数理解析研究所講究録
第584巻 1986年 131-136

Roy の空間 Δ の、単純化の、一考察

防衛大学校　寺沢　順　（TERASAWA, JUN）

可分距離空間 X に対し、3種の次元 $\mathrm{ind}\, X$, $\dim X$, $\mathrm{Ind}\, X$ が一致することは、つとに、知られている。一般の（非可分な）距離空間 X に対しては、$\dim X = \mathrm{Ind}\, X$ であることが、1950年代に、Katětov－森田によって、示された。この場合、$\mathrm{ind}\, X \leqq \dim X$ はすぐわかるが、$\mathrm{ind}\, X = \dim X$ かどうかについては、長く、未解決であった。1960年代後半に、Roy は反例を構成し、$\mathrm{ind}\,\Delta = 0$, $\dim \Delta = 1$ となる距離空間 Δ を提示した。

この Δ のみをもって、$\mathrm{ind} = \dim$ かどうか、の問題が完全に解決したとは言い難い面がある。すなわち、$\dim - \mathrm{ind}$ が任意に大きい反例か、或いは、$\dim - \mathrm{ind} \leqq N$ となる自然数定数 N が発見されるまでは、ind と dim の、距離空間における振る舞いを十分に知り得たことにはならないのである。

しかしながら、多くの研究者たちの努力にもかかわらず、

現在までのところ、この方面で、補助定理ひとつ得られていない。考えられる、ひとつの理由として、上のΔの構造が非常に複雑で、難解なため、Δの研究を通して何らかの洞察に達することが困難なことがあるのではないだろうか。

そこで、ここでは、上のΔを単純化する試みの一つとして、筆者の恩師S. Mrówka教授に従い、筆者の博士論文にわずかに触れておいた(p.31)、空間∇について、解説してみたい。

§1. 定義

$k/2^n$の形に表わされる、単位区間$[0,1]$の実数を2進法有理数、そうでないものを、2進法無理数ということにする。2進法有理数xに対して、$x=k/2^n=2k/2^{n+1}=\cdots$の、無数の表記の仕方があるが、このうち、奇数$k$を用いて、$x=k/2^n$と表記する仕方は一通りしかない。このとき、$n$を$x$の<u>位数</u>と、仮に、よぶことにしよう。

任意の実数tに対して、$k/2^n<t<(k+1)/2^n$となるとき、$J_n(t)=(k/2^n, (k+1)/2^n)$とする。$t=k/2^n$であるときは、$K_n(t)=((k-1)/2^n, (k+1)/2^n)\setminus\{t\}$とする。2進法有理数$s$は、もし$\in J_n(t)\cup K_n(t)$なら、位数$>n$である。

いま、任意に集合Bを、その濃度mが、$m^{\aleph_0}=m$という条件を満たすように取る。明白に、$m>\aleph_0$となる。B内の点列

で、相異なる点ばかりからなるもの全体の濃度は、$m^{\aleph_0}=m$ であり、従って、その全体の上への、1-1対応σが、Bから取れる。$b\in B$ に対して、$\sigma(b)=\{b_1,b_2,\cdots\}$ のとき、$\sigma_n(b)=\{b_n,b_{n+1},\cdots\}$ と表わすものとする。

可算積集合$B^{\aleph_0}$の点$b=(b_1,b_2,\cdots)$に対して、$B_n(b)=B(b_1,\cdots,b_n)=\{b'\in B^{\aleph_0}\mid b_i'=b_i \text{ for all } i\leqq n\}$と表わすことにする。

位相空間∇は、集合としては、$[0,1]\times B^{\aleph_0}$である。これに、位相を導入する。

tが2進法無理数のとき、$(t,x)\in[0,1]\times B^{\aleph_0}$の近傍基として、

$$U_n(t,x)=J_n(t)\times B(x_1,\cdots,x_n),\quad n=1,2,\cdots$$

を取る。tが2進法有理数で、位数$=m$のとき、(t,x)の近傍基として、$n=m,m+1,\cdots$に対し、

$$V_n(t,x)=\{t\}\times B(x_1,\cdots,x_n)\cup K_{n+1}(t)\times\left(\cup\{B(x_1,\cdots,x_{m-1},\omega,x_m,\cdots,x_n)\mid\omega\in\sigma_n(x_m)\}\right)$$

を取る。ここで、$K_{n+1}(t)$とし、$K_n(t)$としないのは、この空間の距離づけ可能性を保証するためである。

このように定義された空間∇が、T_1であること、$\mathrm{ind}=0$であること、距離づけ可能であることは、標準的に、示される（易しい、ということではない）。このうち、距離づけ可能性の証明には、Alexandroff-Urysohnの定理を用いる。その際、$\mathcal{G}_n$を$U_n(t,x)$, $V_n(t,x)$の全体とするとき、$\mathcal{G}_n$は$\mathcal{G}_{n-1}$の星型細分に

なるのではなく、$\mathcal{G}_{n-2}$の星型細分となることに、注意を要する。

§2. $\dim \nabla' > 0$の証明

∇'は、$\dim = 0$の2つの部分集合に、自然に、分解されるので、$\dim \nabla' \leqq 1$はすぐわかる。

$\dim \nabla' > 0$の証明には、Royの考案になるindicatorを、Mrówkaが改良した、枝わかれ集合(ramified product)を用いる。

1つの集合Xが与えられているとする。各自然数nに対して、多価関数$g_n: X^n \to X$が与えられているとき、$D \subseteq X$として、点$x \in X^{\aleph_0}$で、$x_1 \in D$, $x_2 \in g_1(x_1)$, $x_3 \in g_2(x_1, x_2)$, $\cdots$, $x_{n+1} \in g_n(x_1, \cdots, x_n)$, $\cdots$, となるものの全体を$[D, g_1, g_2, \cdots]$のように表わし、枝わかれ集合とよぶことにする。$X^{\aleph_0}$の代わりに、X^kの中での枝わかれ集合を考えることもあり、また、異なる集合$X_1, X_2, \cdots$の積$\prod_n X_n$の中でのものを考えることもある。X^kでの枝わかれ集合に対し、kをその長さという。

枝わかれ集合$[D, g_1, g_2, \cdots]$が非可算性をもつということを、Dが非可算集合、各$g_1(x_1)$が非可算集合、各$g_2(x_1, x_2)$が非可算集合、$\cdots$となっていることとする。

次の2つの補題の証明はむつかしくない。

「長さnの、非可算性をもつ枝わかれ集合が、集合として、

可算個の集合 $T_1, T_2, \cdots$ の和で表わされているなら、或る T_k は、長さ n で、非可算性をもつ、枝わかれ集合を含む」

「R が、無限の長さの、非可算性をもつ枝わかれ集合で、集合として、単調増加集合列 $\{T_n\}$ の和であり、かつ、

$$x\in T_n,\ y\in R\ \&\ x_i=y_i \text{ for all } i\leqq n \implies y\in T_n$$

であるとする。このとき、自然数 k と、長さ k で、非可算性をもつ枝わかれ集合 R_0 が取れ、$R_0\times \mathfrak{X}^{\aleph_0}\cap R\subseteq T_k$ となる」

この2つの補題を利用して、次の命題が示される。証明は Roy の論文の 5.8 と同様である。

「H を ∇' の開かつ閉集合、$a\in B^l$、s,t を位数 $\leqq l$ の隣り合う2進法有理数とし、R,S を、B の、長さ m,n で、非可算性をもつ枝わかれ集合とする。もし、

$$K_{l+m}(s)\times B(a_1,\cdots,a_l,u_1,\cdots,u_m)\subseteq H \quad \text{for all } u\in R$$

$$K_{l+n}(t)\times B(a_1,\cdots,a_l,v_1,\cdots,v_n)\subseteq \nabla\setminus H \quad \text{for all } v\in S$$

であれば、$a_{l+1}\in B$ と、位数 $\leqq l+1$ の[注]2進法有理数 $s_1,t_1\in[s,t]$ 及び、長さ m_1,n_1 で、非可算性をもつ枝わかれ集合 R_1,S_1 が取れ、

$$K_{l+1+m_1}(s_1)\times B(a_1,\cdots,a_l,a_{l+1},u_1,\cdots,u_{m_1})\subseteq H \quad \text{for all } u\in R_1$$

$$K_{l+1+n_1}(t_1)\times B(a_1,\cdots,a_l,a_{l+1},v_1,\cdots,v_{n_1})\subseteq \nabla\setminus H \quad \text{for all } v\in S_1$$

となる」

∇' の、互いに素な閉集合 $A_1=\{(0,x)\mid x\in B^{\aleph_0}\}$, $A_2=\{(1,x)\mid x\in B^{\aleph_0}\}$ が、∇' の開かつ閉集合 H で分離されていると仮定するとき、

この命題を用い、帰納的に、$a_1, a_2, \cdots, a_\ell, \cdots \in B$ 及び、2進法有理数 $s_1 \leqq s_2 \leqq \cdots \leqq s_\ell \leqq \cdots \leqq t_\ell \leqq \cdots \leqq t_2 \leqq t_1$ を取る。そして、$a = (a_1, a_2, \cdots)$，$s_0 = \lim s_\ell = \lim t_\ell$ とする。s_0 が無理数であることが示され、$(a, s_0) \in \nabla'$ である。更に、$(a, s_0) \in cl H \cap cl(\nabla' \setminus H)$ が成立し、ここに不合理であるので、$\dim \nabla' > 0$ である。

[注]「隣り合う」という条件を書き落とした。

参考文献

S. Mrówka, N-compactness, metrizability and covering dimension, in "Rings of Continuous Functions", edited by C.H.Aull, Marcel Dekkar Inc., 1985.

A.R.Pears, "Dimension Theory of General Spaces", Cambridge, 1975. Chapter 7 §4.

P.Roy, Non-equality of dimensions for metric spaces, Trans.A.M.S. 134(1968),pp.117-132.

Jun Terasawa, Dissertation submitted to the State University of New York at Buffalo in 1977. Chapter 2.