

$O(1, \delta+1)$ 上の wave form について.

東工大・理 高瀬幸一 (Koichi Takase)

本講では、符号数 $(1, \delta+1)$ の 2 次形式の直交群上の wave form を定義して、それに附随する 2 種類の Dirichlet series の解析接続と関数方程式について考察する。Mellin 変換と Rankin-Selberg method により 2 種類の Dirichlet series が与えられるが、後者は前者の部分和に相当する。最後の § 2 では、 $\delta=2$ の場合に、虚 2 次体上の $GL(2)$ 上の automorphic form との関連で考察する。

§1. 記号.

1. 符号数 $(1, \delta+1)$ ($\delta > 0$) の正対称行列 $S \in \text{Mat}(\delta+2, \mathbb{Q})$ を取り、
 $S = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & S_0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ ($S_0 \in \text{Mat}(\delta, \mathbb{Q})$ s.t. ${}^t S_0 = S_0 > 0$) であるとする。 \tilde{G} は \mathbb{Q} 上定義された reductive 代数群で、 \mathbb{Q} -rational points は、

$$\tilde{G}_{\mathbb{Q}} = \{ g \in GL(\delta+2, \mathbb{Q}) \mid {}^t g \cdot S \cdot g = \nu(g) \cdot S \text{ for } \nu(g) \in \mathbb{Q}^* \}$$

とする。 \tilde{G} の元 g は、 $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{pmatrix} \begin{matrix} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ 1 \end{matrix}$ とブロック分けして表わす。

\tilde{G} の semi-simple part は、 $G = \{ g \in \tilde{G} \mid \nu(g) = 1 \}$ である。

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \right\}$$

は、 \mathbb{Q} 上定義された G の minimal parabolic subgroup である。 P は、分解 $P = N \cdot A \cdot M$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P \right\}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P \right\}, \quad M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P \right\}$$

と τ . \mathbb{Q} 上の同型 $n: \mathbb{Q}^3 \xrightarrow{\sim} N_{\mathbb{Q}}$ が

$$n(x) = \begin{pmatrix} 1 - {}^t x \cdot S_0 & -\frac{1}{2} {}^t x \cdot S_0 \cdot x \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により定義される。 \tilde{G}_0 は、 \mathbb{Q} 上定義された、連結 reductive 代数群 \tilde{G} の \mathbb{Q} -rational points は、

$$\tilde{G}_{0, \mathbb{Q}} = \left\{ e \in GL(3, \mathbb{Q}) \mid \begin{array}{l} {}^t e \cdot S_0 \cdot e = \nu(e) \cdot S_0 \text{ for } \nu(e) \in \mathbb{Q}^* \\ \det e = \nu(e)^{1/2} \text{ if } 3 \text{ is even} \end{array} \right\}$$

と τ . 代数群 $\tilde{G}, G, P, \text{ etc.}$ の \mathbb{Q} 上の adèlicization $\tilde{G}_A, G_A, P_A, \text{ etc.}$ と τ .

2. $L_0 \subset \mathbb{Q}^3$ は、 S_0 に関する maximal integral \mathbb{Z} -lattice (i.e. $\frac{1}{2} {}^t x \cdot S_0 \cdot x \in \mathbb{Z}$ for $\forall x \in L_0$ となる最大の \mathbb{Z} -lattice) と τ .

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3+2} \mid x, z \in \mathbb{Z}, y \in L_0 \right\}$$

は、 S に関する maximal integral \mathbb{Z} -lattice L である。 \mathbb{Q} の finite place p に対して、

$$\tilde{K}_p = \left\{ g \in \tilde{G}_p \mid g(L_p) = L_p \right\} \quad (L_p = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$$

とおく, $\tilde{K}_f = \prod_{p < \infty} \tilde{K}_p$ は, \tilde{G}_A の finite part \tilde{G}_f の open compact subgroup
となる. \tilde{G}_∞ の maximal compact subgroup \tilde{K}_∞

$$\tilde{K}_\infty = \left\{ g \in \tilde{G}_\infty \mid {}^c g \begin{pmatrix} 1 & & \\ & S_0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & S_0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

とすると, $\tilde{K} = \tilde{K}_\infty \times \tilde{K}_f$ は \tilde{G}_A の compact subgroup である. $K = \tilde{K} \cap G_A$ とおく.

\mathbb{Q} の finite place p に対して,

$$\tilde{U}_p = \left\{ e \in \tilde{G}_{0,p} \mid e(L_{0,p}) = L_{0,p} \right\} \quad (L_{0,p} = L_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$$

とおく, $\tilde{U}_f = \prod_{p < \infty} \tilde{U}_p$ は $\tilde{G}_{0,A}$ の finite part $\tilde{G}_{0,f}$ の open compact sub-
group となる.

§2. wave forms.

3. 実 Lie 群 G_∞ の Lie 環 \mathfrak{g} とし, $D = 2 \cdot (\mathfrak{g}-1) \times$ Casimir element for
 $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ とおく, D は G_∞ 上の両側不変微分作用素である. D の
作用は次の様に表わされる; G_∞ 上の右 \tilde{K}_∞ -不変 C^∞ -関数 φ に対し
と,

$$F(x, y) = \varphi \left(n(x) \cdot \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} \right) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^g, 0 < y \in \mathbb{R}$$

とおく,

$$D \cdot F = \left\{ y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (\mathfrak{g}-1) y \frac{\partial}{\partial y} + 2y^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_g} \right) \cdot S_0^{-1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_g} \right) \right\} F$$

となる ($\mathfrak{g} = n(x) \cdot \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} \cdot k \in G_\infty$ ($k \in \tilde{K}_\infty$) は G_∞ の右決分解を与える).

\mathbb{R}^x の連続 unitary character ω_∞ , $p \in \mathbb{C}$, 及び $u \in \mathbb{R}^g$ に対し, 実解析

的関数 $W: \tilde{G}_\infty \rightarrow \mathbb{C}$ で、条件

$$1) W(z \cdot w(x) \cdot j \cdot k) = w_\infty(z) \cdot \Lambda_\infty(\tau u \cdot S_0 \cdot x) \cdot W(y) \quad \text{for } \forall z \in \mathbb{R}^x, \forall x \in \mathbb{R}^{\frac{x}{2}}, \forall k \in \tilde{K}_\infty$$

(但し, $\Lambda_\infty(r) = \exp(-2\pi F \cdot r)$ for $r \in \mathbb{R}$)

$$2) D \cdot W = \left\{ p^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \right\} \cdot W$$

$$3) \left| W \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} \right| \leq C \cdot \text{Max} \{ y^r, y^{-r} \} \quad \text{for } \forall y \in \mathbb{R}, y > 0 \quad (\text{但し, } C > 0, r \geq 0 \text{ は } y \text{ に よ る 定数})$$

を満す W の成す \mathbb{C} -vector space を $W(w_\infty, p, u)$ とすると、次の lemma が成り立つ。

Lemma 1. 1) $u \neq 0$ のとき, $\dim_{\mathbb{C}} W(w_\infty, p, u) = 1$ である

$$W_{p,u} \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} = K_p \left(4\pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \tau u \cdot S_0 \cdot u\right)^{\frac{1}{2}} \cdot |y| \right) \cdot \left| 4\pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \tau u \cdot S_0 \cdot u\right)^{\frac{1}{2}} \cdot y \right|^{\frac{x}{2}} \quad (y \in \mathbb{R}^x)$$

なる \mathbb{C} -base $W_{p,u} \in W(w_\infty, p, u)$ である。 $z = z''$

$$K_p(x) = \int_0^\infty \cosh(pt) \cdot \exp(-x \cdot \cosh t) dt \quad (x > 0)$$

は modified Bessel 関数である。

2) $u = 0$ のとき, $\dim_{\mathbb{C}} W(w_\infty, p, u) = 2$ である

$$W_p^{(1)} \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} = |y|^{\frac{x}{2} + p}, \quad W_p^{(2)} \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} = \begin{cases} |y|^{\frac{x}{2} - p} & : \text{if } p \neq 0 \\ |y|^{\frac{x}{2}} \cdot \log |y| & : \text{if } p = 0 \end{cases}$$

なる \mathbb{C} -base $\{W_p^{(1)}, W_p^{(2)}\} \subset W(w_\infty, p, u)$ である。

4. idèle class group $\mathbb{Q}_A^*/\mathbb{Q}^*$ の連続 unitary character ω , & $\forall \rho \in \mathbb{C}$ に対し,

Φ が \tilde{G}_A 上の wave form of type (ω, ρ) であるとは,

1) Φ は \tilde{G}_A 上の複素数値連続関数であり, \tilde{G}_A の infinite part に関して

それは, 実解析的である,

2) $\Phi(x \cdot y \cdot z \cdot k) = \omega(x) \cdot \Phi(y)$ for $\forall x \in \mathbb{Q}_A^*, \forall y \in \tilde{G}_\mathbb{Q}, \forall k \in \tilde{K}$,

3) $D \cdot \Phi = \left\{ \rho^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \right\} \cdot \Phi$,

4) slowly increasing,

を満すことである。 \tilde{G}_A 上の wave form of type (ω, ρ) の成す \mathbb{C} -vector space を $A(\omega, \rho)$ とする。 $\dim_{\mathbb{C}} A(\omega, \rho) < \infty$ である。

$\forall \Phi \in A(\omega, \rho)$ は Fourier 展開

$$\Phi(\pi(x) \cdot y) = \sum_{u \in \mathbb{Q}^*} \Phi_u(y) \cdot \Lambda(\pi u \cdot S \cdot x)$$

である。 $\pi = \pi'$, Λ は \mathbb{Q}_A/\mathbb{Q} の連続 unitary character で $\Lambda_\infty(x) =$

$= \exp(-2\pi i x)$ なるものである。 \tilde{G}_A の infinite part 上の関数として

Φ_u は $W(\omega_\infty, \rho, u)$ の元であつて (ω_∞ は ω の infinite part), Lemma 1

より,

$$\Phi_u(y) = c_u(\Phi, y) \cdot W_{\rho, u}(y_\infty) \quad (u \neq 0)$$

とおく。 $\pi, e \in \tilde{G}_{0, A}, y \in \mathbb{Q}_A^*$ に対して,

$$\Phi_0 \left(\begin{pmatrix} \nu(e) \cdot y & & & \\ & e & & \\ & & y^{-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right) = a(\Phi, e) \cdot W_\rho^{(1)} \left(\begin{pmatrix} |y|_A & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & |y|_A^{-1} \end{pmatrix} \right) + b(\Phi, e) \cdot W_\rho^{(2)} \left(\begin{pmatrix} |y|_A & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & |y|_A^{-1} \end{pmatrix} \right)$$

とおく ($|y|_A$ は, idèle y の絶対値)。

$S(w, \rho) = \{ \Phi \in A(w, \rho) \mid \Phi_0(g) = 0 \text{ for } \forall g \in \tilde{G}_A \}$ は, cuspidal wave forms の成る \mathbb{C} -vector space である。

$A(w, \rho) \neq 0$ となるのは, $w = 1 \cdot |A|^\sigma$ ($\sigma \in \sqrt{-1} \cdot \mathbb{R}$) の場合に限りこれに注意する。

wave form の Fourier 係数に際して, 次の lemma が成り立つ。

Lemma 2 wave form $\Phi \in A(w, \rho)$ と, $e \in \tilde{G}_{0,f}$, $a \in \mathbb{Q}_f^*$, $0 \neq u \in \mathbb{Q}^2$ に對して,

$$C_u(\Phi, \begin{pmatrix} \nu(e) \cdot a & \\ & e \\ & & a^{-1} \end{pmatrix}) \neq 0$$

となるのは, $u \in \mathbb{Q}^2 \cap (a \cdot \nu(e))^{-1} \cdot e \cdot \prod_{p < \infty} \hat{L}_{0,p}$ の場合に限り。ここで

$$\hat{L}_{0,p} = \{ y \in \mathbb{Q}_p^2 \mid {}^t y \cdot S_0 \cdot x \in \mathbb{Z}_p \text{ for } \forall x \in L_{0,p} \} \quad (p < \infty)$$

は, S_0 に對して $L_{0,p}$ の dual lattice である。

§3. Mellin 変換.

5. $w = 1 \cdot |A|^\sigma$ ($\sigma \in \sqrt{-1} \cdot \mathbb{R}$), と $\rho \in \mathbb{C}$ を取る。wave form $\Phi \in A(w, \rho)$ と連続関数 $\Psi: \tilde{G}_{0,\mathbb{Q}} \setminus \tilde{G}_{0,f} / \tilde{U}_f \rightarrow \mathbb{C}$ に對して,

$$\begin{aligned} Z(s; \Phi, \Psi) &= 2^{\frac{s}{2}-1} \cdot (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(s + \frac{s}{2} + \rho\right)\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(s + \frac{s}{2} - \rho\right)\right) \times \\ &\times \sum_{0 \neq u \in \mathbb{Q}^2} \sum_e C_u(\Phi, \begin{pmatrix} \nu(e) & \\ & e \\ & & 1 \end{pmatrix}) \cdot \rho(e) \cdot |\nu(e)|^{\frac{1}{2}(s-\sigma)} \cdot \left(\frac{1}{2} {}^t u \cdot S_0 \cdot u\right)^{-\frac{s}{2}} \end{aligned}$$

とおく。ここで、 \sum_e は $\tilde{G}_{0,0} \setminus \tilde{G}_{0,f} / \tilde{U}_f$ の完全代表系上の和 ($\tilde{G}_{0,0} \setminus \tilde{G}_{0,f} / \tilde{U}_f$ は有限集合)、又 $1 \cdot 1_f$ は $1 \cdot 1_A$ の finite part である。Lemma 2 により、 $Z(s; \underline{\alpha}, \varphi)$ は Dirichlet series となり、 $\underline{\alpha}$ の増大条件より、 $Z(s; \underline{\alpha}, \varphi)$ は、 $\text{Re } s \gg 0$ で絶対収束する。一方 $\check{\alpha}(g) = \underline{\alpha}(g) \cdot w(v(g))^{-1}$ とおくと、 $\check{\alpha} \in A(w^{-1}, \rho)$ である。このとき、次の定理が成り立つ。

Theorem 1 Dirichlet series $Z(s; \underline{\alpha}, \varphi)$ は全 s -平面に有理的に解析接続され、関数等式 $Z(s; \underline{\alpha}, \varphi) = Z(-s; \check{\alpha}, \check{\varphi})$ を満たす。ここで $\check{\varphi}(e) = \varphi(v(e)^{-1} \cdot e)$ とおく。更に、

$$Z(s; \underline{\alpha}, \varphi) + a(\underline{\alpha}, \rho) \cdot (s + \frac{\rho}{2} + \rho)^{-1} + b(\underline{\alpha}, \rho) \times \begin{cases} (s + \frac{\rho}{2} - \rho)^{-1} & : \text{if } \rho \neq 0 \\ -(s + \frac{\rho}{2})^{-2} & : \text{if } \rho = 0 \end{cases} \\ - a(\check{\alpha}, \check{\rho}) \cdot (s - \frac{\check{\rho}}{2} - \rho)^{-1} - b(\check{\alpha}, \check{\rho}) \times \begin{cases} (s - \frac{\check{\rho}}{2} + \rho)^{-1} & : \text{if } \rho \neq 0 \\ (s - \frac{\check{\rho}}{2})^{-2} & : \text{if } \rho = 0 \end{cases}$$

は、 s の entire function である。ここで

$$a(\underline{\alpha}, \rho) = \sum_e a(\underline{\alpha}, e) \cdot \varphi(e), \quad b(\underline{\alpha}, \rho) = \sum_e b(\underline{\alpha}, e) \cdot \varphi(e)$$

とおく (\sum_e は、 $\tilde{G}_{0,0} \setminus \tilde{G}_{0,f} / \tilde{U}_f$ の完全代表系上の和)。

Remark φ とし、 $\tilde{G}_{0,f}$ における $\tilde{G}_{0,0} \tilde{U}_f$ の characteristic function を取

ると、Theorem 1 は、Dirichlet series

$$\sum_{0 \neq u \in \mathbb{Q}^{\times}} \zeta_u(\underline{\alpha}, 1) \cdot (\frac{1}{2} \cdot \tau_u \cdot S_0 \cdot u)^{-\frac{s}{2}} \quad (\text{Re } s \gg 0)$$

の解析接続, 関数等式, & ν , possible poles を与える. 上の Dirichlet series は Maass [2] により考察された.

§4. Rankin-Selberg method.

6. この ξ を通して, $S_0 = \left(\begin{array}{c|c} S'_0 & 0 \\ \hline 0 & S''_0 \end{array} \right)_{\substack{m \\ g-m}}$ ($0 < m < g$) と仮定し, 更に \mathbb{Z} -lattice $L'_0 \subset \mathbb{Q}^m$, $L''_0 \subset \mathbb{Q}^{g-m}$ があつて,

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^g \mid x \in L'_0, y \in L''_0 \right\}$$

となる (i.e. L_0 は orthogonal splitting $L_0 = L'_0 \oplus L''_0$ をもつ) と仮定する.

$S' = \left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline S'_0 & \end{array} \right)$ により, ξ と同様, 代数群 G', P', N', A', M' を定義する. G' は, 写像

$$\left(\begin{array}{c|c|c} a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline h & i & j \end{array} \right)_{\substack{1 \\ m \\ 1}} \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c|c} a & b & 0 & c \\ \hline d & e & 0 & f \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline h & i & 0 & j \end{array} \right)_{\substack{1 \\ m \\ g-m \\ 1}}$$

により, G の部分代数群と同一視する.

$$L' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{m+2} \mid x, z \in \mathbb{Z}, y \in L'_0 \right\}$$

として, L' により, ξ と同様, G'_A の compact subgroup K' を定義する. 上の同一視により $K' \subset K$ となる.

7. L' が S' により maximal integral \mathbb{Z} -lattice であることから,

$$G'_A = P'_A \cdot K' \text{ となるから, } s \in \mathbb{C} \text{ と } g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} \cdot k \in G'_A \text{ (} k \in K' \text{) により,}$$

$$\theta(g, s) = |a|_A^s$$

とおく. $M'_Q \cdot A'_A \cdot N'_A \backslash G'_A / K'$ 上の複素数値連続関数 ψ を取る

($M'_Q \cdot A'_A \cdot N'_A \backslash G'_A / K'$ 上の連続関数は, $\psi \longmapsto \psi|_{M'_A}$ により), $M'_Q \backslash M'_A / (M'_A \cap K')$

上の連続関数 ψ に対して対応する)。 G' の parabolic subgroup P' と ψ に附随する Eisenstein series は、

$$E(\psi; s, g) = \sum_{\gamma \in P'_0 \backslash G'_0} \psi(\gamma g) \cdot \theta(\gamma g, s + \frac{m}{2}) \quad (s \in \mathbb{C}, g \in G'_A)$$

により定義される。 $E(\psi; s, g)$ は $\text{Re } s > \frac{m}{2}$ で絶対収束し、全 s -平面に解析接続して、 s に関して関数方程式を満す (cf. Arthur [1])。

特に $m=1$ のときは、 $M' = \{\pm 1\}$ で、 $E(1; s, g)$ の関数方程式は、

$$E(1; s, g) = \text{vol}(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})^{-1} \cdot \sqrt{2/S'_0} \cdot \frac{Z(2s)}{Z(2s+1)} \cdot E(1; -s, g)$$

となる。ここで $Z(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \zeta(s)$ である。

8. 連続関数 $\psi: M'_0 A'_A N'_A \backslash G'_A / K' \rightarrow \mathbb{C}$ と wave form $\psi \in A(w, P)$,
及 $w \neq 0 \neq u \in \mathbb{Q}^{\delta-m}$ に対して、

$$c_{u, \psi}(\psi) = \sum_h c_{\binom{0}{u}}(\psi, h) \cdot \psi(h)$$

とおく。ここで、 \sum_h は $M'_0 \backslash M'_f / (M'_f \cap K')$ の完全代表系上の和である
(M'_f は M'_A の finite part, 又 $M'_0 \backslash M'_f / (M'_f \cap K')$ は有限集合である)。

このとき、次の定理が成り立つ。

Theorem 2. 連続関数 $\psi: M'_0 A'_A N'_A \backslash G'_A / K' \rightarrow \mathbb{C}$ と cuspidal wave form

$\psi \in S(w, P)$ に対して、次の Rankin-Selberg type の等式を得る;

$$\int_{G'_A \backslash G'_A} \Phi(g) \cdot E(\psi; s - \frac{m}{2}, g) dg \quad (\operatorname{Re} s \gg 0)$$

$$= 2^{\frac{b}{2}-1} \cdot (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(s + \frac{b}{2} + p)) \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(s + \frac{b}{2} - p)) \times \sum_{0 \neq u \in \mathbb{Q}^{b-m}} c_{u, \psi}(\Phi) \cdot (\frac{1}{2} \cdot u \cdot S_0 \cdot u)^{-\frac{s}{2}}.$$

特に, Dirichlet series $\sum_{0 \neq u \in \mathbb{Q}^{b-m}} c_{u, \psi}(\Phi) \cdot (\frac{1}{2} \cdot u \cdot S_0 \cdot u)^{-\frac{s}{2}}$ は全 s -平面に有理形に解析接続される。

連続関数 $\psi: M_Q \cdot A'_A \cdot N'_A \backslash G'_A / K' \rightarrow \mathbb{C}$ とし, $\psi|_{M'_f}$ が $M'_f \cdot (M'_f \cap K')$ の characteristic function とするものを取れば, Theorem 2 から, 次の corollary を得る。

Corollary 1. 任意の cuspidal newform $\Phi \in S(w, p)$ に対し, Dirichlet series $\sum_{0 \neq u \in \mathbb{Q}^{b-m}} c_{(u)}^{(0)}(\Phi, 1) \cdot (\frac{1}{2} \cdot u \cdot S_0 \cdot u)^{-\frac{s}{2}}$ ($\operatorname{Re} s \gg 0$) は, 全 s -平面に, 有理形に解析接続される。

$m=1$ のときは, $E(1; s, g)$ の関数等式と Theorem 2 から, 次の corollary を得る。

Corollary 2. $m=1$ とする。cuspidal newform $\Phi \in S(w, p)$ に対し,

$$\tilde{Z}(s, \Phi) = 2^{-s} \cdot \pi^{-2s} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(s + \frac{b}{2} + p)) \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(s + \frac{b}{2} - p)) \times$$

$$\times \zeta(2s) \cdot \sum_{0 \neq u \in \mathbb{Q}^{b-1}} c_{(u)}^{(0)}(\Phi, 1) \cdot (\frac{1}{2} \cdot u \cdot S_0 \cdot u)^{-\frac{s}{2}} \quad (\operatorname{Re} s \gg 0)$$

は, 全 s -平面 に有理形 に解析接続し, 関数等式

$$\zeta(1-s, \mathfrak{K}) = \text{vol}(\mathbb{R}^n L_0) \cdot \sqrt{S_0/2} \cdot \zeta(s, \mathfrak{K})$$

が満す。

§5. $g=2$ の場合.

9. 虚 2 次体 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ($m \in \mathbb{Z}$: square-free) を取り, その整数環 \mathcal{O}_F とする. F/\mathbb{Q} の norm を $N_{F/\mathbb{Q}}$ と書くと, $(F, N_{F/\mathbb{Q}})$ は, quadratic space over \mathbb{Q} で正定値であり, \mathcal{O}_F は $N_{F/\mathbb{Q}}$ に関して, maximal integral \mathbb{Z} -lattice となる. F の \mathbb{Q} -base $\{1, \sqrt{m}\}$ により, 2 次形式 $N_{F/\mathbb{Q}}$ は行列表現 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. $\{1, \sqrt{m}\}$ により $F = \mathbb{Q}^2$ とし, $S_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2m \end{pmatrix}$, $L_0 = \mathcal{O}_F \hookrightarrow \mathbb{Q}^2$ とおく. $V = \{X \in \text{Mat}(2, F) \mid \text{tr} X = \bar{X}\}$ とおくと, $(V, -\det)$ は quadratic space over \mathbb{Q} で, 符号数は $(1, 3)$ である.

V の \mathbb{Q} -base

$$\{e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{m} \\ -\sqrt{m} & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$$

に関して, 2 次形式 $-\det$ は行列表現 $S = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & S_0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ により $V = \mathbb{Q}^4$ とすると, $L = V \cap \text{Mat}(2, \mathcal{O}_F)$ は,

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \mid x, z \in \mathbb{Z}, y \in L_0 \right\}$$

となる. $(V, -\det)$ の similitude の \mathbb{Q} 上直交群

$$GO_{\mathbb{Q}}(V, -\det) = \{\varphi \in GL_{\mathbb{Q}}(V) \mid \det \circ \varphi = \nu(\varphi) \cdot \det \text{ for } \nu(\varphi) \in \mathbb{Q}^{\times}\}$$

$\varepsilon \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ に關して行列表現すると, $GO_{\mathbb{Q}}(V, -det) = \tilde{G}_{\mathbb{Q}}$ となる.

\mathcal{G} を \mathbb{Q} 上定義された代数群で, \mathbb{Q} -rational points は, $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}} = GL(2, F)$

なるものとする. $\pi: \mathcal{G} \rightarrow \tilde{G}$ を \mathbb{Q} 上定義された準同型写像で,

$$\pi_{\mathbb{Q}}(g) \cdot X = g \cdot X \cdot g^{-1} \quad \text{for } g \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}, X \in V$$

なるものとする. π は, adelicization $\pi_A: \mathcal{G}_A \rightarrow \tilde{G}_A$ に延長される.

$$F^* \ni x + y\sqrt{m} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} x & my \\ y & x \end{pmatrix} \in \tilde{G}_{0, \mathbb{Q}} \quad (x, y \in \mathbb{Q})$$

なる \mathbb{Q} 上の同型に注意する.

10. wave form $\tilde{\Phi} \in A(w, \rho)$ に對して, $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_0 \cdot \pi_A$ は, automorphic form on $GL(2)$ over F となり (c.f. Weil [4]), Fourier 展開

$$\tilde{\Phi} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{\Phi}_0 \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{t \in F^*} c(\tilde{\Phi}, t \cdot \text{dir } y) \cdot W \begin{pmatrix} t \cdot y_{\infty} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (y \in F_A^*)$$

である. ここで $\text{dir } y$ は $y \in F_A^*$ に對する F の ideal, y_{∞} は $y \in F_A^*$ の infinite part, 又 W は $GL(2, \mathbb{C})$ 上の複素数値実解析的関数で

$$W \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} = K_{\rho}(4\pi \cdot y) \cdot (4\pi \cdot y) \quad (0 < y \in \mathbb{R})$$

なるものである (K_{ρ} は modified Bessel 関数). 更に

$$c(\tilde{\Phi}, \text{dir } y) = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (\tilde{\Phi}, \pi_y \begin{pmatrix} y_f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \quad (y \in F_A^*)$$

となる. ここで, y_f (resp. π_y) は $y \in F_A^*$ (resp. π_A) の finite part

である. このとき,

$$\int_{F_A^*/F^*} (\tilde{\chi} - \tilde{\chi}_0) \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot |y|_A^s d^*y$$

$$= (2\pi)^{1-2s-\sigma} \cdot \Gamma(s + \frac{\sigma}{2} + \frac{1+p}{2}) \cdot \Gamma(s + \frac{\sigma}{2} + \frac{1-p}{2}) \times \sum_{\mathfrak{a} \subset F} c(\tilde{\chi}, \mathfrak{a}) \cdot N(\mathfrak{a})^{-s}$$

($N(\mathfrak{a})$ は, F の ideal \mathfrak{a} の 絶対 norm) は, $\tilde{\chi}$ に 附随し F standard L-function である。一方

$$\int_{F_A^*/F^*} (\tilde{\chi} - \tilde{\chi}_0) \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot |y|_A^s d^*y = \int_{F_A^*} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (\pi_A \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \cdot |y|_A^s d^*y$$

$$= \frac{2\pi}{|V_F|} \cdot Z(2s+\sigma; \tilde{\chi}, 1) \quad (V_F = F \text{ の 単数群})$$

である。よって, $Z(2s+\sigma; \tilde{\chi}, 1)$ は $\tilde{\chi}$ の standard L-function に 対応する。

11. $m \equiv 2, 3 \pmod{4}$ とする。 $L_0 = \mathbb{Z} \oplus \sqrt{m}\mathbb{Z}$ なる orthogonal splitting を 生ずるので, $L'_0 = \sqrt{m}\mathbb{Z}$, $L''_0 = \mathbb{Z}$ とし, §4 の 議論を適用する。

$$\sum_{0 < u \in \mathbb{Q}} c_{(u)}(\tilde{\chi}, 1) \cdot u^{-s} = \sum_{0 < t \in \mathbb{Q}} c(\tilde{\chi}, (t)) \cdot t^{-s}$$

となるが ($(t) = t \cdot \mathcal{O}_F$ は, F の principal ideal),

$$\int_{\mathbb{Q}_A^*} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} \cdot |y|_A^s d^*y$$

$$= (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(s+1+p)) \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(s+1-p)) \times \sum_{0 < u \in \mathbb{Q}} c_{(u)}(\tilde{\chi}, 1) \cdot u^{-s}$$

であるから, Φ が \mathfrak{H} の Hecke operator の eigen function であるならば, Dirichlet series $\sum_{0 < u \in \mathbb{Q}} c_{\left(\begin{smallmatrix} u \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) \cdot u^{-s}$ は Euler 積をもち (c.f. Sugano [3, §3]), これは, Langlands の意味で, Φ に附随する standard L-function となる。よって,

$$\sum_{0 < t \in \mathbb{Q}} c(\tilde{\mathfrak{E}}, (t)) \cdot t^{-s}$$

は, Φ の standard L-function に対応する。

References.

- [1] Arthur, J.: Eisenstein series and the trace formula.
Proc. Sympos. Pure Math. vol 33. Part I, Amer. Math. Soc.
Providence R.I. (1979) 253-274.
- [2] Maass, H.: Automorphe Funktionen von mehreren Veränderlichen
und Dirichletsche Reihen.
Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 16 (1949) 72-100.
- [3] Sugano, T.: On Dirichlet series attached to holomorphic cusp
forms on $SO(2, q)$. (to appear)
- [4] Weil, A.: Dirichlet series and automorphic forms.
Lecture Notes in Math. 189. (1971) Springer-Verlag.