1984), 229–233.

4. ———, Unbounded representations of a $*$-algebra on indefinite metric space. preprint (1985).

5. M.H. Stone, Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 15, Providence, R.I. (1932).