数理解析研究所講究録
第584巻 1986年 102-108

測度と位相空間論の関連について

神戸大教育 奥山晃弘 (Akihiro Okuyama)

§1 序論

最近，位相空間論の中で，関数空間を扱う場合，線形空間における共役空間を取り扱うことと同様の考え方で，測度と位相空間論の関連が深まってきている様に思われる。その様な立場から，その関連性について紹介する。

ここで取り扱う空間はすべて完全正則ハウスドルフ空間とする。

空間X上の実数値連続関数の全体を$C(X)$で表す。$C(X)$に点収束位相を入れたとき，$C_p(X)$とかき，コムパクト開位相を入れたとき，$C_k(X)$と表すことにする。

局所凸線形位相空間Eについて，E^*をE上の実数値連続な線形汎関の全体とする。このとき，EによるE^*の弱位相をτ_Eと表す。また，$E\subset E^{**}$とみたとき，Eを位相τ_{E^*}をもつE^{**}の部分空間としてのEの位相をσ_Eと

とかく。

定義1．集合Xの部分集合族$\mathcal{B}$について，次の条件をみたすとき，$\mathcal{B}$をσ-集合体という．

(1) $\phi \in \mathcal{B}$

(2) $\mathcal{B} \ni B \Longrightarrow X \setminus B \in \mathcal{B}$

(3) $\mathcal{B}$の任意の可算部分集合$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$に対し，$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$

定義2．$\mathcal{B}$上の$[0,+\infty]$値関数μについて，次の条件をみたすとき，μを$\mathcal{B}$上の測度という。

(1) $\mu(\phi) = 0$

(2) $\mathcal{B}$の互に交わらない任意の可算部分集合$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$に対し，$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$

とくに，

$B_1 \subset B_2 \Rightarrow \mu(B_1) \leqq \mu(B_2)$ となるとき，μは単調，

$\mu(B_1 \cup B_2) \leqq \mu(B_1) + \mu(B_2)$ が常に成立するとき，μは弱加法的，

$\mu(B) < +\infty$ が常に成立するとき，μは有限，

また，Xが位相空間で，$\mathcal{B}$をXにおけるσ-集合体とする。このとき，

$\mathcal{B}$の任意の要素Bに対し

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) \mid K \text{は} B \text{のコムパクト部分集合}\}$$
$$= \inf\{\mu(G) \mid G \text{は} B \text{を含む} X \text{の開集合}\}$$

が成立するとき，μを正則，

とよぶ。

空間Xについて，Xの開集合全体を$\mathcal{G}(X)$，$\mathcal{G}(X)$を含むXにおける最小のσ-集合体を$\mathcal{B}(X)$，Xのコムパクト部分集合全体を$\mathcal{K}(X)$と表す。また，X上の有限正則測度全体の集合を$\mathfrak{M}(X)$と表すことにする。

命題．νを$\mathcal{G}(X)$上の有限，単調，劣加法的関数で，

$$G_1 \cap G_2 = \phi \Rightarrow \nu(G_1 \cup G_2) = \nu(G_1) + \nu(G_2) \quad (G_1, G_2 \in \mathcal{G}(X))$$

をみたすとき，次の性質をもつ正則測度が存在する。

(a) $\mathcal{G}(X)$の任意のGに対し，$\mu(G) \leq \nu(G)$

(b) $\mathcal{B}(X)$の任意のBに対し，

$$\mu(B) = \sup_{K \subset B} \inf_{B \subset G} \{\nu(G) \mid K \in \mathcal{K}(X), G \in \mathcal{G}(X)\}$$

次の定理は有名なリースの表現定理である。

定理．Xを局所コムパクト，$C_c(X)$をコムパクト台をもつ$C(X)$の要素全体，Lを$C_c(X)$上の正線形汎関数とすると，下の等式をみたす$\mathfrak{M}(X)$の要素μが存在する。

$$L(f) = \int_X f \, d\mu \qquad (f \in C_c(X))$$

§2 共役空間

空間Xについて，$L(X)$をXの各元をハメル基にする実数体上の一次結合の全体，即ち

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid a_i \in R,\ x_i \in X,\ i=1,2,\cdots,n;\ n=1,2,\cdots \right\}$$

とする。

定理1　Eを局所凸線形位相空間とするとき，$((E^*, \tau_E)^*, \tau_{E^*})$と$(E, \tau_\sigma)$は線形位相同型である。

空間Xの$C_p(X)$に上の定理を適用すると，

系1　$(C_p(X)^*, \tau_{C_p(X)})$と$(L(X), \tau_{C_p(X)}) \equiv L_p(X)$は線形位相同型である。

命題([3])　$L_p(X)$の要素$l = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ ($a_i \neq 0$, $i=1,\cdots,n$)について，

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} W_i \cdot U_i \mid W_i \text{は} 0 \text{を含まない} a_i \text{の開近傍},\ i=1,2,\cdots,n;\ \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \text{は互に交わらない} \{x_i\}_{i=1}^{n} \text{の開近傍} \right\}$$

がlの近傍基となる。

上の命題を使うと，

系2　(1)　Xは$L_p(X)$の閉部分集合である。

(2)　$(L_p(X)^*, \tau_{L_p(X)})$と$C_p(X)$は線形位相同型となる。

定理２　$l_1(X)$ を $\{f \mid f : X \to R \text{ st } \sum_{x\in X}|f(x)| < +\infty\}$, $B(X)$ を $\{\xi \mid \xi : X \to R$：有界$\}$ とし，$l_1(X) \ni f$ に対し，$\|f\| \equiv \sum_{x\in X}|f(x)|$ とおき，$B(X) \ni \xi$ に対し，$\|\xi\| \equiv \sup_{x\in X}|\xi(x)|$ とおくとき，$l_1(X)^*$ と $B(X)$ は $\|\ \|$ による距離保存な線形位相同型である。

§３　共役空間と測度

空間Ｘについて，

$$\mathcal{M}_k(X) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid X \supset {}^{\exists}K : \text{コムパクト st } \mu(X \setminus K) = 0\}$$

とおくと，

定理１　$C_K(X)^*$ と $\mathcal{M}_k(X)$ の間には，集合として，１対１かつ上への対応がある。しかも，その対応に従って $\xi \in C_K(X)^*$ が $\mu_\xi \in \mathcal{M}_k(X)$ に対応するとき，

$$\xi(f) = \int_{K_\xi} f\, d\mu_\xi \quad (f \in C(X))$$

が成立する。ただし，K_ξ は $\mu_\xi(X \setminus K_\xi) = 0$ なるＸのコムパクト部分集合である。

定理２（[5]）　Ｘをコムパクト scattered 空間とし，$\mathcal{M}_0(X) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \sum_{x\in X}|\mu(x)| < +\infty\}$ とおくと，$l_1(X)$ と $\mathcal{M}_0(X)$ は線形位相同型となる。

§4 付録

以上，証明をすべて省略して列したが，基本的な定義や概念については，文献[1]，[2]，[6]を参照されたい。また，定理等の出典については，門外漢の著者には新らしくみえても古いものが多く，位相解析の専門家にとっては常識とされている様にも思えたので，明示を省略させていただいた。

ここで，あえて位相空間論的な立場でとりあげられたらと思われることがらを列記する。

(1) $\mathfrak{M}(X)$ にいろいろの位相を入れることにより，位相空間論的に興味ある様に扱えるのではないだろうか。

(2) $\mathfrak{M}(X)$ を位相空間とするとき，X と $\mathfrak{M}(X)$ の位相的性質の関連を調べる。

(3) ２つの位相空間 X，Y について，$\mathfrak{M}(X)$ と $\mathfrak{M}(Y)$ の位相的関係から，X と Y の位相的関係を調べる。

(4) $\mathfrak{M}_k(X)$ の性質と $K(X)$ の性質を関連づけられないだろうか。

これらの観点について，(1)には[7]，[8]，[9]が，(2)には[4]，[9]が，(3)には[3]，[4]がそれぞれ関連している様に思われる。

参 考 文 献

1. G. J. O. Jameson： Topology and normed spaces, Chapman & Hall Math. Ser. 1974.

2. 越昭三：線形位相入門，サイエンス社

3. D. S. Pavlovskii： On spaces of continuous functions, Sov. Math. Dokl. 22(1980), 34-37

4. V. G. Pestov： The coincidence of the dimensions dim of l-equivalent topological spaces, Sov. Math. Dokl. 26(1982), 380-383

5. Z. Semadeni： Banach spaces non-isomorphic to their cartesian squares II, Bull. de l'Acad. Pol. 8 (1960), No. 2, 81-84

6. 竹之内脩：ルベーグ積分，培風館

7. F. Topsøe： Compactness in spaces of measures, Studia Math. 36(1970), 195-212

8 ———— ： Compactness and tightness in a space of measures with the topology of weak convergence, Math. Scand. 34(1974), 187-210

9. V. V. Uspenskii： On the topology of a free locally convex spaces, Sov. Math. Dokl. 27(1983), 781-785