

T_j 空間 ($j=0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$) について

静岡大 教育 勝田雄吉 (Yûkiti Katuta)

1. 序

P を位相的性質としたとき, この性質をもつ位相空間を P 空間, その位相 (開集合の全体) を P 位相とよぶ. 任意の位相空間 X に対し, P 空間 $\rho(X)$ と連続写像 $\rho_X: X \rightarrow \rho(X)$ が対応し, 任意の P 空間 Y と任意の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し, 連続写像 $\hat{f}: \rho(X) \rightarrow Y$ で $\hat{f} \circ \rho_X = f$ をみたすものが一意的に存在するとき, ρ を P 関手とよぶことにする¹⁾.

P 関手が常に存在するとは限らないが, もし存在すれば, 同相を除いて一意的に定まる. $T_{3\frac{1}{2}}$ 関手の存在は知られている. また, $T_{3\frac{1}{2}}$ 関手と Stone-Čech コンパク化の合成はコンパクト T_2 関手である.

こゝでの主な目的は T_j 関手 ($j=0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$) を構成することである. その骨子は, まず [1] の中で導入されている S_j 空間 ($j=1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$) を用いて S_j 関手を構成する. ついで

T_0 関手を作り, この S_j 関手と T_0 関手の合成として, 残りの T_j 関手が得られる. [1] にならって, 以後 $T_{3\frac{1}{2}}, S_{3\frac{1}{2}}$ の代りに T_π, S_π を用いる.

2. S_j 関手 ($j=1, 2, 3, \pi$).

つぎの公理 $(S_1), (S_2)$ をみたす位相空間 X をそれぞれ S_1 空間, S_2 空間という.

(S_1) $x, y \in X$ で $x \neq \bar{y}$ ならば $y \neq \bar{x}$.

(S_2) $x, y \in X$ で $x \neq \bar{y}$ ならば x の近傍 U , y の近傍 V で $U \cap V = \emptyset$ であるものが存在する.

S_3, S_π はそれぞれ通常の regular, completely regular のことである. 以下, j は $1, 2, 3, \pi$ のうちのいずれかを表すものとする. T_j の場合と同じく, $S_\pi \Rightarrow S_3 \Rightarrow S_2 \Rightarrow S_1$. また, $T_j \Leftrightarrow S_j + T_0$.

定理 1. $\Omega = \{u_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は集合 X の上の幾つかの位相の集りとする. すべての u_λ が S_j 位相ならば, その上限の位相 $\sup \Omega$ ²⁾ も S_j 位相である.

さて, X を位相空間とし, その位相を u とする. X とその基礎集合を区別するために, しばらくの間, これを X^* で示す. すなわち, $X = (X^*, u)$.

$\Omega_j = \{v \mid v \text{ は } X^* \text{ の上の } S_j \text{ 位相で, } v \subset u\}$ ³⁾, $u_j = \sup \Omega_j$

とおく. 明かに $\mathcal{U} \supset \mathcal{U}_1 \supset \mathcal{U}_2 \supset \mathcal{U}_3 \supset \mathcal{U}_\pi$. 定理1により, \mathcal{U}_j は S_j 位相である. 特に \mathcal{U}_π は X の (すなわち \mathcal{U} に関する) すべてのコゼロ集合によって生成される位相である. また, \mathcal{U} 自身が S_j 位相ならば $\mathcal{U} = \mathcal{U}_j$. このように \mathcal{U}_j を定め, 位相空間 (X^*, \mathcal{U}_j) を $\sigma_j(X)$ で示そう. $\sigma_j X$ を X^* の恒等写像とすれば, $\mathcal{U} \supset \mathcal{U}_j$ だから, $\sigma_j X : X \rightarrow \sigma_j(X)$ は連続である.

定理2. σ_j は S_j 関手である.

3. T_j 関手 ($j = 0, 1, 2, 3, \pi$).

まず T_0 関手を作る. 位相空間 X において, その上の同値関係 \sim を $x \sim y \iff \bar{x} = \bar{y}$ で与える. \sim による商空間 X/\sim を $\tau_0(X)$ で表し, $\tau_0 X : X \rightarrow \tau_0(X)$ を商写像とする. この τ_0 は [5] の意味の T_0 -identification に他ならない.

定理3. τ_0 は T_0 関手である.

つぎに, 先に与えた S_j 関手 σ_j とこの T_0 関手 τ_0 の合成を τ_j とする. すなわち, 任意の位相空間 X に対し, $\tau_j(X) = \tau_0(\sigma_j(X))$, $\tau_j X = \tau_0 \circ \sigma_j X$ と定める.

定理4. τ_j は T_j 関手である.

なお, τ_0 に関しては, つぎの (1), (2), (3) が成り立つ.

(1) $i : A \rightarrow X$ が埋め込み (imbedding) ならば $\tau_0(i) : \tau_0(A)$

→ $\tau_0(X)$ も埋め込みである.

(2) $f: X \rightarrow Y$ が商写像ならば $\tau_0(f): \tau_0(X) \rightarrow \tau_0(Y)$ も商写像である.

(3) 位相空間の族 $\{X_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ に対し, $\tau_0(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) = \prod_{\lambda \in \Lambda} \tau_0(X_\lambda)$ ⁴⁾.

問題 1. τ_0 を τ_j または σ_j でおきかえたとき, 上の (1), (2), (3) は (どのような条件の下で) 成り立つか ⁵⁾.

τ_0 関手は別の方法でも作る事ができる. 2つの元 $0, 1$ から成る集合に $\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}$ を開集合とするような位相を入れた空間を E で表す. 明かに E は τ_0 空間である. 位相空間 X から E へのすべての連続写像の集合を $C(X)$ で表す. $C(X)$ 個の E の積空間 $\prod_{f \in C(X)} E_f$ ($E_f = E$) の部分空間 $\{(f(x))_{f \in C(X)} | x \in X\}$ を $\rho(X)$, $\rho_x: X \rightarrow \rho(X)$ を $\rho(x) = (f(x))_{f \in C(X)}$, $x \in X$, とすれば, この ρ は τ_0 関手になる. E を $I = [0, 1]$ でおきかえれば τ_π 関手が得られる ([3] 参照).

問題 2. 他の τ_j 関手や S_j 関手についてもこのような方法で構成することが出来るか. すなわち, E や I に相当する空間が存在するか.

注

1) 関手は functor の和訳である (岩波数学辞典第2版).
 実際, 任意の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し, 連続写像 $\rho(f) = (\sigma_Y \circ f)^\wedge: \rho(X) \rightarrow \rho(Y)$ が $\rho(f) \circ \rho_X = \rho_Y \circ f$ をみたすように一意的に存在する. したがって, この ρ は位相空間のカテゴリ-から P 空間の full 部分カテゴリ-への (coreflector とよばれる) 関手になっている. P が $T_{3\frac{1}{2}}$ (すなわち Tychonoff) の場合には, [3] では, これを Tychonoff functor とよんでいる. これにならって, かく命名した.

2) $\sup \Omega$ は $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$ によって生成される X の上の位相.

3) Ω_j は空ではない. 実際, X^* の上の最小の位相, すなわち ϕ と X^* のみを開集合とする位相はどの Ω_j にも属す.

4) $\tau_{0, X_\lambda}: X_\lambda \rightarrow \tau_0(X_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ の積を $\varphi: \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \tau_0(X_\lambda)$ で表す. 各 $\tau_0(X_\lambda)$ が T_0 空間だからその積空間 $\prod_{\lambda \in \Lambda} \tau_0(X_\lambda)$ も T_0 空間である. したがって, $\hat{\varphi}: \tau_0(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \tau_0(X_\lambda)$ が得られるが, この $\hat{\varphi}$ が同相写像のとき, $\tau_0(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) = \prod_{\lambda \in \Lambda} \tau_0(X_\lambda)$ とかく.

5) τ_π に関しては, 2つの位相空間 X, Y の積空間の場合でも, 無条件では $\tau_\pi(X \times Y) = \tau_\pi(X) \times \tau_\pi(Y)$ は成り立たない ([2], [4] 参照).

文献

- [1] Á Császár, *General topology*, Adam Hilger, Bristol 1978.
- [2] T. Ishii, *On the Tychonoff functor and w -compactness*, *Topology and its Applications* 11 (1980) 173-187.
- [3] K. Morita, *Čech cohomology and covering dimension for topological spaces*, *Fund. Math.* 87 (1975) 31-52.
- [4] S. Oka, *Tychonoff functor and product spaces*, *Proc. Japan Acad.* 54 (1978) 97-100.
- [5] S. Willard, *General topology*, Addison-Wesley, Reading 1970.