数理解析研究所講究録
第 584 巻 1986 年 46-51

g-metrizable space について

群馬大・教養　　小竹　義朗 (Yoshiro Kotake)

A. V. Arhangel'skiĭ は [A] で symmetric space の研究に関連して weak base の概念を導入した。ここで、symmetric space とは 空間 (X, d) が 次の (i) ～ (iii) をみたすことをいう。

(i) $d(x, y) \geqq 0$ ，等号が成立 $\rightleftarrows$ $x = y$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $X \supset A$: closed in X $\rightleftarrows$ ${}^{\forall}x \notin A$ に対し $d(x, A) > 0$

Symmetric space (X, d) において、

$U(n, x) = \{y \mid d(x, y) < \frac{1}{n}\}$

$\mathcal{B}_x = \{U(n, x) \mid n \in \mathbb{N}\}$　　とおくと、

$X \supset G$: open in X $\rightleftarrows$ ${}^{\forall}x \in G$ に対し ${}^{\exists}U(n, x) \in \mathcal{B}_x$, s.t. $U(n, x) \subset G$

となることがわかる。symmetric space においては、$U(n, x)$ は必ずしも x の nbd. とはならない。そこで Arhangel'skiĭ

は次の weak base の概念を導入した。

定義1. $\mathcal{B}_x$ を space X の部分集合の collection であって，次の条件をみたすものとする。

(i) $\forall B \in \mathcal{B}_x \longrightarrow x \in B$.

(ii) $\forall B, B' \in \mathcal{B}_x \longrightarrow B \cap B' \in \mathcal{B}_x$

(iii) $X \supset U$: open $\rightleftarrows$ $\forall x \in U$ に対し，$B \subset U$ となる $B \in \mathcal{B}_x$ が存在する。

このとき，$\mathcal{B}_x$ を weak neighborhood of x，$\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{B}_x \mid x \in X\}$ を X の weak base という。
特に，$|\mathcal{B}_x| \leq \aleph_0$ for $\forall x \in X$ とできるとき，X は weakly first countable（又は gf-axiom of countability をみたす）であるという。従って symmetric space は weakly first-countable であることがわかる。

F. Siwiec は [S] で次の g-metrizable space の概念を導入し，g-metrizable space と cs-network をもつ空間との関連について述べている。

定義2　σ-locally finite weak base をもつ regular space を g-metrizable space という。

g-metrizable spaceが興味をもたれるのは，次の定理により示される事実から他のgeneralized metric spacesの特徴付け等に有効と考えられるからである。

定義3　$\mathcal{P}$: collection of subsets of X,

$\mathcal{P}$: k-network $\Longleftrightarrow$ $\forall K$: compact subset of X とKのnbd. Uに対し，$K \subset \cup\mathcal{P}' \subset U$ をみたす$\mathcal{P}$のfinite subcollection $\mathcal{P}'$が存在する。

定理1 (L.Foged. [F$_1$]) regular space Xについて．次は同値.

(i) X : g-metrizable

(ii) X: weakly first countable かつ σ-locally finite k-network をもつ．

定理2 (P. O'Meara [O]) regular space Xについて次は同値

(i) X : metrizable

(ii) X : first countable かつ σ-locally finite k-network をもつ．

定理3 (L. Foged [F_3]) regular space Xについて次は同値.

(i) X: Lasnev space.

(ii) X: Fréchet space かつ σ-hereditarily closure preserving k-network をもつ。

これらの定理から自然に次の問題が考えられる。

問題1. σ-closure preserving (又は σ-hereditarily closure preserving) weak base をもつ空間を特徴付けよ。

問題2. (L. Foged [F_5]) normal g-metrizable space は M_1-space か?

R. W. Heath, R. E. Hodel 等により $g: N \times X \longrightarrow \tau$ なる写像を用いて generalized metric space を特徴付ける手法が研究された。同様な考えを用いて, $g: N \times X \longrightarrow \{A \mid A \subset X\}$ なる写像で, $\mathcal{B}_x = \{g(n, x) \mid n \in N\}$ が x の weak nbd. となるものを用いて, generalized metric spaces を研究することが K. B. Lee [L], H. W. Martin [M], Y. Inui and Y. Kotake [I] 等により行なわれている。

定義3 (K. Lee [L]) X: g-developable $\rightleftarrows$ 次の(i)〜(iii)をみたす $g: N \times X \longrightarrow$ Power set of X が存在する。

(i) $x \in g(n, x)$, $g(n+1, x) \subset g(n, x)$ for $\forall x \in X$, $\forall n \in N$

(ii) $\mathcal{B}_x = \{g(n, x) \mid n \in N\}$: weak nbd base of x

(iii) $x, x_n \in g(n, y_n)$ for $\forall n$

$\rightarrow \{x_n\}$: converges to x.

この g-developable space については，g-metrizable space であって，not g-developable space なる空間の存在が知られている。([F_1]) また次の問題が Lee [L] により提起されている。

問題3 g-developable space は semi-stratifiable か？

REFERENCES

[A] A.V.Arhangelskii, Mappings and spaces, Russian Math. Surveys, 21 (1966), 115-162.

[F_1] L.Foged, On g-metrizability, Pacific J. Math, 98 (1982), 327-332.

[F_2] L.Foged, Characerizations of $\aleph$ -spaces, Pacific J. Math., 110 (1984), 59-63.

[F_3] _______, A characterizations of closed images of metric spaces, to appear.

[F_4] _______, Normality in k-and-$\aleph$ spaces, to appear.

[F_5] _______, Weak bases for topological spaces, Washington University Dissertation (1979).

[I] Y.Inui and Y. Kotake, Metrization theorems for some generalized metric spaces, Q. and A. in Gen. Top. 2 (1984), 147-155.

[J] N.N.Jakovlev, On g-metrizable spaces, Soviet Math. Dokl. 17 (1976), 156-159.

[L] K.B.Lee, On certain g-first countable spaces, Pacific J. Math., 65 (1976), 113-118.

[M] H.W.Martin, A note on the metrization of γ-spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 57 (1976), 332-336.

[O] P.O'Meara, A metrization theorem, Math. Nachr., 45 (1970), 69-72.

[S] F.Siwiec, On defining a space by a weak base, Pacific J. Math., 52 (1974), 233-245.