数理解析研究所講究録
第583巻 1986年 161-166

Jacobi 形式 と Maaß relation

九大理学部　山﨑　正　(Tadashi Yamazaki)

2次の重さkの Siegel Eisenstein 級数 $E_k^{(2)}(\tau)$ を Fourier 展開

$$E_k^{(2)}(\tau) = \sum_{T \geq 0} a(T)\, e^{2\pi i\, \mathrm{Tr}(T\tau)}$$

したとき、その係数 $a(T)$ が、いわゆる Maaß の関係

$$a\begin{pmatrix} n & \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t & m \end{pmatrix} = \sum_{d \mid (n,m,t)} d^{k-1}\, a\begin{pmatrix} 1 & t/2d \\ t/2d & nm/d^2 \end{pmatrix}$$

を満すことが知られている。([Ma]) ここでは、Jacobi 形式の言葉で書くと、これが一般の次数の Siegel Eisenstein 級数に拡張されることを示す。証明については [Y] を見よ。

<u>記号</u> n は自然数とする。1_n を n 次単位行列、0 を零行列とし、$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$ で標準的な交代行列を表わし、J_n の Similitude の群を

$$\mathcal{S}_n = \{ M \in M_{2n}(\mathbb{R})\ ;\ {}^tM J_n M = \nu J_n,\ \ {}^\exists\nu \in \mathbb{R},\ \nu > 0 \}$$

とする。$M \in \mathcal{S}_n$, ${}^tM J_n M = \nu J_n$ のとき $\nu = \nu(M)$ と書く。

Siegel Modular 群を $\Gamma_n = Sp(n, \mathbb{Z})$ と書く。n 次 Siegel 上半平面 $H_n = \{ \tau \in M_n(\mathbb{C})\ ;\ \tau = {}^t\tau,\ \mathrm{Im}\,\tau > 0 \}$ への $\mathcal{S}_n$ の作用を

$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in S_n$, $\tau\in H_n$ に対し、 $M\tau=(a\tau+b)(c\tau+d)^{-1}$ で定める。

自然数 m に対し $\mathbb{e}^m(x)=e^{2\pi i x}$ とし $\mathbb{e}^1=\mathbb{e}$ と書く。

以下 τ は H_n の変数、 z は $\mathbb{C}^n$ の変数を表わすものとする。

§1 Jacobi 形式

集合としての直積 $S_n^J=S_n\times\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}$ を考え、

$g_i=[M_i, X_i, \kappa_i]\in S_n^J$ $(i=1,2)$ に対し、積 $g_1 g_2$ を

$$g_1 g_2=[M_1M_2,\ \tfrac{1}{\nu}X_1M_2+X_2,\ \tfrac{1}{\nu}\kappa_1+\kappa_2+\tfrac{1}{\nu}X_1M_2J\,{}^tX_2],\qquad \nu=\nu(M_2)$$

で定義する。これにより S_n^J は群になる。またこの演算を、$\Gamma_n^J=\Gamma_n\times\mathbb{Z}^{2n}\times\mathbb{Z}$ に制限して部分群を得る。

正整数 k, m を固定する。$H_n\times\mathbb{C}^n$ 上の関数 ϕ への S_n^J の作用を、$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in S_n$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}^n$, $\kappa\in\mathbb{R}$ に対し

$$\phi|_{k,m}[M,0,0](\tau,z)=\det(c\tau+d)^{-k}\,\mathbb{e}^{m\nu(M)}(-z(c\tau+d)^{-1}c\,{}^tz)\,\phi(M\tau,\nu(M)z(c\tau+d)^{-1})$$

$$\phi|_{k,m}[1_{2n},(\lambda,\mu),\kappa](\tau,z)=\mathbb{e}^m(\kappa+\lambda\tau\,{}^t\lambda+2\lambda\,{}^tz+\lambda\,{}^t\mu)\,\phi(\tau,z+\lambda\tau+\mu)$$

で定義する。

<u>定義</u> $H_n\times\mathbb{C}^n$ 上の正則関数 ϕ が重さ k, index m の Jacobi 形式とは、次の条件が成立すること：

(i) $\phi|_{k,m}\,g=\phi$ for $\forall g\in\Gamma_n^J$

(ii) $n=1$ のときは "cusp" における正則性 ([E-Z]).

我々は $n>1$ のときのみを考えるから (ii) は問題にならない。Jacobi 形式の一般論や Adele を用いた Formulation は村瀬氏の論文 [Mu] を参照せよ。

§2 例

(1) Fourier-Jacobi 展開

$\tilde{\tau}=\begin{pmatrix}\tau & {}^tz\\ z & t\end{pmatrix}$ を H_{n+1} の一般の点とし、Γ_{n+1} に対する重さ k の保型形式 $\tilde{\Phi}(\tilde{\tau})$ を Fourier-Jacobi 展開する:

$$\tilde{\Phi}(\tilde{\tau}) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(\tau, z)\, e(mt).$$

このとき、

命題 1　$\phi_m(\tau, z)$ は重さ k, index m の Jacobi 形式である。

(2) Eisenstein 級数

Γ_n^J の部分群 $\Gamma_{n,0}^J=\{\gamma\in\Gamma_n^J\ ;\ 1|_{k,m}=1\}$ を考える。ここで 1 は定数値 1 を取る関数を表わす。k を偶数として、Jacobi Eisenstein 級数 $E_{k,m}$ を

$$E_{k,m} = \sum_{\gamma\in\Gamma_{n,0}^J\backslash\Gamma_n^J} 1|_{k,m}\gamma$$

で定義する。

命題 2　k は偶数で $k>n+1$ とする。このとき $E_{k,m}$ は $H_n\times\mathbb{C}^n$ の任意のコンパクト集合上絶対かつ一様収束し、重さ k, index m の Jacobi 形式を定める。

(3) (n+1) 次の重さ k の Siegel Eisenstein 級数 $E_k^{(n+1)}(\tilde{\tau})$ を Fourier-Jacobi 展開する：

$$E_k^{(n+1)}(\tilde{\tau}) = \sum_{m=0}^{\infty} e_{k,m}(\tau, z)\, \mathbf{e}(mt).$$

Fourier-Jacobi 係数 $e_{k,m}$ は Jacobi Eisenstein 級数を用いて書ける。

<u>定理</u> ([B]) k は偶数で $k > n+2$ とする。任意の $m > 0$ に対し

$$e_{k,m}(\tau, z) = \sum_{d^2|m} \sigma_{k-1}\left(\frac{m}{d^2}\right) \sum_{a|d} \mu(a)\, E_{k,\, ma^2/d^2}\left(\tau, \frac{d}{a} z\right).$$

ここで、$\sigma_\ell(d) = \sum_{a|d} a^\ell$, μ は Möbius 関数である。

§3 Hecke 作用素

S_n に含まれる整行列 M を取り、両側剰余類 $\Gamma_n M \Gamma_n$ を左剰余類に分割する：

$$\Gamma_n M \Gamma_n = \bigcup_i \Gamma_n M_i$$

ϕ を重さ k, index m の Jacobi 形式とし、$\Gamma_n M \Gamma_n$ の ϕ への作用を

$$\phi | \Gamma_n M \Gamma_n = \nu(M)^{nk - \frac{n(n+1)}{2}} \sum_i \phi|_{k,m} [M_i, 0, 0]$$

で定義する。明らかにこれは代表系 $\{M_i\}$ の取り方に依らない。

<u>命題</u> 3 ϕ を重さ k, index m の Jacobi 形式, $M \in S_n$ を整行列とする。このとき $\phi | \Gamma_n M \Gamma_n$ は重さ k, index $m\nu(M)$ の Jacobi 形式である。

以下では素数 p を固定する。Freitag に従って

$$T(p) = \Gamma_n \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & p1_n \end{pmatrix} \Gamma_n, \qquad T_{i,n-i}(p^2) = \Gamma_n \left(\begin{array}{cc|cc} 1_i & 0 & & \\ 0 & p1_{n-i} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & p^2 1_i & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & p1_{n-i} \end{array}\right) \Gamma_n$$

と置く。([F])

<u>命題</u> 4　ϕを重さk, index m の Jacobi 形式とする。このとき

$$(\phi | T_{0,n}(p^2))(\tau, z) = p^{nk - n(n+1)} \phi(\tau, pz).$$

Jacobi Eisenstein 級数に対しては、$T(p)$ の作用が具体的に計算出来る。

<u>定理</u> 5　pを素数とする。

(i)　$p \nmid m$ のとき

$$E_{k,m} | T(p) = \left\{ \prod_{i=1}^{n} (1 + p^{k-i}) \right\} E_{k,mp}$$

(ii)　$p | m$ のとき

$$E_{k,m} | T(p) = \left\{ \prod_{i=2}^{n} (1 + p^{k-i}) \right\} \left\{ E_{k,m/p}(\tau, pz) + p^{k-1} E_{k,mp}(\tau, z) \right\}$$

上の定理と Böcherer の結果を結びつけると、

<u>定理</u> 6　pは素数とする。

(i)　$p \nmid m$ のとき

$$e_{k,mp} = \left\{ \prod_{i=2}^{n} (1 + p^{k-i})^{-1} \right\} e_{k,m} | T(p)$$

(ii)　$p | m$ のとき

$$e_{k,mp} = \left\{ \prod_{i=2}^{n} (1 + p^{k-i})^{-1} \right\} e_{k,m} | T(p) - p^{-(n-1)k + n^2 + n - 1} e_{k,m/p} | T_{0,n}(p^2)$$

上の定理は次のようにもいえる。Γ_n の Hecke 環の similitude が m の元 $D_n(m)$ を形式的な等式

$$\sum_{m=0}^{\infty} D_n(m)\, m^{-s} = \prod_{p:\,\mathrm{prime}} \left\{ 1 - \prod_{i=2}^{n} (1+p^{k-i})^{-1}\, T(p)\, p^{-s} + T_{0,n}(p^2)\, p^{-(n-1)k+n^2+n-1-2s} \right\}^{-1}$$

で定義する。このとき、

定理 7 (Maaß relation)　任意の $m>0$ に対し

$$e_{k,m} = e_{k,1} \mid D_n(m)$$

が成立する。

注意　$n=1$ のとき上の Euler 積の p 因子は、

$$\left\{ 1 - T(p)\, p^{-s} + T_{0,1}(p^2)\, p^{1-2s} \right\}^{-1}$$

となり、これは $SL_2(\mathbb{Z})$ に対する標準的なものである。従って "$D_1(m) = T(m)$" となり、我々の定理7は、2次の Eisenstein 級数に対する Maaß relation に他ならない。([Ma])

文献

[B] S. Böcherer　Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen, Math. Z. 183 (1983) 21-46

[E-Z] M. Eichler - D. Zagier　Theory of Jacobi Forms, Progress in Math 55 (1985)

[F] E. Freitag　Siegelsche Modulfunktionen, Springer-Verlag (1983)

[Ma] H. Maaß　Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades Inv. Math 52 (1979) 95-104

[Mu] 村瀬 篤　この講究録

[Y] T. Yamazaki　On Jacobi forms of degree n, preprint