数理解析研究所講究録
第 585 巻 1986 年 1-25

実係数代数方程式の連立型解法とその静電場的解釈

名大工学部　桜井鉄也 (Tetsuya Sakurai)
鳥居達生 (Tatsuo Torii)
杉浦　洋 (Hiroshi Sugiura)

はじめに.

代数方程式に対する連立型解法といえば、通常、全根一挙に求める方法(Aberth法[2], DKA法)を意味する。これらの方法は大域的収束性において優れているが、一回の反復に費やす計算量が多いため、全根求めるための計算時間は他の方法と比べて概して多くなる。また、これらの方法は想定するモデルが単純なために. 重根や近接根が多い場合には、なかなか収束しなかったり、近似根が誤った方向へとんだりすることがある。そこで、代数方程式に対して静電場的な解釈を与えた上で、それに基づいて実係数による対称性、多重根、近接根を想定し. 状況に応じてそれらを使う方法について考える.

1. 静電場的解釈

電場 $\mathbf{E}$ と電位 V の関係は

$$\mathbb{E} = -\operatorname{grad} V$$

である。点 (α, β) に電荷量 1 の正電荷を置いたときに点 (x, y) で観測される対数ポテンシャルは $\vec{z} = (x, y)$, $\vec{\xi} = (\alpha, \beta)$ とおいて

$$v(\vec{z}) = \log \frac{1}{\| \vec{z} - \vec{\xi} \|}$$

$$= -\log \left\{ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

と表わされる。よって $v(\vec{z})$ の微分は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{y-\beta}{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} \end{cases}$$

となる。一方、$\vec{z} = (x, y)$, $\vec{\xi} = (\alpha, \beta)$, $\mathbb{E} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ をそれぞれ複素数 $z = x + iy$, $\xi = \alpha + i\beta$, $E = -\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y}$ とおきかえて、複素対数関数 $\log(z-\xi)^{-1}$ を z で微分すると

$$\frac{d}{dz} \log(z-\xi)^{-1} = -\frac{1}{z-\xi}$$

$$= -\frac{1}{(x-\alpha) + (y-\beta)i}$$

$$= -\frac{(x-\alpha)-(y-\beta)i}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} i$$

すなわち

$$\mathbb{E} = -\operatorname{grad} v(\vec{z}) = -\overline{\frac{d}{dz}\log(z-\xi)^{-1}}$$

$$= \overline{\frac{1}{z-\xi}}$$

よって

$$e(z) = \overline{E} = \frac{1}{z-\xi}$$

は、2次元実ベクトル空間を複素平面と同一視したときに点zで観測される電場の共役複素数である。方程式 $f(z)=0$ の解法をこの観点から導く。

2. 基本モデル（Newton 法）

n 次代数方程式 $f(z)$ を

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots\cdots + a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

とし、その n 個の根を $\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n$ とすると、$f(z)$ で定義される共役電場 $e(z)$ は

$$e(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - \xi_i} = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

である。これは 点ξ_1，点ξ_2，…… 点ξ_n に電荷量1の正電荷を置いたときに．点zで観測される電場の共役複素数である。いま、点zで観測した$e(z)$が、点αにある電荷量1の正電荷によってつくられていると考えると、その式は

$$\frac{1}{z-\alpha} = e(z)$$

これより

$$\alpha = z - \frac{1}{e(z)} = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

これは Newton法に他ならない。

3．Newton法の連立化（Aberth法）

連立させるm個の近似根をz_1，z_2，…… z_mとし、一般に$m \leq n$とする。近似根に対しては、電荷量 -1 の負電荷を対応させる．近似根のつくる共役電場を$\tilde{e}(z)$とおくと

$$\tilde{e}(z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{-1}{z - z_i}$$

と表わせる．負電荷は電界にしたがって動くものとする．いま、k番目の近似根z_kの移行する先を考えよう．$f(z)$のつくる共役電場$e(z)$とz_k以外の近似根のつくる共役電場

を重ね合わせた値を $e_k(z)$ とすると

$$e_k(z) = e(z) + \sum_{\substack{i=1 \\ \neq k}}^{m} \frac{-1}{z - z_i}$$

であり、これが点 z で観測される共役電場となる．点 z_k において働く力を、電荷量1の正電荷から生ずるとみなし、その正電荷の位置 z_k' を新しい近似値とする．その式は

$$\frac{1}{z_k - z_k'} = e_k(z_k)$$

$$= e(z_k) - \sum_{\substack{i=1 \\ \neq k}}^{m} \frac{1}{z - z_i}$$

ここで $m = n$ としたものが Aberth 法の式である．

4． 実係数を想定した方法

4.1 実係数モデル

Aberth 法を実係数代数方程式に適するように．次のように変更する． 実軸上の近似根を r_j，その個数 n_1，複素共役な二つの近似根を根とする2次式を $z^2 - p_j z - q_j$，その組数を n_2 とする． 近似根の個数は $m = n_1 + 2n_2$ と表わされる． $e_k(z)$ の計算の負担を小さくするために、m は一般には n より小さく設定する． m の上限，下限をそれぞれ n_{max}，n_{min} とし この範囲で m を変化させる．

4.2 2次因子の補正

2次因子 $z^2-p_k z-q_k$ を補正する式は

$$\frac{2z-p_k'}{z^2-p_k'z-q_k'}\equiv e(z)-\sum_{j=1}^{n_1}\frac{1}{z-r_j}-\sum_{\substack{j=1\\ \neq k}}^{n_2}\frac{2z-p_j}{z^2-p_jz-q_j}\quad\cdots(1)$$

$$\mathrm{mod}\ (z^2-p_kz-q_k)$$

である．ここで $\equiv$, $\mathrm{mod}\ (z^2-p_kz-q_k)$ は $z^2-p_kz-q_k=0$ のときに等号が成り立つことと定義する．すなわち、$z^2-p_kz-q_k=0$ の根の上で等号が成り立つことを意味する．以後、明らかな場合には $\mathrm{mod}\ (z^2-p_kz-q_k)$ を省略する。

さて、式(1)へ $z^2=p_kz+q_k$ を代入すると

$$\frac{2z-p_k'}{(p_k-p_k')z+(q_k-q_k')}\equiv e(z)-\sum_{j=1}^{n_1}\frac{1}{z-r_j}-\sum_{\substack{j=1\\ \neq k}}^{n_2}\frac{2z-p_j}{(p_k-p_j)z+(q_k-q_j)}\cdots(2)$$

ここで

$$\begin{cases} p_k-p_k'=-dp_k \\ q_k-q_k'=-dq_k \end{cases}$$

とおくと式(2)は

$$\frac{2z-(p_k+dp_k)}{dp_k\cdot z+dq_k}\equiv -e(z)+\sum_{j=1}^{n_1}\frac{1}{z-r_j}+\sum_{\substack{j=1\\ \neq k}}^{n_2}\frac{2z-p_j}{(p_k-p_j)z+(q_k-q_j)}\cdots(3)$$

となる。

$f(z)$ と $f'(z)$ の 計算は

$$f(z) = (z^2 - p_k z - q_k)(b_0 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + \cdots + b_{n-2}) + b_{n-1} z + b_n$$
$$= (z^2 - p_k z - q_k)\left\{(z^2 - p_k z - q_k)(c_0 z^{n-4} + \cdots + c_{n-4}) + c_{n-3} \cdot z + c_{n-2}\right\} + b_{n-1} \cdot z + b_n$$

とおいて $z^2 - p_k z - q_k = 0$ とすると

$$f(z) \equiv b_{n-1} \cdot z + b_n$$
$$f'(z) \equiv c_{n-3} \cdot z + c_{n-2}$$

であるから $e(z)$ は

$$e(z) \equiv \frac{f'(z)}{f(z)} \equiv \frac{c_{n-3} \cdot z + c_{n-2}}{b_{n-1} \cdot z + b_n}$$

となる。 ここで mod $(z^2 - pz - q)$ のもとでの 分数式を計算するために

$$\frac{C_0 \cdot z + C_1}{B_0 \cdot z + B_1} \equiv W_0 \cdot z + W_1 \quad \bmod (z^2 - pz - q) \cdots (4)$$

を 示す. これは 実数の 乗除算 9回で 行なえる. 因みに、複素数割算では 実数の 乗除算が 8回 である.

式(4) は $z, \bar{z}$ を $z^2 - pz - q$ の 根とすると

$$\frac{C_0 z + C_1}{B_0 z + B_1} = \frac{(C_0 z + C_1)(B_0 \bar{z} + B_1)}{(B_0 z + B_1)(B_0 \bar{z} + B_1)}$$

$$= \frac{B_0 C_0 z\bar{z} + B_1 C_0 z + B_0 C_1 \bar{z} + B_1 C_1}{B_0^2 \cdot z\bar{z} + B_0 B_1 (z + \bar{z}) + B_1^2}$$

ここで　$z^2 - pz - q = 0$ より

$$\begin{cases} z\bar{z} = -q \\ z + \bar{z} = p \\ \bar{z} = p - z \end{cases}$$

を代入すると

$$\equiv \frac{(B_1 C_0 - B_0 C_1) z + B_1 C_1 + B_0 C_1 p - B_0 C_0 q}{-B_0^2 q + B_0 B_1 p + B_1^2}$$

ここで

$$\begin{cases} W_0 = \dfrac{B_1 C_0 - B_0 C_1}{-B_0^2 q + B_0 B_1 p + B_1^2} \\ \\ W_1 = \dfrac{B_1 C_1 + B_0 C_1 p - B_0 C_0 q}{-B_0^2 q + B_0 B_1 p + B_1^2} \end{cases}$$

とおけば

$$\equiv W_0 \cdot z + W_1$$

となり、zの1次式にすることができる．

式(3)の右辺は、第2項，第3項も同様に式(4)を使って zの1次式になるので、zの1次の係数と定数項をそれぞれ別々にたしこんでいくことで計算できる。

そこで　式(3)の右辺は

右辺 $\equiv w_0 z + w_1$

と 表わせる。 よって 式(3)は

$$\frac{2\cdot z-(p_k+dp_k)}{dp_k\cdot z+dq_k} \equiv w_0\cdot z + w_1$$

これを変形して

$$2\cdot z-(p_k+dp_k) \equiv (w_0\cdot z+w_1)(dp_k\cdot z+dq_k)$$

$$\equiv w_0\cdot dp_k\cdot z^2+(w_1\cdot dp_k+w_0\cdot dq_k)z+w_1\cdot dq_k$$

となり $z^2=p_k\cdot z+q_k$ を 代入すると

$$2\cdot z-(p_k+dp_k) \equiv (w_0\cdot p_k\cdot dp_k+w_1\cdot dp_k+w_0\cdot dq_k)\cdot z$$

$$+w_0\cdot q_k\cdot dp_k+w_1\cdot dq_k$$

zについて整理すると

$$(w_0\cdot p_k\cdot dp_k+w_1\cdot dp_k+w_0\cdot dq_k-2)\cdot z+(w_0\cdot q_k\cdot dp_k$$

$$+w_1\cdot dq_k+p_k+dp_k) \equiv 0$$

よって
$$\begin{cases}(w_0\cdot p_k+w_1)\cdot dp_k + w_0\cdot dq_k = 2\\ (w_0\cdot q_k+1)\cdot dp_k + w_1\cdot dq_k = -p_k\end{cases}$$

これを dp_k, dq_k について解き

$$\begin{cases}p_k' = p_k + dp_k\\ q_k' = q_k + dq_k\end{cases}$$

より、新しい近似値 p_k', q_k' を得る。

4.3 1次因子の補正

実の近似根 r_k を補正する式は

$$\frac{1}{r_k - r_k'} = e(r_k) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n_1} \frac{1}{r_k - r_j} - \sum_{j=1}^{n_2} \frac{2 \cdot r_k - p_j}{r_k{}^2 - p_j \cdot r_k - q_j}$$

ここで $r_k - r_k' = -dr_k$ とおくと

$$dr_k = -\left[e(r_k) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n_1} \frac{1}{r_k - r_j} - \sum_{j=1}^{n_2} \frac{2 \cdot r_k - p_j}{r_k^2 - p_j r_k - q_j} \right]^{-1}$$

となり、$r_k' = r_k + dr_k$ より新しい近似値 r_k' を得る。

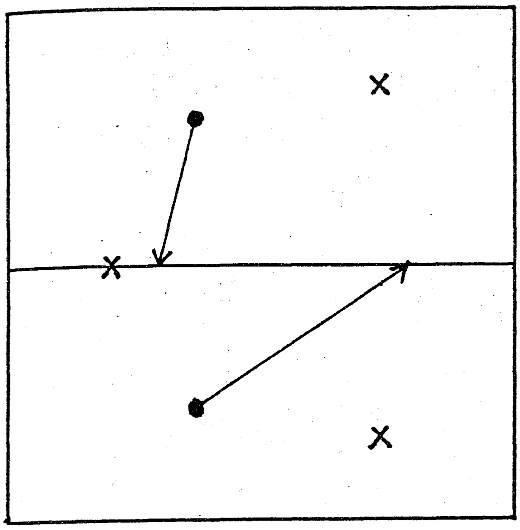
4.4 1次因子と2次因子との遷移

2次因子の計算において、判別式 $D_k = p_k'^2 - 4q_k'$ が正のときは $z^2 - p_k' z - q_k' = 0$ の2根 α_k, β_k は実数となるので、$r_{n_1+1} = \alpha_k$, $r_{n_1+2} = \beta_k$, $n_1 = n_1 + 2$ として1次因子へくり込む。又、1次因子の計算では r_k' の値は実数だけをとり、実根がない場合には不都合を生ずる。そのため、前回の修正量よりも新しい修正量が大きいときには、正常に根に近づいていないと判断して、$p_{n_2+1} = 2 \cdot r_k$, $q_{n_2+1} = -r_k{}^2$, $n_2 = n_2 + 1$ として、2次因子として共役複素根を探させる。なお、$n_1 + 2(n_2+1) > n_{max}$ のときは切りすてる。その例を図に示す

ここで × …… 根 , ● …… 近似根

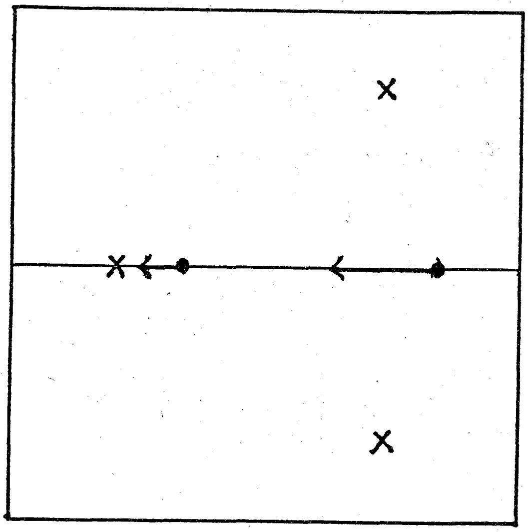
$f(z) = z^3 - z^2 + 2$.　初期値　$p = -1.6$, $q = -1.28$

1.



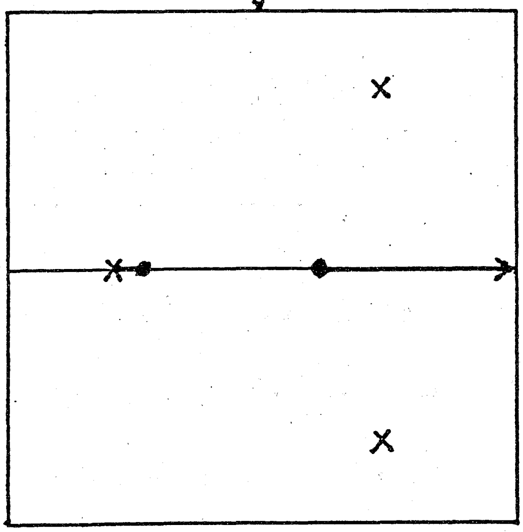
1次因子へくり込む

2.



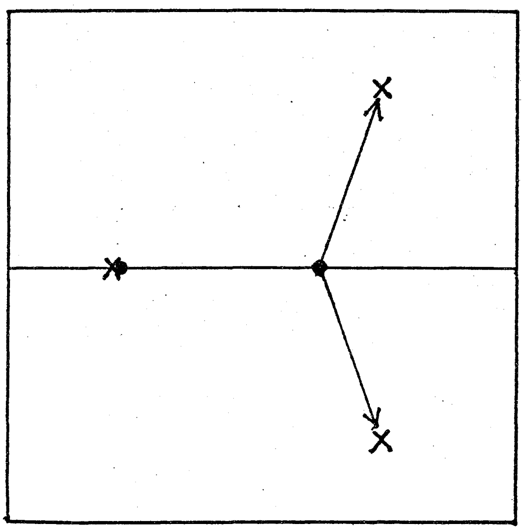
実の近似根として計算

3.



共役な複素根の影響で
dr が前回より大きく
なり異常と判定

4.



2次因子として計算する。

4.5 数値例

ここでは、比較の対象として　ガーサイト・ジャラット・マック法（GJMNKD）[1],[4]，ジェンキンス・トラウプの方法（DRJETR）[5] を使用した。

計算機は M-382.

単根のみ　表1.

No.	n	時間 (Msec)		
		実係数型	GJMNKD	DRJETR
1	16	2.9	3.2	4.9
2	16	2.7	3.1	4.7
3	20	4.5	5.1	6.1
4	20	4.7	5.1	9.4
5	20	4.1	5.8	7.6
6	30	8.3	9.0	14.9
7	30	9.1	10.3	14.5
8	35	7.7	10.9	13.4
9	50	12.6	18.6	46.5
10	50	12.7	15.7	37.0

重根を含む　表2.

No.	n	時間 (Msec)		
		実係数型	GJMNKD	DRJETR
1	16	3.5	2.3	4.5
2	16	3.4	2.0	5.5
3	20	4.8	3.1	7.1
4	20	5.5	3.4	9.2
5	22	6.8	3.8	11.3
6	24	8.1	4.3	9.4
7	24	7.3	4.6	12.3
8	26	8.6	4.9	13.3
9	28	9.1	4.9	20.0
10	30	8.5	6.6	19.3

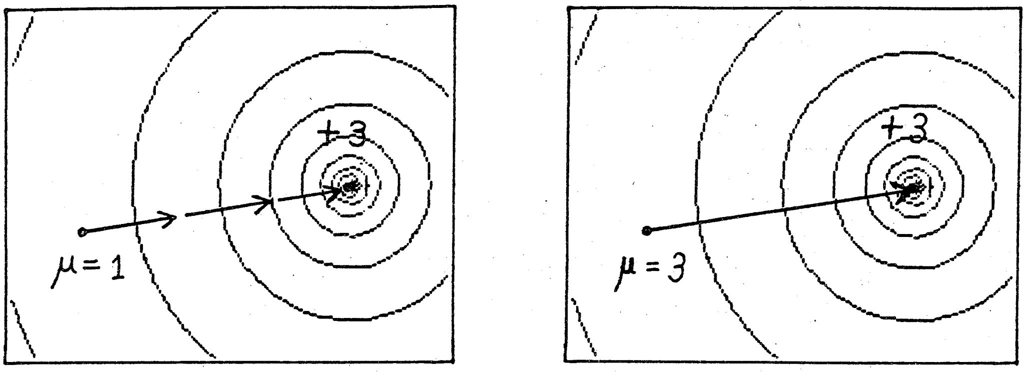
（多項式 $f(z)$ は領域 $[-1,1]\times[-1,1]$ に乱数で根を置いて、係数を求めた。表2.では、さらに乱数を用いて重根20%，3重根20%，単根60%となるようにした。）

単根のみの場合は GJM法とくらべて 0.7〜0.9倍の時間で計算できるが、重根を含む場合には 1.3〜2倍の時間がかかっている。

5. 重根を想定した方法

5.1 電荷量推定型

Newton法等では、そのモデルが単根のみを想定しているために、重根や近接して多くの根があるときには、近似根の修正量は小さくなり、反復回数が多くなる。



そこで 根の多重度も考慮し、点αに電荷量μの正電荷(μ重根)があるとして、α, μを求める。その式は

$$\frac{\mu}{z-\alpha} = e(z) \qquad \cdots (5)$$

であり、両辺をzで微分すると

$$\frac{-\mu}{(z-\alpha)^2} = e'(z) \qquad \cdots (6)$$

となる。ここで

$$e'(z) = \left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)' = \frac{f''(z)}{f(z)} - \left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^2$$

である。

$z-\alpha=-dz$ とおくと 式(5), 式(6) は それぞれ

$$\begin{cases} \dfrac{\mu}{dz} = -e(z) & \cdots (7) \\[2ex] \dfrac{\mu}{dz^2} = -e'(z) & \cdots (8) \end{cases}$$

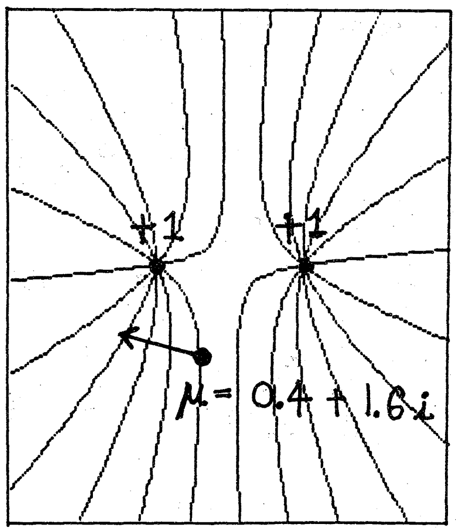
式(7) を 式(8) で 割ると

$$dz = \frac{e(z)}{e'(z)}$$

となり、これを 式(7) に 代入して

$$\mu = -e(z)\cdot dz = -\frac{e^2(z)}{e'(z)}$$

となる.



モデルに妥当性があるときには、電荷量μは正の整数である。しかし右図のように近接した根の近くでは力線は大きく曲がっているので(近接して正電荷があるときの電気力線に相当する)電荷量推定型でμを計算すると虚部が大きくなる. そこでμの値から モデルの妥当性をチェックできる. μの虚部が大きいときには、その近くに他の根があると判断して、想定モデルを切り換える.

5.2 分裂型

点α_1と点α_2にそれぞれ電荷量1の正電荷があるとして、α_1, α_2を求める。その式は

$$\frac{1}{z-\alpha_1}+\frac{1}{z-\alpha_2}=e(z) \qquad \cdots(9)$$

両辺をzで微分すると

$$\frac{-1}{(z-\alpha_1)^2}+\frac{-1}{(z-\alpha_2)^2}=e'(z) \qquad \cdots(10)$$

ここで、$e(z)$, $e'(z)$は電荷量推定型のときと同じである.

$z-\alpha_1=-dz_1$, $z-\alpha_2=-dz_2$ とおくと 式(9),

式(10)は それぞれ

$$\begin{cases} \dfrac{1}{dz_1}+\dfrac{1}{dz_2}=-e(z) & \cdots(11) \\[2ex] \dfrac{1}{dz_1^2}+\dfrac{1}{dz_2^2}=-e'(z) & \cdots(12) \end{cases}$$

であり、$dz_1+dz_2=2X$, $dz_1\cdot dz_2=Y$とおくと

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1+dz_2}{dz_1\cdot dz_2}=\dfrac{2X}{Y}=-e(z) & \cdots(13) \\[2ex] \dfrac{dz_1^2+dz_2^2}{dz_1^2\cdot dz_2^2}=\dfrac{4X^2-2Y}{Y^2}=-e'(z) & \cdots(14) \end{cases}$$

となる.

式(13)の2乗から式(14)をひくと

$$\frac{2}{Y} = e^2(z) + e'(z)$$

よって

$$Y = \frac{2}{e^2(z) + e'(z)}$$

これを式(13)に代入して

$$X = \frac{-e(z)}{2} \cdot Y = \frac{-e(z)}{e^2(z) + e'(z)}$$

これより2次式 $z^2 - 2Xz + Y = 0$ を解いて

$$\begin{cases} \alpha_1 = z + dz_1 \\ \alpha_2 = z + dz_2 \end{cases}$$

を得る。新しい近似値としては、dz_1 と dz_2 のうちその絶対値の小さい方を採用し、あとの一方は近似根が収束したときの新しい初期値として利用する。連立型のときは $m = m + 1$ として両方とも近似根として採用する。

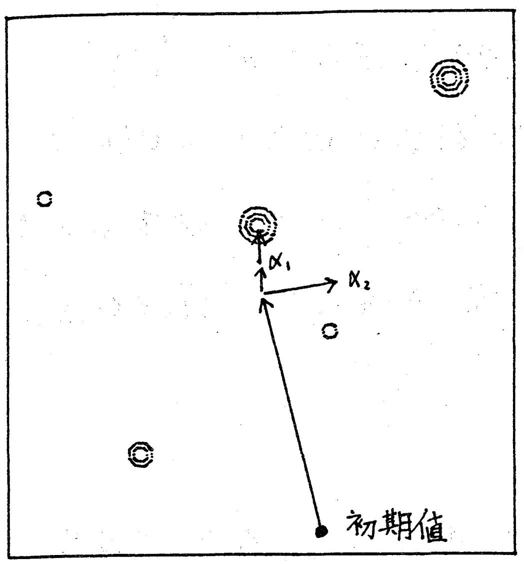
5.3 近似根の動き

近似根の動きを図に示す。

ここで白丸は根，黒丸は近似根を表わし、白丸の数は多重度を表わす。⊗は収束後、減次したことを表わす。

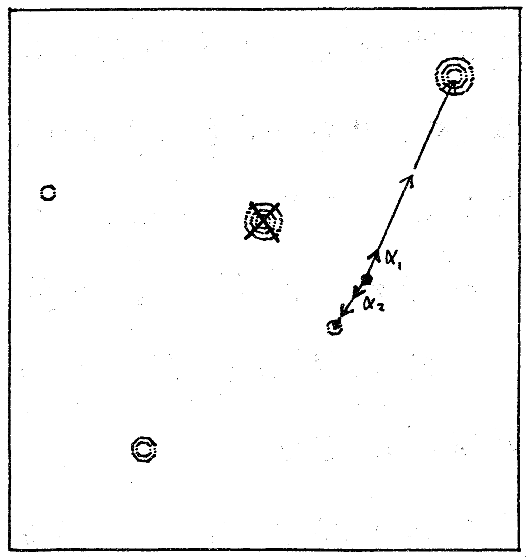
$n = 10$, なお、図を簡単にするために重根は一度に減次している.

1



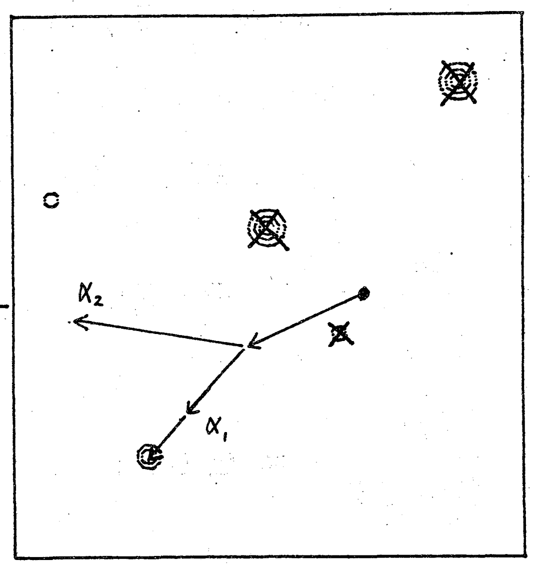
初期値において $\mu \approx 10$ と推定し、ほぼ $f(z)$ の重心へ。その後 分裂し、3重根へ収束。

2



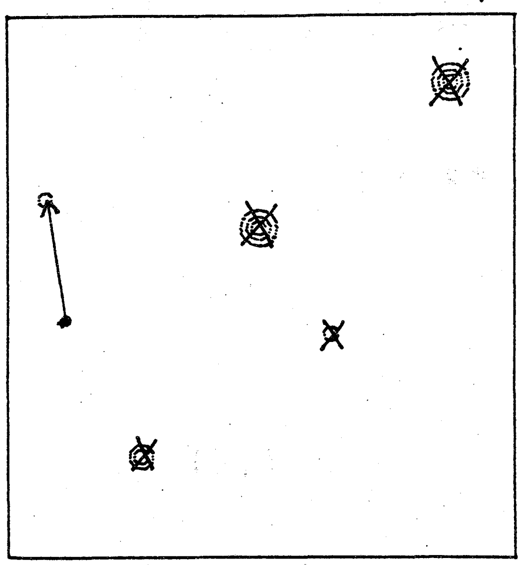
α_2 を 初期値として そこで 分裂.

3



$\mu = 2.4$ と 推定して 移動した後、分裂.

4



α_2 を 初期値として 残りの 単根へ収束

5.4 $e'(z)$の代りに差分を使う方法

電荷量推定型と分裂型では、$e'(z)$を使うため、$f(z)$の2階微分まで必要とするが、前回の計算に使われた$e(z)$を利用して、2点での$e(z)$の値から新しい近似値を求める方法も考えられる。(一回の反復計算では、$f(z)$と$f'(z)$を一回計算するだけですむ)

[電荷量推定型]′

前回の近似値をz_2，その修正された近似値をz_1とすると

$$\begin{cases} \dfrac{\mu}{z_1 - \alpha} = e(z_1) & \cdots (15) \\[2ex] \dfrac{\mu}{z_2 - \alpha} = e(z_2) & \cdots (16) \end{cases}$$

ここで、$z_1 - \alpha = dz$，$z_2 - \alpha = z_2 - z_1 + z_1 - \alpha = y - dz$

$$y = z_2 - z_1$$

とおくと、式(15)，式(16)はそれぞれ

$$\begin{cases} \dfrac{\mu}{dz} = -e(z_1) & \cdots (17) \\[2ex] \dfrac{\mu}{y - dz} = e(z_2) & \cdots (18) \end{cases}$$

となる。式(17)を式(18)で割ると

$$\frac{y - dz}{dz} = -\frac{e(z_1)}{e(z_2)}$$

よって

$$dz = \frac{e(z_2)}{e(z_2) - e(z_1)} \cdot y \qquad \cdots (19)$$

これを 式(17) に 代入して

$$\mu = -e(z_1) \cdot dz = \frac{-e(z_1) \cdot e(z_2)}{e(z_2) - e(z_1)} \cdot y$$

となる.

［分裂型］′

分裂型のときは

$$\begin{cases} \dfrac{1}{z_1 - \alpha_1} + \dfrac{1}{z_1 - \alpha_2} = e(z_1) & \cdots (20) \\ \dfrac{1}{z_2 - \alpha_1} + \dfrac{1}{z_2 - \alpha_2} = e(z_2) & \cdots (21) \end{cases}$$

ここで $z_1 - \alpha_1 = -dz_1$, $z_1 - \alpha_2 = -dz_2$

$z_2 - \alpha_1 = y - dz_1$, $z_2 - \alpha_2 = y - dz_2$

$z_2 - z_1 = y$

とおくと.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{dz_1} + \dfrac{1}{dz_2} = -e(z_1) & \cdots(22) \\[2ex] \dfrac{1}{y - dz_1} + \dfrac{1}{y - dz_2} = e(z_2) & \cdots(23) \end{cases}$$

ここで $dz_1 + dz_2 = 2X$, $dz_1 \cdot dz_2 = Y$ とおくと

$$\begin{cases} \dfrac{2X}{Y} = -e(z_1) & \cdots(24) \\[2ex] \dfrac{2y - 2X}{y^2 - 2X \cdot y + Y} = e(z_2) & \cdots(25) \end{cases}$$

式(24), 式(25)より Xを消去すると

$$2y + e(z_1) + Y = e(z_2)\{y^2 + e(z_1) y Y + Y\}$$

Yについて 整理すると

$$\{e(z_1) \cdot e(z_2) \cdot y + e(z_2) - e(z_1)\} Y = y\{2 - e(z_2) \cdot y\}$$

よって

$$Y = \frac{y(2 - e(z_2) \cdot y)}{e(z_1) \cdot e(z_2) \cdot y + e(z_2) - e(z_1)}$$

これを 式(24)に代入して X を得る.

これより 2次式 $z^2 - 2Xz + Y = 0$ を解いて dz_1, dz_2 を得る。

5.5 実係数代数方程式への適用

さて、いままで述べた電荷量推定型と分裂型のモデルは複素係数である. これらの方法を実係数モデル化しようとすると、式が複雑になり計算時間の面ではむしろ逆効果であると思われる。そこで、これらの方法で実係数代数方程式を解くときには、モデルはそのままで関数計算のときにのみ、実数演算を用いるようにする.

(収束判定)

$$\varepsilon = \mu \sum_{i=0}^{n} |a_i||z|^{n-i}$$

(ここで μ は計算機イプシロン)

を計算し、この ε を使って

$$|f(z)| \leqq \varepsilon$$

のとき、収束したと判定する。

(減 次)

電荷量推定型では、近似根は、まず. 根の集団の重心付近へとび込むため、平野の方法を2次式化して用いる。[3]

まず. 高次の項からの減次法は

$$\bar{b}_0 = a_0 , \quad \bar{b}_1 = a_1 + p \cdot \bar{b}_0$$

$$\bar{b}_j = a_j + p \cdot \bar{b}_{j-1} + q \cdot \bar{b}_{j-2} \quad (j = 2, n-2)$$

で、これはすでに $f(z)$ の計算時に求まっている。

低次の項からの減次法は

$$\underline{b}_{n-2} = -a_n / q, \quad \underline{b}_{n-3} = -(a_{n-1} + p \cdot \underline{b}_{n-2}) / q$$

$$\underline{b}_j = -(a_{j-2} + p \cdot \underline{b}_{j-1} - \underline{b}_{j-2}) / q \qquad (j = n-4, 0, -1)$$

となる. ここで

$$\max_k |a_k| |z|^{n-k} = |a_M| \cdot |z|^{n-M}$$

であるような M を求めて. $z^2 - pz - q$ で減次した式

$$f_{n-2}(z) = \bar{b}_0 z^{n-2} + \bar{b}_1 \cdot z^{n-3} + \cdots\cdots + \bar{b}_M \cdot z^{n-M-2}$$
$$+ \underline{b}_{M+1} z^{n-M-3} + \cdots\cdots + \underline{b}_{n-2}$$

を得る.

5.6 数値例

比較の対象として複素係数版では, 複素係数代数方程式の解法[6] (POLEQB), ヤラット法[5] (DCJART) を使用し、実係数版では ガーサイト・ジャラット・マック法 (GJMNKD), ジェンキンス・トラウブの方法 (DRJETR) を使用した. 計算機は M-382.

多項式 $f(z)$ は, 4.5 の数値例と同様にして. 複素係数, 実係数の方程式をつくった.

複素係数版

単根のみ

No.	n	時間 (Msec) 電荷量推定	POLEQB	DCJART
1	10	2.1	2.9	9.2
2	15	3.9	5.1	14.2
3	20	7.2	8.0	27.0
4	25	9.1	11.6	40.7
5	30	13.9	17.5	66.7
6	35	17.0	20.9	68.9
7	40	22.8	28.9	115.4
8	45	31.0	31.6	109.4
9	50	33.0	33.6	131.5
10	55	41.0	41.7	149.8

重根を含む

No.	n	時間 (Msec) 電荷量推定	POLEQB	DCJART
1	8	1.4	3.1	7.3
2	16	4.1	7.8	20.3
3	17	4.2	11.0	29.7
4	17	4.7	6.4	20.3
5	21	7.0	13.6	33.8
6	22	7.3	14.2	41.0
7	24	8.8	15.7	40.4
8	25	9.5	17.3	47.6
9	27	9.4	19.2	57.3
10	27	10.1	18.2	47.4

実係数版

単根のみ

No.	n	時間 (Msec) 電荷量推定	GJMNKD	DRJETR
1	17	1.8	3.0	6.3
2	17	2.1	3.8	5.2
3	20	2.6	3.8	6.1
4	20	2.3	5.0	7.7
5	20	2.3	3.8	6.8
6	30	4.3	7.4	16.1
7	30	5.4	7.3	15.2
8	35	5.0	9.0	16.1
9	50	11.5	18.3	39.6
10	50	9.8	19.3	43.3

重根を含む

No.	n	時間 (Msec) 電荷量推定	GJMNKD	DRJETR
1	16	1.4	2.3	4.5
2	16	1.3	2.0	5.8
3	20	1.8	3.3	7.1
4	20	1.9	3.5	9.2
5	20	1.8	3.4	7.0
6	22	2.2	3.9	11.3
7	24	2.8	4.4	9.5
8	24	2.9	4.7	12.4
9	28	3.0	5.1	20.2
10	30	3.4	6.8	19.4

本方法は重根を含む場合でも単根のみの場合と同程度の時間で解いている。又、次数nが高いほど他の方法との時間の比は大きくなっている。

5.7 連立化

Newton法を連立化したときと同様にして、単独の電荷量推定型の方法を連立化することができる。
このとき

$$\begin{cases} e_k(z) = e(z) + \sum_{\substack{i=1 \\ \neq k}}^{m} \dfrac{-\mu_i}{z - z_i} & (k=1,2,\cdots,m) \\ e_k'(z) = e'(z) + \sum_{\substack{i=1 \\ \neq k}}^{m} \dfrac{\mu_i}{(z - z_i)^2} & (k=1,2,\cdots,m) \end{cases}$$

を用いる。
電荷量推定型を連立化すると、近似根の影響を考慮することは計算時間の点でむしろ逆効果になっている。ただし、$f(z) = z^n + 1$ の場合には、近似根は重心 $(z=0)$ へ行ってしまい、$f'(z)=0$, $f''(z)=0$ となって、連立したときにのみ解くことができる. そこで、通常は、連立型は用いず、$f'(z)=0$ and $f''(z)=0$ となったときだけ、連立型へ移行するようにした。

参考文献

[1]. G.R. Garside, P. Jarrat & J. Mack, A New Method for Solving Polynomial Equations, Computer Journal, Vol. 11 PP. 87-90, (1968)

[2]. O. Aberth, Iteration Methods for Finding all Zeros of a Polynomial Simultaneously, Math. Comp. 27, PP. 339-344 (1973)

[3]. 平野菅保，代数方程式の減次，Computrol No. 12, PP. 92-95 (1985)

[4]. 名古屋大学大型計算機センター，ライブラリー・プログラム利用の手引（数値計算編），昭和57年6月

[5]. 富士通，SSLII 使用手引書（科学用サブルーチンライブラリ），昭和55年12月

[6]. 名古屋大学大型計算機センター，ライブラリー・プログラム利用の手引（増補版II），(1985)