

l -equivalence に関して不変でない位相的性質

横浜国大 寺田敏司 (Toshiji Terada)

位相空間 X に対して, X 上の実数値連続関数全体の作る線形空間を $C(X)$ で表し, $C(X)$ に各点収束の位相を与えて得られる位相線形空間を $C_p(X)$ で表す。位相線形空間 V, W が, 線形同相のとき, $V \simeq W$ で表すことにする。完全正則空間 X, Y に対して, $C_p(X) \simeq C_p(Y)$ が成り立つとき, X と Y は l -equivalent とよばれる。

l -equivalence に関して不変な位相的性質として, $discreteness$, $compactness$, $pseudocompactness$, σ - $compactness$, dim , nw , $realcompactness$, ... などが, 代表的なものとして知られている。

ここでは, l -equivalence に関して不変でない位相的性質について考えることにする。 l -equivalence に関して不変でないことを示す一つの方法として, 以下の補題を利用することがある。

一般に、位相空間 X の完全正則化を αX で表すことに
する [2]。このとき、

補題 1. $C_p(X) \simeq C_p(\alpha X)$ が成り立つ。

Y を位相空間 X の部分空間とするとき

$$C_p(X; Y) = \{ f \in C_p(X) : f(Y) = \{0\} \}$$

と定める。このとき、

補題 2 (Parlovskii) Y が位相空間 X の部分空間で
連続な線形拡張作用素 $u: C_p(Y) \rightarrow C_p(X)$ が存在する
とき、

$$C_p(X) \simeq C_p(Y) \times C_p(X; Y)$$

が成り立つ。

X を完全正則空間とし、 Y を X の閉集合とするとき、
 X/Y で Y を一点 $*$ に縮めた X の商空間を表すことにす
る。このとき、

補題 3. $C_p(X; Y) \simeq C_p(X/Y; *)$ が成り立つ。

以上の補題を用いて、次の反例が得られる。

例、 \mathcal{P} を位相的性質で、直和(位相的)に関して閉じているものとする。性質 \mathcal{P} を持つ位相空間 X, Y が、次の条件をみたすようにとれるとき、 \mathcal{P} は l -equivalenceに関して不変でない。

- 1) X, Y は可算無限個の孤立点を持つ。
- 2) $X \times Y$ は性質 \mathcal{P} を持たない。
- 3) $\alpha(X \times Y / X \times \{y_0\})$ が性質 \mathcal{P} を持つように Y の一点 y_0 がとれる。

実際、

$$\begin{aligned}
 C_p(X \times Y) &\cong \mathbb{R} \times C_p(X \times Y) \\
 &\cong \mathbb{R} \times C_p(X \times Y; X \times \{y_0\}) \times C_p(X) \\
 &\cong \mathbb{R} \times C_p(X \times Y / X \times \{y_0\}; *) \times C_p(X) \\
 &\cong \mathbb{R} \times C_p(\alpha(X \times Y / X \times \{y_0\}); *) \times C_p(X) \\
 &\cong C_p(\alpha(X \times Y / X \times \{y_0\})) \times C_p(X) \\
 &\cong C_p(\alpha(X \times Y / X \times \{y_0\}) \oplus X)
 \end{aligned}$$

であり、 $X \times Y$ は性質 \mathcal{P} を持たないが、 $\alpha(X \times Y / X \times \{y_0\}) \oplus X$ は性質 \mathcal{P} を持つ。

この例の応用として、Arhangel'skiiの1つの問題が解

決される。すなわち,

反例, 正規性は l -equivalence に関して不変でない。
 実際, $X = \omega_1$, $Y = \omega_1 + 1$ を考えればよい。

次の Arhangel'skiĭ の問題は, 未解決である。

"countably-compactness, Lindelöf 性, k -space 性は
 l -equivalence に関して不変か?"

References

1. A. V. Arhangel'skiĭ, On linear homeomorphisms of function spaces, Soviet Math. Dokl. 25 (1982), 852-855.
2. H. Herrlich, Topologische Reflexionen und Coreflexionen, Springer Lecture note 78, (1968).
3. D. S. Pavlovskiĭ, On spaces of continuous functions, Soviet Math. Dokl. 22 (1980), 34-37.