

非圧縮性粘性流体解析コードへの MICCG 法の適用

三洋電機(株) 情報技術センター
藤野清次

1. はじめに

最近、汎用の非圧縮性粘性流体解析コードが各種開発され流れの数値シミュレーションが身近なものになってきた。これらは流れ場と連成して温度場の解析も可能であり、更に高いレイノルズ数の流れ(乱流)も扱い易いモデルが提案されインプリメントされてきた。一方コンピュータもハード・ソフト両面で著しい進歩が見られる。このため、熱流体の数値シミュレーションが簡単に行なえるようになり、身近な応用例として、暖房器の室内気流や温度分布計算、ボイラーの熱制御計算、各種機械系の流量分配の問題や熱制御の問題等が挙げられる。

これらの解析を実際に行なってみると、その解析結果と実際の測定値とはかなり合っていたが、まだ問題点も多く例えば計算に時間がかかりすぎるのもその一つである。そこで今回計算時間短縮を図るため上記の流体解析コードの中で最も多く時間がかかっていた圧力補正の計算に着目し改良を行なった。この計算はポアソン方程式に帰着され、これに従来採用されていた加速緩和法(SOR法)の代わりに、前処理付き共役勾配法(PCG法)を適用したところ、大幅に計算時間を短縮することができた。更に圧力補正の方程式を精度よく解けるようになったため、従来までは流速や圧力について精度的に満足のいく解が得られなかったモデルに対しても、精度の高い解を短時間で求めることができるようになった。これは高速化よりも、より本質的なことである。今回はこの結果を中心に報告する。

2. 基礎式

非圧縮性粘性流体の基礎式は、次の質量の保存式と運動量の保存式である。ここで流体速度を $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t, x, y, z) = (u, v, w)$ 、密度を ρ (=一定) とする。

(a) 質量の保存式:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.1)$$

即ち
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

(b) 運動量の保存式:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (2.2)$$

後で乱流の項で用いるために、この式では $(u, v, w) \equiv (v_1, v_2, v_3)$, $(x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$ と置き、慣用のテンソル記法を用いている。

(u, v, w) で書けば、上式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \end{aligned} \quad (2.3)$$

となる。ここで μ は粘性係数、 $\nu = \mu / \rho$ は動粘性係数、また ∇^2 はラプラス演算子であり、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.4)$$

を表わす。また F は流体の単位質量あたりの外力、 $P = P(t, x, y, z)$ は圧力である。ベクトル形では、(2.2) 式は次の様に書ける。

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (2.5)$$

外力 F_i としては、浮力のみを考慮するブジネス (Boussinesq) 近似 (即ち密度差の効果は浮力項のみ働くとの仮定) をとる。したがって

$$F_i = g_i \beta (T - T_0) \quad (2.6)$$

と表わせる。但し g_i = 重力の加速度、 β = 体膨張率、 T = 温度、 T_0 = 基準温度である。更に温度の解析をする場合は、次のエネルギーの保存式を (2.1) 式および (2.2) 式と連成して解かなければならない。

(c) エネルギーの保存式:

$$\begin{aligned} \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここで C_p は定圧比熱、 K は熱伝導率、そして Q は発熱量をそれぞれ表わす。

(d) k-εモデル

乱流モデルとしては、2方程式モデル(k-εモデル)を用いている。これは乱流エネルギーkに対する輸送方程式とその乱流消失率εに対する方程式として次のように与えられる。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial v_i k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{a}{b} \times \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) - \varepsilon + S + G \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial v_i \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{a}{c} \times \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} (S + G) (1 + C_3 R) - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.9)$$

$$\text{但し、} S = a \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$G = g_i \beta \frac{a}{b} \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad R = -G / (S + G) \quad \text{とする。}$$

この(2.8)式と(2.9)式を解いてk, εを求める。

ここでk, εと渦動粘性係数aとの間には、次の関係式が成り立つ。

$$a = C_1 k^2 / \varepsilon \quad (2.10)$$

ここに含まれているパラメータは、経験定数でほぼ同一の値をとられることが多く、我々の場合 $b = 1.0$ 、 $c = 1.3$ 、 $C_1 = 1.44$ 、 $C_2 = 1.92$ 、 $C_3 = 0.8$ 、 $C_4 = 0.09$ としている。

3. 解析方法

我々の場合有限体積法(コントロール・ボリューム法)⁽¹⁾を採用している。以下簡単にその概略を述べる。

(3-1) 領域区分と変数配置

まず解析領域を3次元の直方体と考え、それをX、Y、Zそれぞれの方向に不等間隔に区分する。その区分された最小の単位を要素と呼ぶことにする。図3.1に変数配置図を示す。要素の中心で圧力(P)、温度(T)、乱流量(k, ε)を定義し、要素境界面の中心で面に垂

直な流速を定義する。流速は各境界面毎に合計6個配置される。

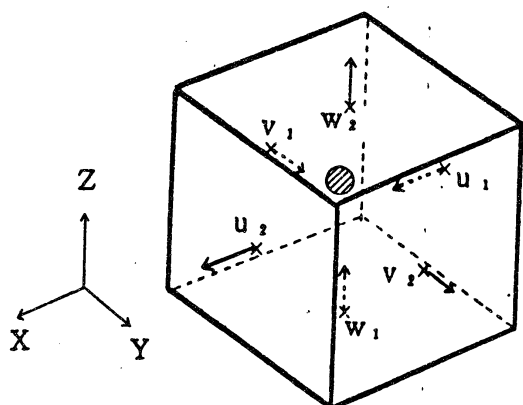


図 3.1 変数配置

● 圧力, 温度, 乱流量
の定義点

X 流速の定義点

(3-2) 解析手順

解析手順の概略を図 3.2 に示す。

(3-3) 離散化手法

質量、運動量及びエネルギーの保存式は、任意の閉曲面に囲まれる検査体積(コントロール・ボリューム法の由来)に関して導きだされたものであるが、ここでは各要素を検査体積と考えて要素毎の保存式を導く。

但しエネルギーの保存式の時の検査体積と運動量の保存式の検査体積は、図 3.3 のように要素半分だけずれていて、流速を定義する面をはさむ二つの要素の半分(図の斜線部分)とする。

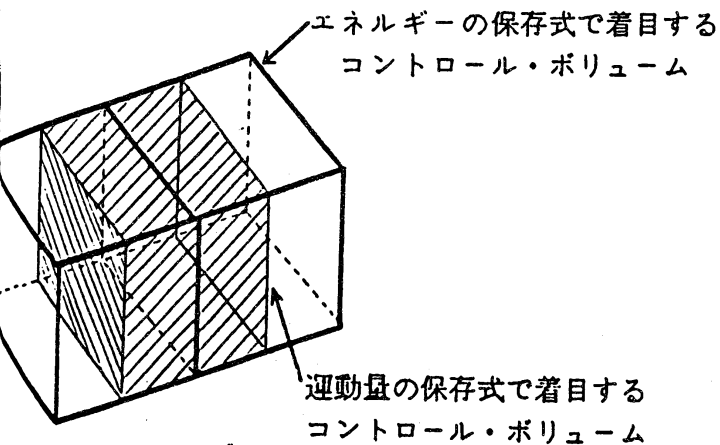


図 3.3 検査体積
(コントロール・ボリューム)

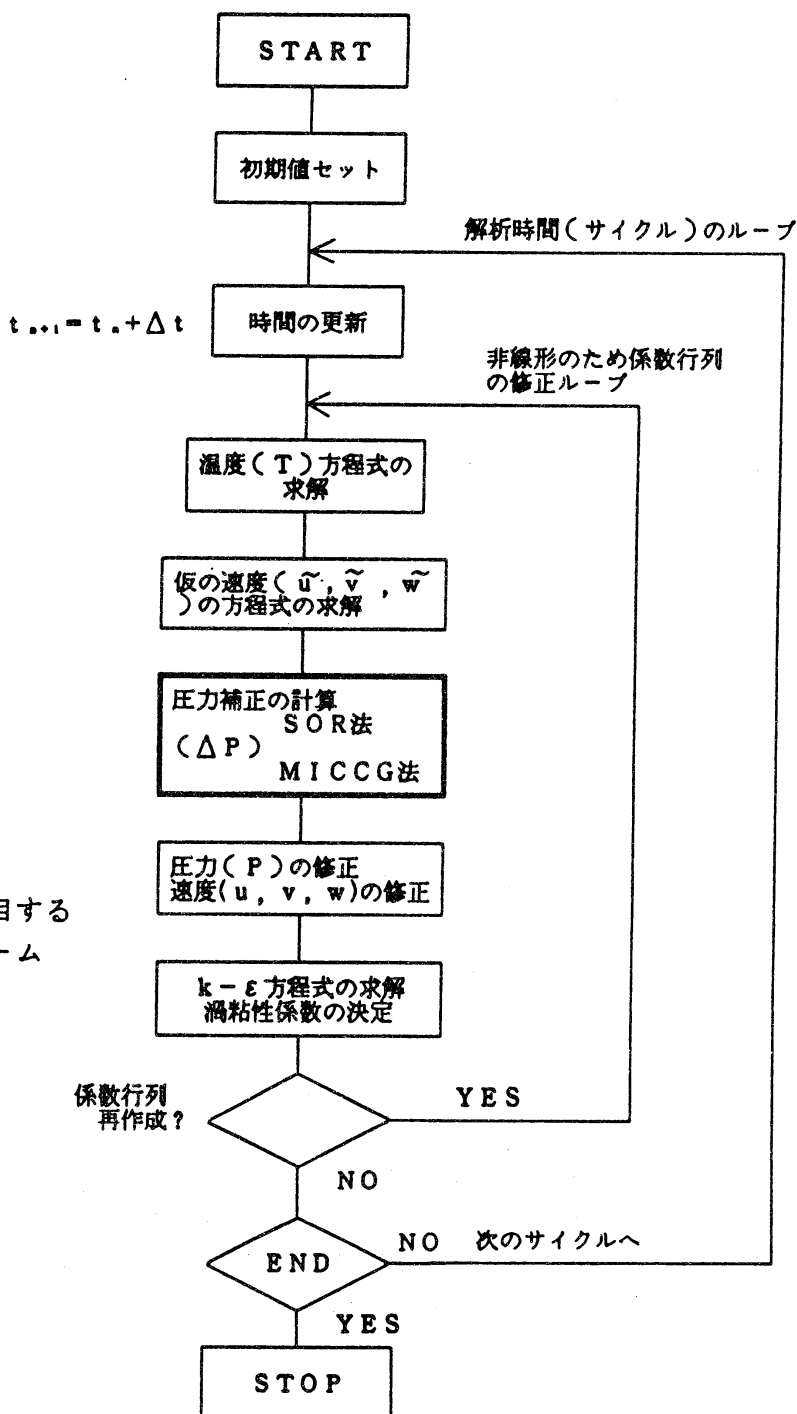


図 3.2 計算手順の概略

要素毎の保存式の導出を図3.2で最初にとり扱う温度(T)方程式を例にとり説明する。今ある要素に着目し、エネルギーの方程式(2.7)式を書き下すと次のようになる。

$$\Delta V \rho C_p (T^{n+1} - T^n) / \Delta t = \sum_{m=1}^6 V_m^n A_m \rho C_p (T_m^{n+1} - T^{n+1}) + \sum_{m=1}^6 A_m K (T_m^{n+1} - T^{n+1}) / d_m \quad (3.1)$$

記号はそれぞれ、

- ΔV : 要素体積
- Δt : 時間間隔
- A_m : 要素の m 面の面積
- V_m^n : 要素の m 面の流速
- d_m : 要素の m 面と接する要素との中心間距離
- T^n : 要素の1サイクル前の温度
- T^{n+1} : 要素の現サイクルの温度
- T_m^{n+1} : 要素と m 面を共有する対応要素の温度

を表わす。整理すると、着目要素の温度とそれに隣接する6つの要素内温度とが、次式のように表わされ

$$T^{n+1} = \sum_{j=1}^6 C_j T_j^{n+1} + S \quad (3.2)$$

ここで T_j ($j = 1 \sim 6$)は隣接する6つの要素内温度とする。これを全領域の要素に拡張すれば連立一次方程式が構成される。

次に図3.2で仮の速度 $\tilde{V} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ の方程式を構成する。これについても温度の方程式の場合の(3.2)式と同様に運動量の保存式から次の(3.3)式が導かれる。

$$\tilde{V} = C_0 V^n + \sum_{j=1}^6 C_j V_j^n + S(P^n) \quad (3.3)$$

ここで仮の速度 \tilde{V} は、着目要素の1サイクル前の流速 V^n と係数 C_0 と、1サイクル前の圧力 P^n から成る項： $S(P^n)$ と、隣接する6つの要素の1サイクル前の流速 V_j^n とそれから計算される係数 C_j の1次結合で表わされる。

しかしながら、(3.3)式では圧力は1サイクル前の値 P^n を用いているため、(3.3)式から求めた流速場は質量の保存式を厳密には満足していない。このため、 P^n に適当な圧力増分 ΔP を加えて、質量の保存式を満足する現サイクル($n+1$)の圧力を求める必要がある。

このため次のような圧力補正法 (Pressure Correction法) がとられる。

(3.4) 圧力補正法

時刻 t_{n+1} では、(2.1) 式、(2.5) 式は次のように書ける。

$$\nabla V^{n+1} = 0 \quad (3.4)$$

$$(V^{n+1} - V^n) / \Delta t + (V^n \cdot \nabla) V^{n+1} = -\frac{1}{\rho} \nabla P^{n+1} + \nu \nabla^2 V^{n+1} \quad (3.5)$$

但し外力 F はここでは無視する。圧力補正法では (3.5) 式において圧力 P^{n+1} に代えて P^n を使い、仮りの流速 \tilde{V}^{n+1} を次式によりまず求める。

$$(\tilde{V}^{n+1} - V^n) / \Delta t + (V^n \cdot \nabla) \tilde{V}^{n+1} = -\frac{1}{\rho} \nabla P^n + \nu \nabla^2 \tilde{V}^{n+1} \quad (3.6)$$

次に (3.5) 式と (3.6) 式より容易に (3.7) 式が導かれる。

$$(V^{n+1} - \tilde{V}^{n+1}) / \Delta t = -\frac{1}{\rho} \nabla (P^{n+1} - P^n) + E \quad (3.7)$$

但し $E = -[(V^n \cdot \nabla) V^{n+1} - (V^n \cdot \nabla) \tilde{V}^{n+1}] + \nu (\nabla^2 V^{n+1} - \nabla^2 \tilde{V}^{n+1})$ である。

ここで流れ場に影響を与える主な要因は圧力の勾配と考えられるので、 $E = 0$ とする。

(3.7) 式で両辺の発散をとり、(3.4) 式を用い、さらに圧力差を $\Delta P (\equiv P^{n+1} - P^n)$ とおくと、

$$\nabla \tilde{V}^{n+1} = \frac{\Delta t}{\rho} \nabla^2 (\Delta P)^{n+1} \quad (3.8)$$

が得られる。

これは $(\Delta P)^{n+1}$ についてのポアソン方程式である。これより圧力差を求めれば、 P^n が既知なので、 P^{n+1} が求まる。

最後に (3.7) 式より

$$V^{n+1} = \tilde{V}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla (P^{n+1} - P^n)$$

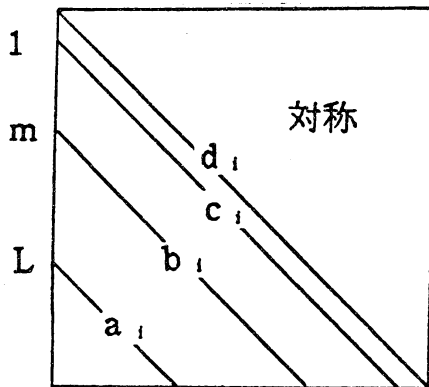
として V^{n+1} が求まる。

以上が 1 サイクル分の計算手順で、元の方程式は非線形のため再度 (3.2)、(3.3) 式の係数を決定し同じ手順を繰り返す。

4. ポアソン方程式に対するMICCG法

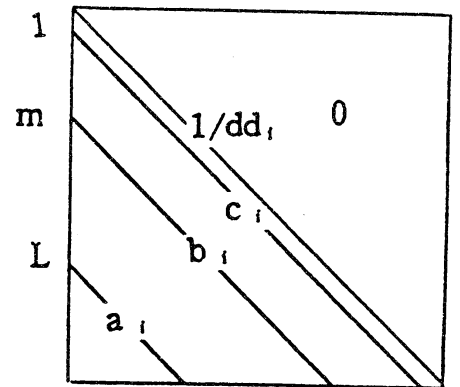
第3章で述べたように圧力補正の方程式はポアソン方程式に帰着される。このポアソン方程式に対しては、既に定評のあるICCG法(Incomplete Cholesky Conjugate Gradient Method)を使えば、他の反復法に比較して圧倒的に速く解けることが、よく知られている。更に三次元問題の7点差分によって得られる係数マトリックスは、非零要素が帯状に規則的に配置されるので、ICCG法の収束を速める工夫を施したMICCG法(Modified ICCG法)が適用できる。

行列Aの形を図4.1に、また非零要素の形を変えないで、不完全三角分解をした後の下三角行列Lの形を図4.2に示す。ここで不完全三角分解後の対角行列Dの要素を< d d i >とする。以下の記述は、後氏の論文⁽⁵⁾に従う。



行列Aの形

図4.1



分解後の行列Lの形

図4.2

(4-1) MICCG法の不完全LDL^T分解

不完全三角分解後の対角行列Dの要素< d d i >は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 d d i = 1 / \{ & d i - c_i \times d d_{i-1} \times [c_i + \alpha \times (a_{i+L-1} + b_{i+m-1})] \\
 & - b_i \times d d_{i-m} \times [b_i + \alpha \times (c_{i+1-m} + a_{i+L-m})] \\
 & - a_i \times d d_{i-L} \times [a_i + \alpha \times (b_{i+m-L} + c_{i+1-L})] \} \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

ここで、未知数の番号付けは、X方向、Y方向、Z方向の順に付ける。またそれぞれの方向の分割数をNX、NY、NZとする時、 $m = NX$ 、 $L = NX \times NY$ である。

さらに加速係数⁽⁷⁾ α は、 $\alpha = 0.98$ と 0.95 の二つの場合について、第5章で述べる数値実験を行なったが、あまり差は見られなかったので、 $\alpha = 0.95$ を採用している。

(4-2) MICCG法の計算方法

連立一次方程式を

$$AX = b \quad (4.2)$$

とし、 X_n を反復をn回繰り返した時の解ベクトルとする。収束判定値 ε としては、次の相対残差2乗ノルムを採用する。

$$\varepsilon = \|AX_n - b\|_2 / \|b\|_2 \quad (4.3)$$

次にMICCG法の計算方法を図4.3に示す。

[手順1] 行列Aを LDL^T の形に不完全三角分解する。

$$r_0 = b - AX_0$$

$$P_0 = [LDL^T]^{-1} r_0$$

[手順2] 以下の手順を相対残差2乗ノルムが、ある小さな値 ε より小さくなるまで、繰り返す。

$$\alpha_n = \frac{(r_n, [LDL^T]^{-1} r_n)}{(P_n, AP_n)}$$

$$X_{n+1} = X_n + \alpha_n P_n$$

$$r_{n+1} = r_n - \alpha_n AP_n$$

$$\beta_n = \frac{(r_{n+1}, [LDL^T]^{-1} r_{n+1})}{(r_n, [LDL^T]^{-1} r_n)}$$

$$P_{n+1} = [LDL^T]^{-1} r_{n+1} + \beta_n P_n$$

図4.3

5. 適用事例

MICCG法による効果を計算時間と解の精度の観点から検討するため次のような数値実験を行なった。

(1) 3次元噴流解析

計算対象モデルを図5.1に示す。Y軸に関して対称なモデルである。図の左側の噴出口より空気を初速度1.2 m/秒で噴出した時の気流の様子を解析する例である。次に計算に用いたパラメータを表5.1に示す。この時のレイノルズ数は約1000である。この解析結果を図5.1と図5.2に示す。図5.1は、Y軸に垂直な断面の流速ベクトル図、また図5.2はX軸に垂直な断面の流速ベクトル図である。

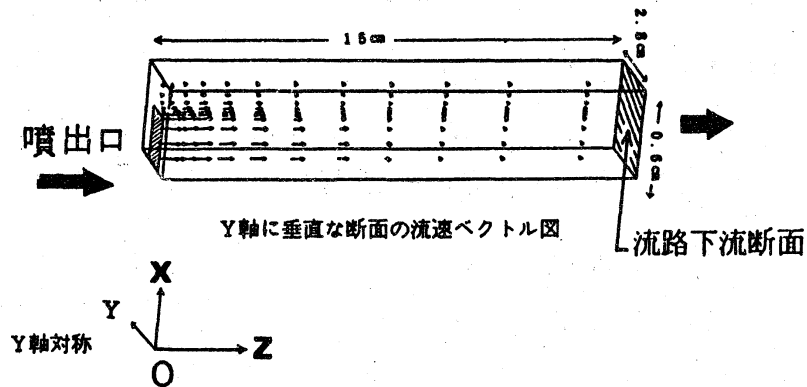


図5.1 解析対象モデル

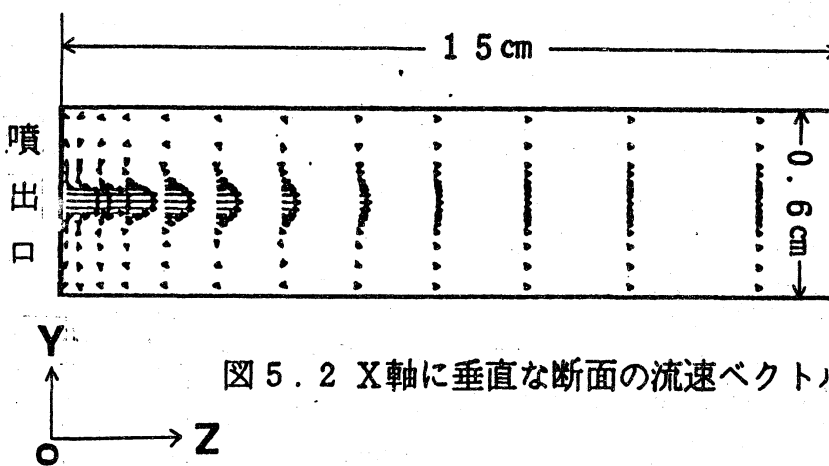


図5.2 X軸に垂直な断面の流速ベクトル図

要素数	2040 (10×17×12)
タイム・ステップ	0.005秒
サイクル数	50 (0.25秒)
各サイクルの収束判定値	相対残差2乗ノルム=10 ⁻⁴

表5.1 計算条件

図5.3は圧力補正の方程式をSOR法とMICCG法で解いた時の反復毎の収束状況を示したものである。縦軸は相対残差2乗ノルム、横軸は反復回数を表わす。図中、数字の1、2、3は、時間の経過1サイクル目、2サイクル目、3サイクル目を意味する。SOR法(加速パラメータ: $\omega = 1.8$)の相対残差が非常に緩やかなカーブでしか減ってゆかないのに比べて、MICCG法の相対残差は最初の反復25回ぐらいまでは増減を繰り返すが、その'停滞期'

を過ぎると急激に減少する。反復計算の収束判定値を 10^{-3} としたときSOR法の場合、いずれのサイクルも収束せず、反復回数300回で計算を打ち切った。一方MICCG法の場合は各サイクルとも30回前後(27回~39回)の反復で収束した。図5.4に各サイクルの反復回数の変化を20サイクルまで示す。

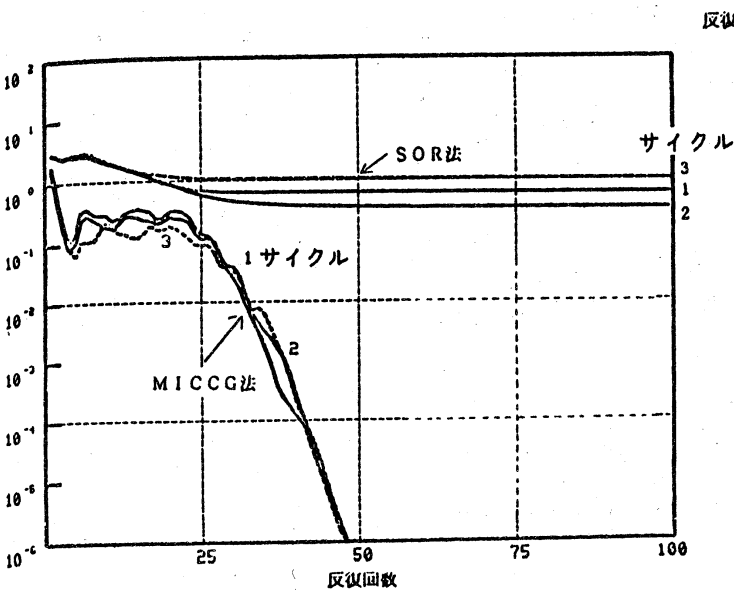


図5.3 収束状況

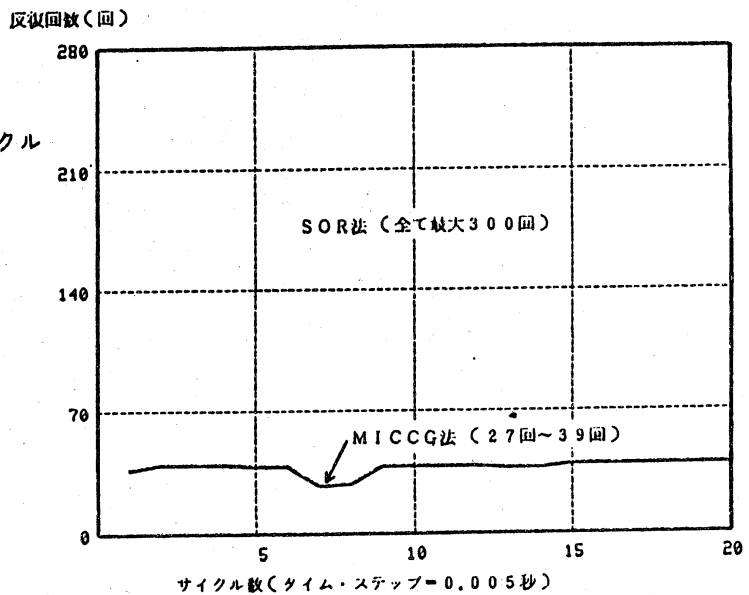


図5.4 各サイクル毎の反復回数の変化

次に計算時間について検討した。

図5.5は計算時間の短縮の様子を示したものである。この図からわかるように圧力補正の計算は約1/7に減り、また全体の計算時間も約1/5と大幅に減少した。

図の中で、その他の計算とは係数マトリクスの算出、速度成分(u, v, w)、圧力P、及び乱流量 κ 、 ϵ の計算をさす。この計算時間がわずかに増加しているのは、この解析コードのメイン・プログラムで、係数マトリクス、解・定数ベクトルが3次元配列であるのに対し、サブ・プログラム化したMICCG法では上の各配列は一次元配列を用いており、MICCG法の場合はその連結に要する時間が加算されたためである。

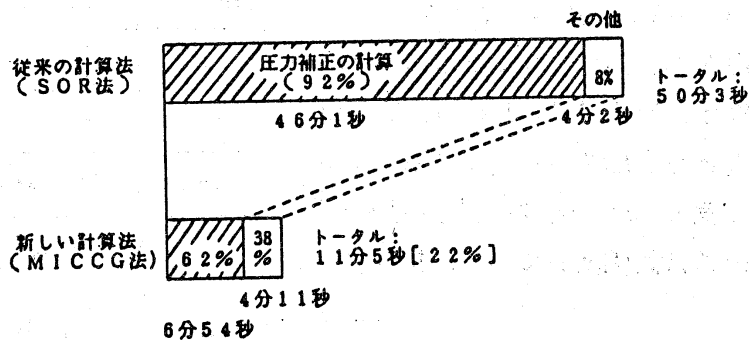


図5.5 計算時間の比較

図5.6は、流路下流の断面(図5.1参照)での流量を2サイクル毎に計算して、流入量に対する割合をプロットしたものである。縦軸には真値(流入量の意味)と計算値との誤差の割合をとり、横軸にはサイクル数をとった。また表5.2はその時の結果を表でまとめたものである。SOR法に関する表は、加速パラメータと流量・計算時間との関係を表わし、MICCG法に関する表は、収束判定値と流量・計算時間との関係を表わしている。

真値との誤差(%)

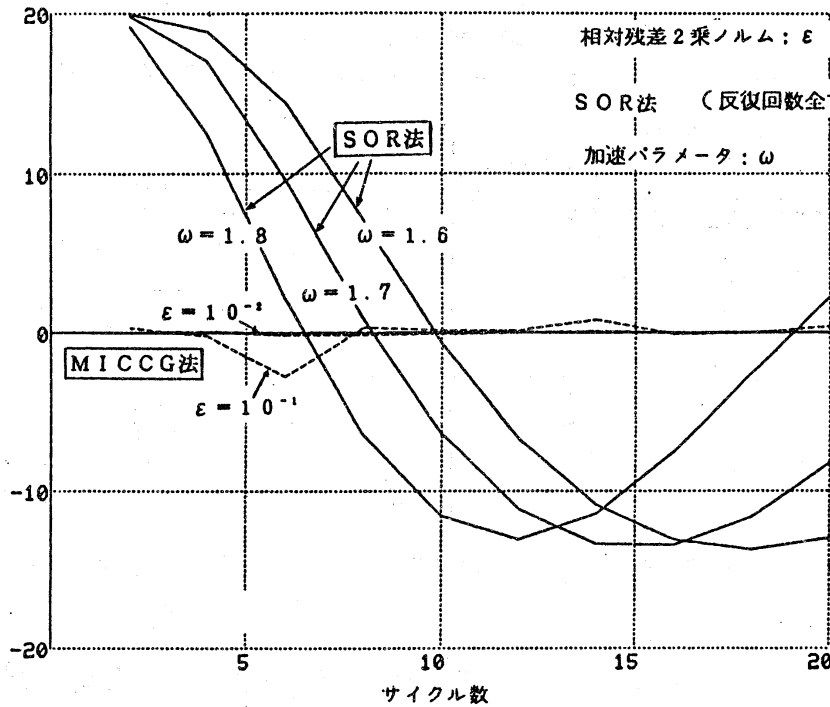


図5.6
流路下流断面の
流量のプロット

(2サイクル毎に流量計算)

図5.6でSOR法については加速パラメータ： $\omega = 1.6, 1.7, 1.8$ の3ケースを実線でプロットしている。いずれの場合も流入量と流出量との差は減衰曲線的に減少する。これ以外の加速パラメータでも計算してみたが、大同小異であった。したがって最適のパラメータを求めることは時間の制約のため完全には行っていない。

一方MICCG法の場合の流入量と流出量との差を、相対残差 $\epsilon = 10^{-1}$ と 10^{-2} の二つのケースを、図5.6に点線で示す。その時の誤差は、表5.2からもわかるように非常に小さい。

このような理由から、図5.5で示した両手法の計算時間の比率は、MICCG法の収束判定値が 10^{-2} であることも考慮すると、更に拡大すると思われる。また表5.2から、収束判定値と流入量と流出量との差は比例関係にあり、相対残差2

加速パラメータ	真値との誤差	圧力補正の求解の計算時間
$\omega = 1.6$	-13.1%~+19.2%	18分19秒
$\omega = 1.7$	-13.4%~+19.9%	17分45秒
$\omega = 1.8$	-13.7%~+20.0%	18分27秒

SOR法

収束判定値	真値との誤差	圧力補正の求解の計算時間	SOR法との比較
10^{-1}	-2.8%~+0.8%	1分8秒	15.8倍
10^{-2}	-0.1%~+0.1%	1分57秒	9.1倍
10^{-3}	全て0.03%以下	2分45秒	8.4倍

MICCG法

($\omega = 1.7$ の時と比較)

表5.2 流路下流断面
の流量計算

乗ノルムを反復計算の収束判定値に用いることは、妥当であると考えられる。

(2) 2次元車体周辺の乱流解析

計算対象モデルとメッシュ分割を図5.7に示す。車体形状は階段形状に近似し、メッシュ数は $67 \times 33 = 2211$ で不等間隔メッシュである。計算に用いたパラメータを表5.3に示す。レイノルズ数は、 2.0×10^4 (速度80 km/h相当)である。

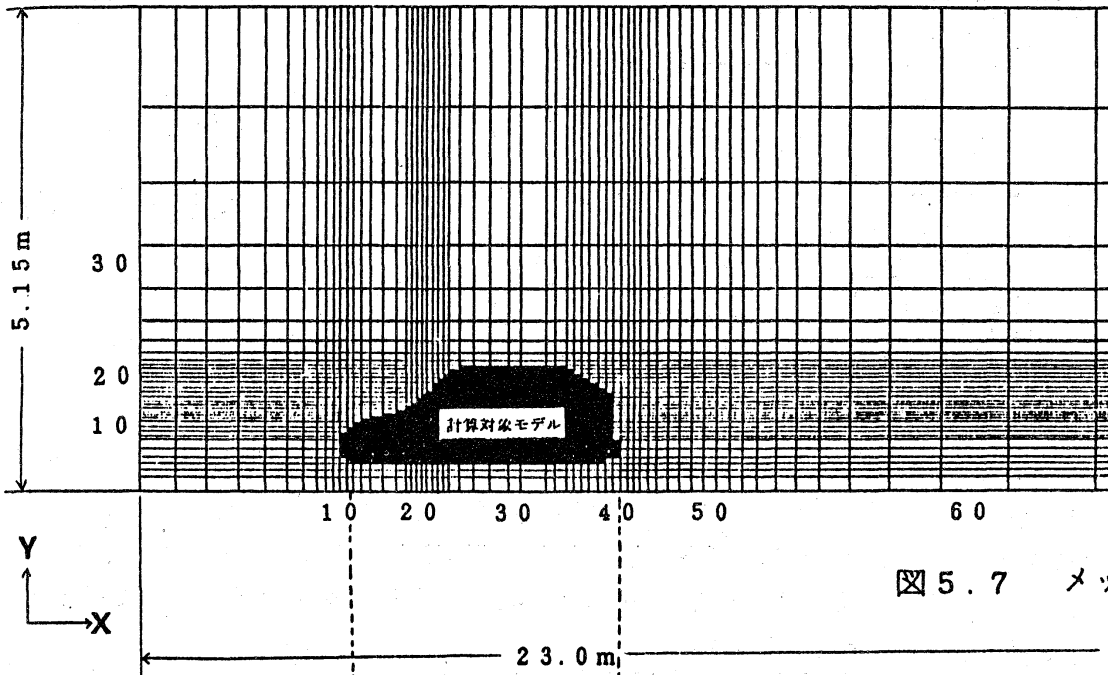


図5.7 メッシュ分割図

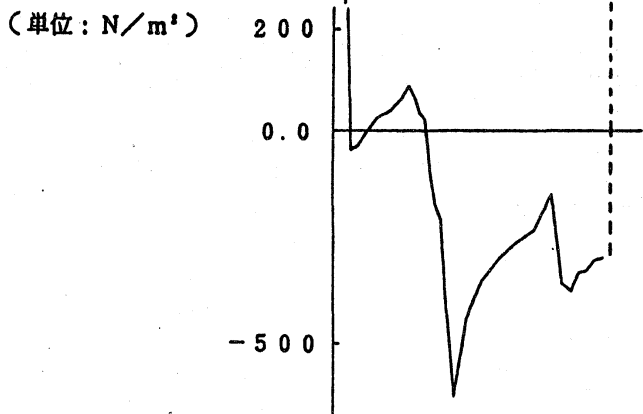


図5.8 車体表面の上側における圧力分布

要素数	2211 (67×33)
タイム・ステップ	0.005秒
サイクル数	150 (0.75秒)
各サイクルの収束判定値	相対残差2乗ノルム = 10^{-4}
レイノルズ数	2×10^4 (80 km/h相当)

表5.3 計算条件

図5.8～図5.10に150サイクルまで計算した時の解析結果を示す。図5.8は、車体表面の上側における圧力分布を示す。メッシュが荒い割には、解析結果はもっと精密な解析を行なった報告⁽⁹⁾とよく合っている。また図5.9は車体周辺の乱流を流速ベクトルで表示したものである。車体の背後にはうず領域の存在が認められる。また図5.10に車体周辺の圧力分布を示す。

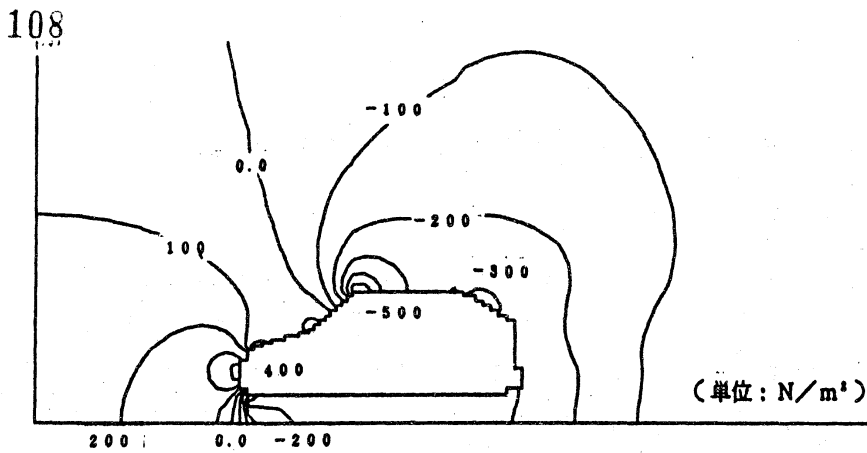


図 5.10
圧力分布図

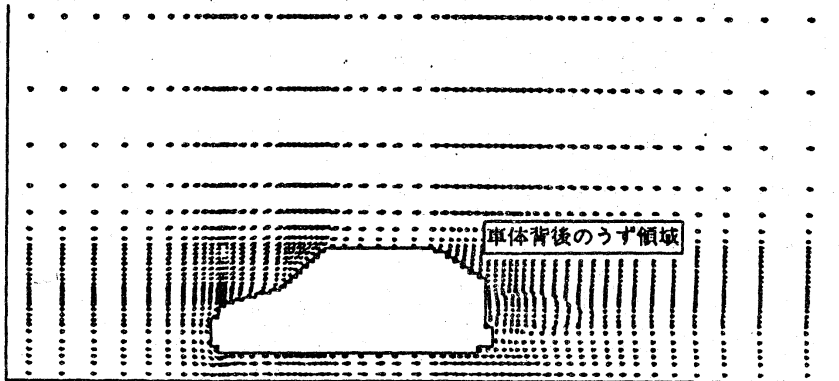


図 5.9
流速ベクトル図

流速 80 km/h

次に図 5.11 に圧力補正の計算における SOR 法 MICCG 法の反復毎の収束状況を示す。前の例とほとんど同じ傾向を示している。収束判定は相対残差で 10^{-3} で行なったが、SOR 法の場合収束せず 300 回で計算を打ち切っている。一方 MICCG 法の場合 30~40 回で収束した。図 5.12 に計算時間の短縮の様子を示す。圧力補正の計算では約 $1/6$ に減り、全体の計算時間も約 $1/4$ と大きく減少した。

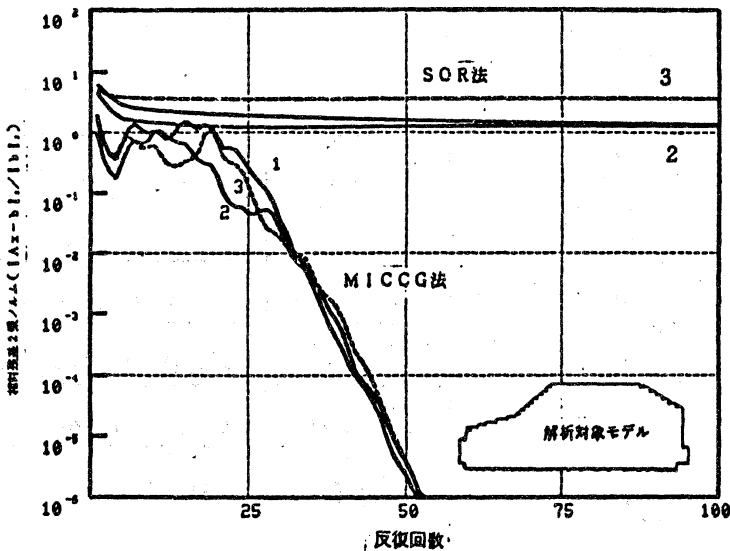


図 5.11 収束状況

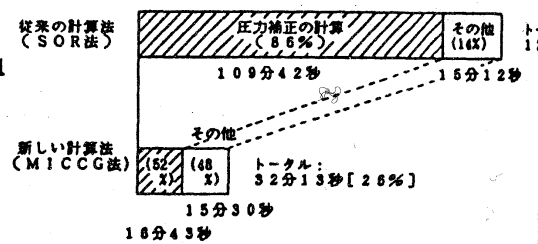
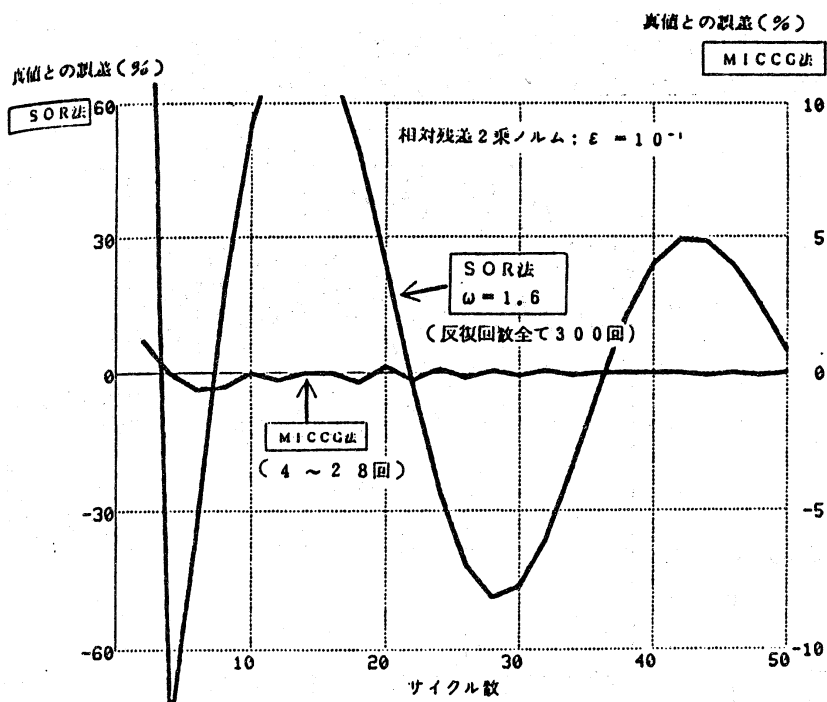


図 5.12 計算時間の比較

図 5.13 は車体後方の断面 (計算領域の境界上) での流出量と車体前方での流入量との一致度を見たものである。収束判定値を 10^{-1} とした時の結果を 2 サイクル毎にプロットした。SOR 法の加速パラメータは $\omega = 1.6$ の時のものを表示しているが、他の値の時も同様の結果であった。即ち非常に振幅の大きい減衰曲線には相違はなかった。一方 MICCG 法の場合

は、表 5. 4 の結果からわかるように約 1% 以内で収まった。



SOR法

加速パラメータ	真値 (= 流入量) との誤差	圧力補正の求解の計算時間
$\omega = 1.6$	-97.4% ~ +78.2%	14分37秒
$\omega = 1.8$	-85.4% ~ +62.5%	14分40秒

MICCG法

収束判定値相対残差2ノルム	真値 (= 流入量) との誤差	圧力補正の求解の計算時間	SOR法との比較
10^{-1}	-0.6% ~ +1.4%	53秒	16.4倍
10^{-2}	+ -0.1% 以内	1分33秒	9.4倍
10^{-3}	0	2分21秒	6.2倍

表 5. 4

図 5. 1 3 車体後方の断面 (計算領域の境界上) での流出量と車体前方での流入量との一致度

(3) チャンネル内の乱流熱解析

計算対象モデルとその断面を図 5.14 に示す。チャンネル内部は、乱流促進体として図のような構造をしている。また固体部は発熱し、その熱を図の左より注入する空気 (初速度 1.5 m/秒) によって冷却する。

このシミュレーションは、

(i) 固体部を、場所によらず均一に冷却する (特にチャンネルの後方部が問題)

(ii) チャンネルの前面部と後面部の圧力の差をできるだけ小さくする。

などを目的とし、図 5.14 はその一例である。

計算に用いたパラメータは、
 要素数 = 4480 (20 × 7 × 32)
 タイムステップ = 0.002 秒
 レイノルズ数 = 10^4

等である。

図 5. 1 4 解析対象モデル

チャンネル内の乱流熱解析

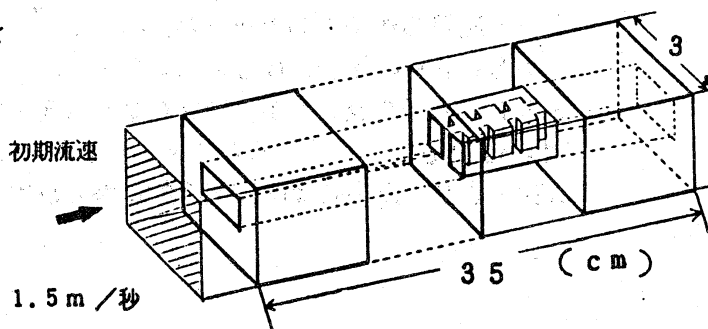
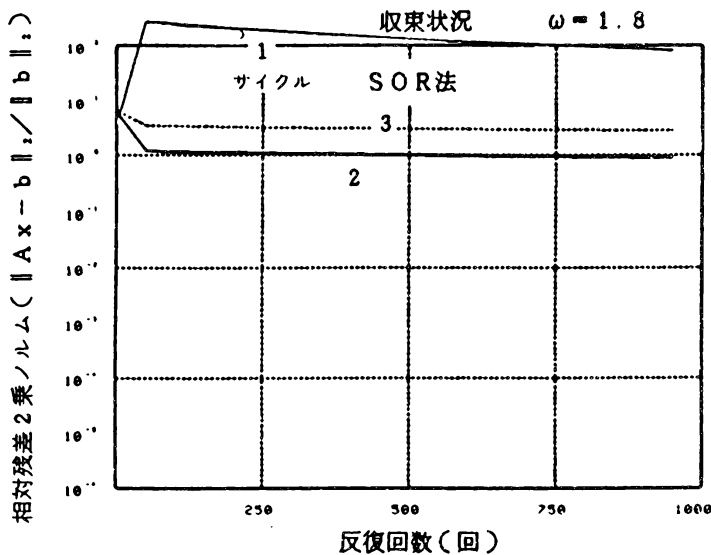


図 5.15は圧力補正の方程式をSOR法で、図 5.16はMICCG法で解いた時の反復毎の収束状況を示す。SOR法の場合は最初の3サイクル、MICCG法の場合は最初の6サイクル分をプロットしたもので、もっと時間が経過したサイクルでも同じ現象であった。

図からわかるように、SOR法の場合は残差は微かに減少(収束せずと表現した方がよい?)し、一方MICCG法の残差は大きくゆれるが、約150回目の反復以降は急速に減少する。

図 5.15

SOR法の収束状況



MICCG法

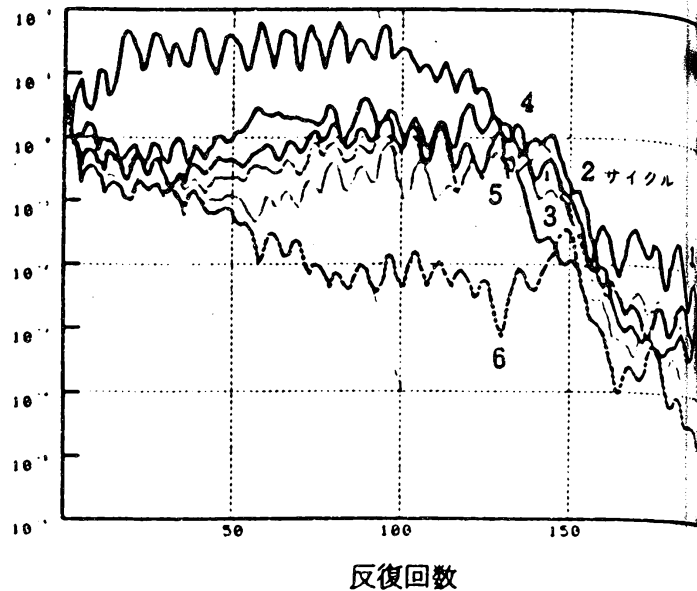


図 5.16

MICCG法の収束状況

次に図 5.17に各サイクル毎の反復回数の変化を示す。収束判定値を 10^{-2} とした時、10サイクル以降の反復は、10~20回と比較的安定し得られた計算結果(流速・圧力に関して)も一応満足のゆくものであった。

一方SOR法の場合、はじめの5サイクルは反復を1000回、次の6~250サイクルは反復を450回繰り返したが、計算結果(流速・圧力ともに)は測定値と大きく違っていた。計算時間を図 5.18に、またチャンネル前面部と後面部の圧力差の時間経過を図 5.19に示す。SOR法の場合、圧力差はほぼ直線的に増え続けるばかりであった。

MICCG法の場合、最初の20サイクルでほぼ一定の値($P = 230$)となり、実際の測定値($P = 205$)によく合っていた。約10%の差は、 mmHg の測定値、固体部の材質の違い、測定器の精度などに起因するものと判断される。

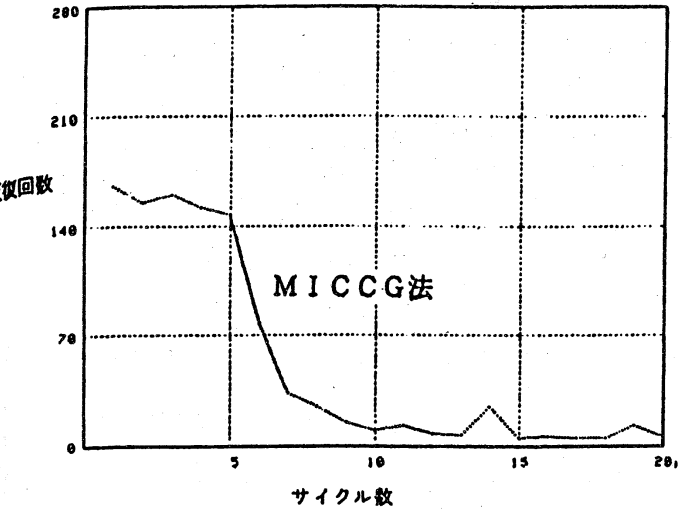


図 5.17 各サイクル毎の反復回数の変化

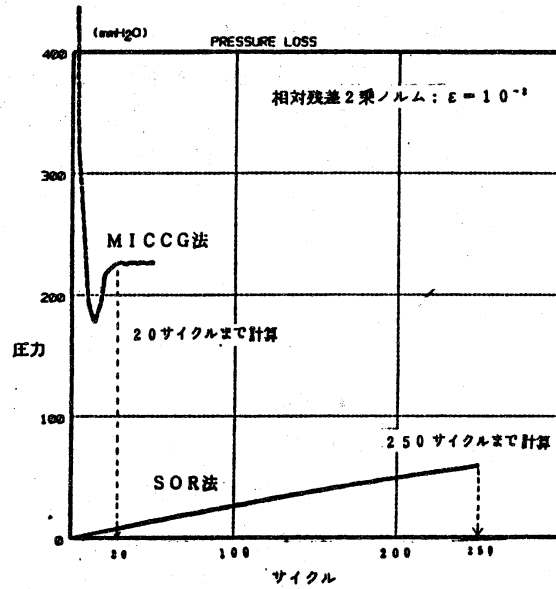
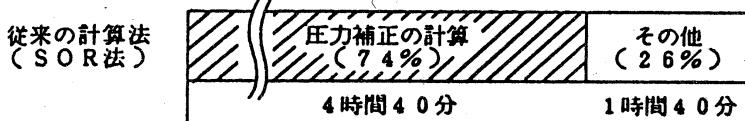


図 5.19

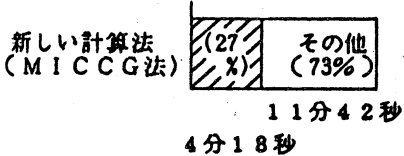
チャンネル前面部と後面部の圧力差の時間経過

250 サイクルまで計算



トータル：
6時間20分

20 サイクルまで計算



トータル：
16分

図 5.18

計算時間

6. まとめ

非圧縮性粘性流体の解析に於て計算に最も多く時間がかかっていた圧力補正の計算(ポアソン方程式)をSOR法に代えてMICCG法を適用したところ、層流・乱流問題ともに数倍以上の高速化が実現できた。更に従来の方法では質量の保存式を完全に満たすような精度は得られなかったのに対し、新しい方法では、反復の収束判定に用いる相対残差の要求値に応じて完全に質量の保存式を満たすことができる。したがって計算時間の短縮の比率は精度との兼ね合いも含めるともっと大きくなり、MICCG法が大変有効であることがわかった。なお本報の数値実験は、UNIVAC 1100/83システムによって行なわれたことを付記する。

7. 謝辞

本研究にあたり御指導を賜わり、また発表の機会を与えていただいた 筑波大学・電子情報工学系 森正武教授に深く感謝いたします。

また日頃より数値解析全般にわたり御指導・御助言をいただく 中部大学・経営情報学部 二宮市三教授に深く感謝いたします。

また本発表に際し、有益なる御示唆及び資料の提供を受けた (株)ソフトウェア・クレイドル 中西純一氏 並びに (株)センチュリー・リサーチ・センター 松永史彦氏 に謝意を表します。

8. 参考文献

- (1) P. J. ローチュ(高橋 他訳): コンピュータによる流体力学(上)、(下)、構造計画研究所、1978
- (2) 村田健郎: 科学技術計算と高速計算法
Computer Today、2、P51~61、1984
- (3) 村田健郎: 大形線形計算技法とスーパーコンピュータ
情報処理研修センター、1985
- (4) 中島・森・渡辺: 潮汐流の有限要素解析に現れる連立一次方程式に対するICCG法、数理科学講究録 NO. 483、P63~85、1983
- (5) 後 保範: ベクトル計算機向きICCG法、数理科学講究録 NO. 514、P110~134、1984
- (6) 名取 亮: 大形連立一次方程式の高速反復解法、情報処理研修センター、1984
- (7) 村田・小国・唐木: スーパーコンピュータ、丸善、1985
- (8) (株)ソフトウェア・クレイドル: STREAM使用説明書、1984
- (9) 小林・諸岡: k-εモデルを用いての二次元車体周りの乱流予測、日本機械学会論文集(B編)、Vol. 51、NO. 466、P1962~1965、1985