数理解析研究所講究録
第585巻 1986年 150-175

DE変換公式の最適性について

筑波大 電子・情報 杉原 正顯(Masaaki Sugihara)

§1. はじめに

1974年，DE変換公式がある種の最適性をもつ変数変換型の数値積分公式として数値解析の分野に登場してからすでに10年をこえる歳月を経た。その間に，この公式は多くの数値積分問題に応用され，その有効性が実証されるとともに，その限界もまた明らかとなった。その結果，DE変換公式の導出にあたっての最適性に関する議論を精密化する必要性のあることが明らかとなった．一方，近年，数値積分公式の研究が大きく進み（[3]），関数空間上の数値積分公式（特に最適積分公式，または，最小ノルム公式）に関する研究について多くの成果が得られた．本研究では，これらの研究結果をふまえて，DE変換公式の最適性について考察を加える．

まず，§2において，DE変換公式の最適性を導くにあたっての議論を取りあげ，その精密化の必要性を指摘する．

§3では，関数空間上の数値積分公式(最適積分公式等)の研究として典型的，かつ，DE変換公式の最適性と関連するH^p空間上の数値積分公式に関するStenger等によって得られた結果を紹介し，§4で行なうDE変換公式の最適性に関する考察への橋渡しとなる考察を行なう。§4においては，ある関数空間を導入し，DE変換公式の最適性を導びくにあたっての議論を精密化する。§5では，今後の課題について記す。

§2. "DE変換公式の最適性"に関する高橋・森による議論とその問題点

ここでは，"DE変換公式の最適性"に関する議論を文献[10], [11]に従って再生し，その議論の問題点を指摘する。

まず，[10], [11]では，次の"無限区間$(-\infty, \infty)$における解析関数の積分に対する台形則の最適性"を示す。

"無限区間での積分$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$を数値積分公式$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k f(a_k)$で近似する時の誤差の特性関数を$\Phi_A$とする：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx - \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k f(a_k) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \Phi_A(z) f(z)\,dz .$$

そして，誤差の特性関数の漸近減衰率γを

$$\gamma = \lim_{|d|\to\infty}\left(\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2R}\int_{-R+id}^{R+id}\left\{-\frac{\partial}{\partial y}\log|\Phi_A(z)|\right\}dz\right)$$

で定義する（この量が，任意の積分公式に対して定義され得るものではないことに注意せよ）．さらに，この漸近減衰率 γ が最大となる数値積分公式を最適の公式と定義する．この時，台形則は，単位長さあたりの標本点（分点）の個数が一定の数値積分公式のうちで最適な公式である．”

ここで，問題となる点は，台形則の最適性の議論が誤差の特性関数の性質を基にしている点である．自然には，やはり，台形則が生成する誤差そのものに関する最適性の議論が行なわれるのが望ましい．

次に［10］，［11］では，以下のように議論をすすめる．

“無限区間 $(-\infty, \infty)$ において，台形則が最適であることが明らかとなったので，$(-1, 1)$ 上の積分 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ に対しては，適当な変数変換 $x = \varphi(u)$ を用いて，$(-\infty, \infty)$ 上の積分に変換し，変換後の被積分関数に対して，台形則を適用すればよいことがわかる．ただし，無限和の台形則値 $h\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\varphi(k\cdot h))\varphi'(k\cdot h)$ を求めることは出来ないので，k に関する無限和を適当な $-N_1$ から N_2 までで打ち切る．この時，数値積分誤差は，無限区間における台形則の特性関数 $\Phi_{台形則}(z)$ を用いて，次のように評価できる．

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du - \sum_{k=-N_1}^{N_2} h\cdot f(\varphi(k\cdot h))\cdot\varphi'(k\cdot h) \right|$$

$$\le \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(u))\varphi'(u)du - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h\cdot f(\varphi(k\cdot h))\varphi'(k\cdot h)\right| + \sum_{\substack{k>N_2\\ k<-N_1}} h\left|f(\varphi(k\cdot h))\cdot\varphi'(k\cdot h)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \Phi_{\text{台形則}}(z)\, f(\varphi(z))\,\varphi'(z)\,dz\right| + \sum_{\substack{k>N_2\\ k<-N_1}} h\left|f(\varphi(k\cdot h))\cdot\varphi'(k\cdot h)\right| \quad \cdots\cdots(2.1)$$

ここで，

$$\Phi_{\text{台形則}}(z) = \begin{cases} \dfrac{-2\pi i}{1-\exp\left(-\frac{2\pi i}{h}z\right)} & (\mathrm{Im}\, z>0) \\ \dfrac{2\pi i}{1-\exp\left(\frac{2\pi i}{h}z\right)} & (\mathrm{Im}\, z<0), \end{cases}$$

また，積分路Cは図1のようにとる．

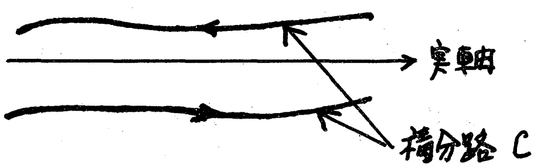

図1. 積分路C

誤差評価(2.1)の才1項は，$2\pi|\mathrm{Im}\, z|\gg h$ の時，$|\Phi_{\text{台形則}}(z)|\approx 2\pi\exp\left(-\frac{2\pi}{h}|\mathrm{Im}\, z|\right)$ と評価されることからわかるように，$f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)$ の虚軸方向の増大度によって決まる（$f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)$ の虚軸方向の増大度が小さい方が，この項は小さくて良い）．また，才2項は，$f(\varphi(z))\varphi'(z)$ の実軸方向の減少度によって決まる（$f(\varphi(z))\varphi'(z)$ の実軸方向の減少度が大きいほど，この項は小さくて良い）．ところが，一般に，解析関数の絶対値が実軸上

で $z=x\to\pm\infty$ の時, 急減少であればあるほど, 虚軸方向で $z=iy\to\pm i\infty$ の時, 増大が急になるので, (2.1) の第1項と第2項を同時に小さくすることは出来ず, 両者がバランスするような変換 $x=\varphi(u)$ に対して誤差は最も小さくなる."

そこで, [10], [11] では, 典型的な変数変換の例: $\varphi(u)=\tanh(u^m)$, $\tanh(\frac{\pi}{2}\sinh(u^m))$, $(m=1,2,\cdots)$ の場合に, 応用上重要と思われる関数 $(1-x^2)^{\alpha}f(x)$ ($f(x)$は, $[-1,1]$ を含むある開集合上で解析的な関数) について, 具体的に (2.1) の評価を行ない, $\varphi(u)=\tanh(\frac{\pi}{2}\sinh(u))$ (二重指数関数型変数変換) が最適であると結論づけている.

ここで, 当然, 問題となる点は, 典型的な変数変換, 及び, 被積分関数についての誤差解析をしている点であり, もう少し一般的状況 (変数変換や被積分関数) において, 二重指数関数型変数変換の最適性をいう必要がある.

[10] においては, さらに, それまでの考察をもとに, 一般の解析関数の積分に関して, 次の"二重指数関数の原理" をもとにして, 数値積分公式を構成すればよいことが述べられている.

《二重指数関数の原理》

"与えられた積分 $\int_{[a,b]}f(x)\,dx$ に対して, 区間 $[a,b]$ を $(-\infty,\infty)$ に変換し, かつ, 変数変換後の被積分関数 $f(\varphi(u))\varphi'(u)$ が

$|u|\to\infty$で二重指数関数的に減衰するような変換 $x=\varphi(u)$ を施し，変換された積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du$ に対して等間隔なきざみ幅の台形則を適用する。"

しかし，この原理は原理たりえない．実際，$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ にこの原理にしたがって[10]に与えられている変数変換 $x=\sinh(\frac{\pi}{2}\sinh(u))$ を適用しても，よい数値積分結果は得られない（[0,1]区間であっても，$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)/\sqrt{x}\,dx$ （[12]）などは，二重指数関数型変数変換をしても，だめである．また，この種の積分にIMT公式などを適用しても同様である.） 従って，この原理を改訂する必要がある。

以上，３つ問題点をあげたが，これらの問題点が従来のDE変換公式の最適性の議論にあることをふまえて，以下，DE変換公式の最適性について考察する．なお，従来の議論にここであげたような問題点のあることは，DE変換公式の発明（発見？）者の１人である森正武教授御自身よくご存知であり，実際的問題におけるDE変換公式の有効性を見て，DE変換公式の最適性に関してより精密な議論が可能であることを私に示唆されたのは，森正武教授御自身である．

§3. H^p 空間における数値積分公式（最適数値積分公式）の研究結果について

近年，数値積分公式の研究の1つとして，関数空間（Banach空間）上での数値積分公式（最適数値積分公式等）の研究が，盛んに行なわれるようになった。ここでは，DE変換公式の最適性に関して§4で述べるような形での考察に到るにあたって端緒となったH^p空間における数値積分公式に関する研究結果について記す。

まず，$H^p(U)$（Hardy空間 $H^p(U)$：U（単位円）内で解析的で，$\lim_{r\to 1-0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p}$ が有界となるような関数族にノルムを $\|f\|_p=\lim_{r\to 1-0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p}$ で入れた関数空間）における数値積分公式の研究結果を記す。

$\int_{-1}^{1} f(x)dx$，$f\in H^p(U)$ に対する数値積分公式 $\sum_{j=1}^{N} A_j f(a_j)$ について誤差生成作用素 $E_N(a_1,\cdots,a_N;A_1,\cdots,A_N)$ を

$$E_N(a_1,\cdots,a_N;A_1,\cdots,A_N)(f)=\int_{-1}^{1} f(x)dx-\sum_{j=1}^{N} A_j f(a_j)$$

で定義し，その作用素ノルムを

$$\|E_N\|=\sup_{f\in H^p(U)}\left(\frac{|E_N(f)|}{\|f\|_p}\right)$$

とする。この時，次が成立する（[1]，[2]）。

$$c_1\frac{1}{N^{1/2q}}\exp\left(-\pi\sqrt{\frac{N}{q}}\right)\le \inf_{a_j,A_j\in\mathbb{R}}\|E_N(a_1,\cdots,a_N;A_1,\cdots,A_N)\|\le c_2\frac{1}{N^{1/2q}}\exp\left(-\pi\sqrt{\frac{N}{q}}\right), \quad \cdots\cdots(3.1)$$

ここで，$1<p\le+\infty$ であり，qは $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ によって定まる数。

ただし，この評価を達成するような具体的な数値積分公式はわかっていない．具体的な数値積分公式に対する誤差生成作用素のノルム評価としては，tanh-則：

$$h \cdot \sum_{j=-N/2}^{N/2} f\left(\tanh\left(\tfrac{1}{2}jh\right)\right)\cdot \tanh'\left(\tfrac{1}{2}jh\right) \qquad \left(h=\pi\sqrt{\frac{2q}{N}}\right)$$

に対して

$$\| E_N(\tanh 則)\| \leqq C_2' \exp\left(-\pi\sqrt{\frac{N}{2q}}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(3.2)$$

なることなどがわかっている([9])．

(3.1) や (3.2) の評価は，誤差生成作用素のノルムに関する評価という形をとっているが，数値積分誤差に対する評価として解釈することができる．実際，(3.2) は "$H^p(D)$ に属する任意の関数 f に対して，tanh 則を用いた時の数値積分誤差が $M_f \cdot \exp\left(-\pi\sqrt{\frac{N}{2q}}\right)$ (M_f：f によって定まる定数) でおさえられる" と解釈できる．また，(3.1) の下からの評価は "任意の 0 へ収束する正数列 $\{\xi(N)\}_{N=1}^{\infty}$，及び，任意の数値積分公式列に対する誤差生成作用素列 $\{E_N\}_{N=1}^{\infty}$ に対して，

$$\sup_N \left(\|E_N\| \cdot \frac{1}{\xi(N)} \cdot N^{1/2q} \cdot \exp\left(\pi\sqrt{\frac{N}{q}}\right)\right) = +\infty$$

が成立する" ことと同値であり，ここで，$H^p(D)$ が Banach 空間であり，誤差生成作用素が有界作用素であることに注意して一様有界性定理 ([4], [5], [7]) に Baire の category 定理を

用いない興味深い証明がある）を用いると，

"任意の0へ収束する正数列 $\{\xi(N)\}_{N=1}^{\infty}$，及び，任意の数値積分公式列に対する誤差生成作用素列 $\{E_N\}_{N=1}^{\infty}$ に対して，$H^p(U)$ に属するある関数 f が存在して

$$\sup_N \left(|E_N(f)| \cdot \frac{1}{\xi(N)} \cdot N^{1/8} \cdot \exp\left(\pi\sqrt{\frac{N}{q}}\right)\right) = +\infty$$

が成立する" ことと同値であることがわかる．これは，さらに，

"（ある0へ収束する正数列 $\{\xi(N)\}_{N=1}^{\infty}$，および，ある数値積分公式列が存在して

'$H^p(U)$ に属する任意の関数 f に対して，

$$|\text{数値積分誤差}| \leqq M_f \cdot \xi(N) \cdot \frac{1}{N^{1/8}} \cdot \exp\left(-\pi\sqrt{\frac{N}{q}}\right)$$

となる'

ことはない．" と言いかえることができる．つまり，数値積分誤差を $\frac{1}{N^{1/8}} \cdot \exp\left(-\pi\sqrt{\frac{N}{q}}\right)$ をこえて改良することはできないのである．

これらの $H^p(U)$ 空間上の数値積分誤差生成作用素に関する評価の解釈等に鑑みるとき，ある種の数値積分公式の最適性に関する議論は，適当な関数空間を設定し，その関数空間上で，問題の数値積分公式を用いた時の誤差生成作用素のノルムと，誤差生成作用素のノルムの最小値（又は，下からの評価）との比較を行なうことによって，実行できることがわかる．

また，これらの解釈をもとに，(3.1), (3.2) の評価を見る時，tanh 則が $H^p(U)$ の関数に変数変換 $\varphi(u)=\tanh(\frac{1}{2}u)$ を施し，その後に台形則を適用する公式であることに注意すると，$H^p(U)$ に属する関数に対しては，"変数変換 $\varphi(u)=\tanh(\frac{1}{2}u)$ + 台形則" が（見方にもよるが）ほぼ最適であると考えることができる。そこで，自然に，$H^p(U)$ 空間上で "二重指数関数型変数変換 $\varphi(u)=\tanh(\frac{\pi}{2}\sinh(u))$ + 台形則 = DE変換公式" を考えることを思いつく。しかし，$H^p(U)$ 空間上での数値積分誤差の下限 $\frac{1}{N^{2/8}}\exp(-\pi\sqrt{\frac{N}{8}})$ と DE変換公式によって得られる誤差の評価 $\exp(-c\,N/\log N)$ とは，相容れない。従って，§2で述べたような DE変換公式に関する高橋・森の議論を精密化するためには，別の関数空間を考える必要がある。

ところが，F. Stenger は [9] の中で次のことを注意している

"まず，U（単位円）を $\varphi(z)=\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ で写像（等角写像）してできる領域 $D=\{w\in\mathbb{C}\mid |\mathrm{Im}\,w|<\pi/2\}$ 上で解析的で，かつ，

$$\lim_{r\to 1-0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi(C_r)}\left|\frac{g(w)}{\frac{d}{dw}\varphi^{-1}(w)}\right|^p\cdot\left|\frac{d}{dw}\varphi^{-1}(w)\right|dw\right)^{1/p}$$

C_r：半径 r の円周

$$=\lim_{r\to 1-0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi(C_r)}|g(w)|^p\cdot|2\cosh(\tfrac{1}{2}w)|^{p-1}dw\right)^{1/p}$$

C_r：半径 r の円周

が有界となるような関数族に，この積分値でノルムを導入した関数空間（これを $H^p(D)$ と書く）を考える．この時，$H^p(D)$ 上の関数 $g(y)$ の積分 $\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dy$ に対する数値積分公式 $\sum_{j=1}^{N} B_j g(b_j)$ の誤差生成作用素 $\widetilde{E}_N(b_1,\cdots,b_N;B_1,\cdots,B_N)$（$\widetilde{E}_N(g)=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)\,dy-\sum_{j=1}^{N}B_j g(b_j)$）の作用素ノルムと，$H^p(D)$ 上の数値積分誤差生成作用素 E_N の作用素ノルムとには

$$\| E_N(a_1,\cdots,a_N;A_1,\cdots,A_N)\| = \| \widetilde{E}_N(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_N);\frac{A_1}{\frac{d}{dw}\varphi^{-1}(\varphi(a_1))},\cdots,\frac{A_N}{\frac{d}{dw}\varphi^{-1}(\varphi(a_N))})\|$$

なる関係がある（というよりは，こういった関係になるように $H^p(D)$ 上のノルムを定めた）．従って，$H^p(D)$ 上の誤差生成作用素のノルムに関する評価 (3.1) から，

$$C_1\frac{1}{N^{1/2}}\exp\left(-\pi\sqrt{\frac{N}{8}}\right)\le \inf_{b_j,B_j\in\mathbb{R}} \| \widetilde{E}_N(b_1,\cdots,b_N;B_1,\cdots,B_N)\| \le C_2\frac{1}{N^{1/2}}\exp\left(-\pi\sqrt{\frac{N}{8}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots(3.3)$$

が成立し，また，$\| E_N(\tanh則)\| = \| \widetilde{E}_N(台形則)\|$ となるから，

$$\| \widetilde{E}_N(台形則)\| \le C_2'\exp\left(-\pi\sqrt{\frac{N}{28}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots(3.4)$$

が成立する．"

この注意に述べられている結果を見ると，$H^p(D)$ という空間は，大雑把にいって，D において $|w|\to\infty$ となるとき $O(|\cosh^2(\frac{1}{2}w)|^{1-p})$ で減衰している（exponential に減衰しているといった方がよいかもしれない）関数の族であり，そういった関数族に対して，台形則がかなりよい公式であることがわかる．このことから，

自然に，Dにおいて$|w|\to\infty$となるとき，double exponentialに減衰する関数族を設定することが思いうかぶ。§4では，このような考えに基づいて，Dにおいてdouble exponentialに減衰する関数族の成す空間を導入し，数値積分公式を研究する。

§4. DE変換公式の最適性に関する高橋・森の議論の精密化

§3で述べた考えに従って，Dでdouble exponentialに減衰する関数族の成す空間を設定する。まず，次の記号を導入する。

$$\mathcal{D}(d) \stackrel{\triangle}{=} \{ z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z| < \frac{\pi}{2} d \},$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}(d)) \equiv \{ \mathcal{D}(d) \text{上の解析関数} \}.$$

そして，$H_{double}(\mathcal{D}(d); A, B)$ $(B < 1/d)$ を，$f \in \mathcal{A}(\mathcal{D}(d))$であって，$\sup_{z \in \mathcal{D}(d)} \{ |f(z)| \cdot |\exp(A \cosh(Bz))| \}$が有界であるような関数族にノルム$\|f\|_{double}$を$\sup_{z \in \mathcal{D}(d)} \{ |f(z)| \times |\exp(A \cosh(Bz))| \}$で与えた関数空間とする。ここで，$B < 1/d$なる制約は，$H_{double}(\mathcal{D}(d); A, B)$がBanach空間となるための条件（$\mathcal{D}(d)$上で$|\exp(A \cosh(Bz))|$がゼロにならないこと）からつく制約である。

Dでdouble exponentialに減衰する関数の空間$H_{double}(\mathcal{D}(d); A, B)$上の数値積分公式を研究するにあたって，研究の指針と

なったDでexponentialに減衰する関数の空間, $H_{single}(D(d);A)$ $(A<\pi/d)$: $f\in\mathcal{A}(D(d))$であって, $\sup_{z\in D(d)}\{|f(z)|\cdot|\cosh(Bz)|\}$が有界であるような関数族にノルム $\|f\|_{single}$ を $\sup_{z\in D(d)}\{|f(z)|\cdot|\cosh(Bz)|\}$で与えた関数空間,についての結果も記す。$H_{single}(D(d);A)$における数値積分公式を研究することは, さきに述べた$H^{\infty}(D)$における数値積分公式の研究とほとんど同じであり, すでに結果が得られているとも言えるが, 前記の$H^{p}(D)$に関する結果は, $H^{p}(U)$の結果を変換して得られたものであり, H_{double}上の数値積分公式の研究を行なうにあたっては役に立たない。ここでは, より直接的に, H_{single}に関する結果を導びく。なお, その結果, $H^{p}(U)$で, (3.1)の下からの評価や, (3.2)の評価を導びくよりも, $H^{p}(D)$で,直接的に(3.3)の下からの評価や, (3.4)の評価を導びく方が容易であることがわかった(以下の結果の証明と[1]に与えられた証明を見較べよ).

4.1. <u>H_{single}, H_{double}における数値積分誤差生成作用素のノルムの評価</u>

《I》 <u>$\|E_N(台形則)\|$の評価.</u>

まず, 台形則に対して, 誤差生成作用素のノルム$\|E_N(台形則)\|$の評価を与える. まず,評価の基礎となる補題4.1をあげる.

補題4.1 (Stenger [8])

$f(z)\in\mathcal{A}(D(d))$が次の2条件を満足するとする.

(i) $N_D(f) \overset{\mathrm{d}}{=} \lim_{c \to d-0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+\frac{\pi}{2} c i)| + |f(x-\frac{\pi}{2} c i)|\, dx \right) < +\infty,$

(ii) $0 \leq {}^\forall c < d$ に対して $\lim_{|x| \to \infty} \int_{-c\cdot\frac{\pi}{2}}^{c\cdot\frac{\pi}{2}} |f(x+iy)|\, dy = 0,$

この時，$h>0$ に対して

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx - h \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(jh) \right| \leq \frac{\exp(-\frac{\pi^2}{h} d)}{1-\exp(-\frac{\pi^2}{h} d)} \cdot N_D(f)$$

この補題4.1を用いて，H_{single}，H_{double} における $\|E_N(\text{台形則})\|$ の評価，次の定理4.2を得る．

定理4.2

(i) $H_{single}(D(d);A)$ において，台形則 $h\sum_{j=-N}^{N} f(jh)$ に対して，

$$\|E_N(\text{台形則})\| \leq C \cdot \exp\left(-\sqrt{\pi^2 dA} \cdot \sqrt{\frac{2N+1}{2}}\right). \quad \cdots(4.1)$$

(ii) $H_{double}(D(d);A,B)$ において，台形則 $h\sum_{j=-N}^{N} f(jh)$ に対して

$$\|E_N(\text{台形則})\| \leq C' \cdot \exp\left(-C'' \frac{N}{\log N}\right). \quad \cdots(4.2)$$

(証明)(i): 補題4.1から，台形則の生成する誤差に対して，次の評価が成立する．

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx - h \sum_{j=-N}^{N} f(jh) \right| \leq \frac{\exp(-\frac{\pi^2}{h} d)}{1-\exp(-\frac{\pi^2}{h} d)} \cdot 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|\cosh(A(x+\frac{\pi}{2} d i))|} \cdot \|f\|_{single}$$
$$+ h \sum_{|j|>N} |f(jh)|.$$

ここで，この評価の第2項は，以下のように評価できる．

$$h \cdot \sum_{|j|>N} |f(j \cdot h)| \leq h \sum_{|j|>N} |\cosh(Aj \cdot h)|^{-1} \cdot \|f\|_{single}$$

$$\leq h \sum_{|j|>N} 2 \cdot \exp(-Aj \cdot h) \cdot \|f\|_{single}$$

$$\leq 4 \cdot h \cdot \frac{\exp(-A(N+1)h)}{1-\exp(-A \cdot h)} \cdot \|f\|_{single} .$$

今，$\frac{\pi^2 d}{h} = A(N+1)h$ となるように h を $\sqrt{\frac{\pi^2 d}{A} \cdot \frac{1}{(N+1)}}$ ととると，以上の評価から

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx - h \cdot \sum_{j=-N}^{N} f(j \cdot h)\right| \leq C \cdot \exp\left(-\sqrt{\pi^2 d A} \cdot \sqrt{\frac{2N+1}{2}}\right) \cdot \|f\|_{single}$$

を得る．これは，(4.1) の評価を意味する．

(ii)：(i) とほとんど同様である．$h \sum_{|j|>N} |f(j \cdot h)|$ の評価は，次のようになる．

$$h \cdot \sum_{|j|>N} |f(j \cdot h)| \leq h \cdot \sum_{|j|>N} |\exp(A\cosh(Bj \cdot h))|^{-1} \cdot \|f\|_{double}$$

$$\leq C \exp(-A\cosh(BNh)) \cdot \|f\|_{double} .$$

そこで，$\frac{\pi^2 d}{h} \fallingdotseq A\cosh(BNh)$ となるように $h = \frac{\log N}{N}$ ととると，

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx - h \cdot \sum_{j=-N}^{N} f(j \cdot h)\right| \leq C' \cdot \exp\left(-c\frac{N}{\log N}\right) \cdot \|f\|_{double}$$

が得られる．これは，(4.2) の評価そのものである．$\blacksquare$

$H_{double}(\mathcal{D}(d); A, B)$ における台形則の誤差の order が $\exp(-c\frac{N}{\log N})$ であることは，DE変換公式について得られている誤差

の order が $\exp(-c\frac{N}{\log N})$ であることを見るとき，H_{double} が，DE変換を施した後の被積分関数の成す空間として，適当であることを意味する．

《II》 $\inf_{a_j, A_j \in \mathbb{R}} \| E_N(a_1, \cdots, a_N ; A_1, \cdots, A_N) \|$ の評価．

次の結果が成立する．

定理 4.3

(i) $H_{single}(\mathcal{D}(d) ; A)$ において

$$\inf_{a_j, A_j \in \mathbb{R}} \| E_N(a_1, \cdots, a_N ; A_1, \cdots, A_N) \| \geqq 2\sqrt{\frac{\pi^2 d N}{A}} \cdot \exp\left(-\sqrt{\pi^2 d A} \cdot \sqrt{N}\right) \quad \cdots\cdots (4.3)$$

(ii) $H_{double}(\mathcal{D}(d) ; A, B)$ において

$$\inf_{a_j, A_j \in \mathbb{R}} \| E_N(a_1, \cdots, a_N ; A_1, \cdots, A_N) \| \geqq C \exp\left(-c \frac{N}{\log N}\right) \quad \cdots\cdots (4.4)$$

(証明) (i) について．

数値積分公式（分点 a_j，重み A_j $(j=1, \cdots, N)$）が任意に与えられたとき，

$$f(z) = \prod_{j=1}^{N} \left(\tanh\left(\frac{1}{2d}(z - a_j)\right)\right)^2 \cdot (\cosh(A(z)))^{-1}$$

なる関数を考える．

まず，$|\mathrm{Im}\, z| \leqq \pi/4$ において $|\tanh(z)| \leqq 1$ であることから，$\|f\|_{single} \leqq 1$ が導かれることに注意する．

$f(z)$ に，与えられた数値積分公式を適用した時の誤差は以下のように評価される．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx - \sum_{j=1}^{N} A_j f(a_j) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\geqq 2R \int_{-R}^{R} f(x) \cdot \frac{dx}{2R} \qquad (\because f(x) \geqq 0)$$

$$\geqq 2R \cdot \exp\left(\int_{-R}^{R} \log f(x) \cdot \frac{dx}{2R} \right)$$

(∵ Jensenの不等式：
$g(x)$ が上に凸 ならば $E[g(X)] \leqq g(E[X])$)

$$= 2R \cdot \exp\left(\frac{1}{2R} \sum_{j=1}^{N} 2 \int_{-R}^{R} \log \left| \tanh\left(\frac{1}{2d}(x - a_j) \right) \right| dx - \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \log(\cosh Ax)\,dx \right)$$

$$\geqq 2R \cdot \exp\left(\frac{1}{2R} \sum_{j=1}^{N} 2 \int_{-\infty}^{\infty} \log \left| \tanh\left(\frac{1}{2d}(x - a_j) \right) \right| dx - \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \log(\exp A|x|)\,dx \right)$$

$$\left(\because \int_{-R}^{R} \log|\tanh x|\,dx > \int_{-\infty}^{\infty} \log|\tanh x|\,dx, \quad \cosh Ax < \exp A|x| \right)$$

$$= 2R \cdot \exp\left(\frac{1}{2R} \sum_{j=1}^{N} 2 \int_{-\infty}^{\infty} \log \left| \tanh \frac{x}{2d} \right| dx - \frac{AR}{2} \right)$$

$$= 2R \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2 d}{2R} N - \frac{AR}{2} \right).$$

$$\left(\because \int_{-\infty}^{\infty} \log \left| \tanh \frac{x}{2d} \right| dx = 2d \int_{-\infty}^{\infty} \log|\tanh y|\,dy = -\frac{d}{2}\pi^2 \right)$$

ここで, $\dfrac{\pi^2 d}{2R} N = \dfrac{AR}{2}$ となるように $R = \sqrt{\dfrac{\pi^2 d N}{A}}$ ととると, 上の評価から

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx - \sum_{j=1}^{N} A_j f(a_j) \geqq 2\sqrt{\frac{\pi^2 d N}{A}} \cdot \exp\left(-\sqrt{\pi^2 d A}\sqrt{N} \right)$$

を得る. これは, 先に述べた $\|f\|_{angle} \leqq 1$ に注意すると, (4.3)が成立することを意味する.

(ii)について.

任意に数値積分公式(分点 a_j, 重み A_j $(j=1,\cdots,N)$)が与えられたとき,

$$f(z)=\prod_{j=1}^{N}\left(\tanh\frac{1}{2d}(z-x_j)\right)^2\cdot\left(\exp(A\cosh(Bz))\right)^{-1}$$

を考える.

まず, $\|f\|_{double}\leq 1$ であり, $f(z)$ に与えられた数値積分公式を適用した時の誤差は, (i)の場合と同様に以下のように評価される.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx-\sum_{j=1}^{N}A_j f(a_j)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx\\ &\geq 2R\cdot\exp\left(-\frac{\pi^2 d}{2R}N-\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R}\log(\exp(A\cosh Bx))\,dx\right)\\ &\geq 2R\cdot\exp\left(-\frac{\pi^2 d}{2R}N-\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R}A\cosh Bx\,dx\right)\\ &=2R\cdot\exp\left(-\frac{\pi^2 d}{2R}N-\frac{A}{RB}\cdot\sinh BR\right).\end{aligned}$$

ここで, $R=\log N$ とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx-\sum_{j=1}^{N}A_j f(a_j)\geq C\ \exp\left(-c\frac{N}{\log N}\right)$$

となり, (4.4)の評価が得られる. ∎

以上の結果(定理4.2, 定理4.3)から, H_{single}, H_{double} において台形則がほぼ最適に近い数値積分公式であることがわかる. この結果は, ある意味で, §2で述べた"無限区間 $(-\infty,\infty)$ にお

ける解析関数の積分に対する台形則の最適性"に対応する結果と見ることができる。

4.2. Htriple 空間等は存在するか?

定理4.2や定理4.3では，$D(d)$内で $|z|\to\infty$ となる時，single exponential，又は，double exponential に減衰する関数族について考えて来た。それでは，$D(d)$内でもっとはやく減衰する関数族を考えたならば，どのようなことになるのであろうか? 例えば，$D(d)$内で $|z|\to\infty$ となる時，triple exponential に減衰する関数族などを考えると，この空間においては，定理4.2の証明からわかるように，$\|E_N(\text{台形則})\|$ が $O(\exp(-N/\log\log N))$ となることなどが期待される。ところが，次の定理が証明でき，$D(d)$内で，triple exponential に減衰する関数など $f(z)=0$ 以外にないことがわかる。

定理4.4

$f(z)$ が次の3つの条件:

(i) $f(z)$ は，$D(d)$ で正則で，$\overline{D(d)}$ で連続．

(ii) $f(z)$ は，$\overline{D(d)}$ で有界: $|f(z)|\leqq M$．

(iii) ある正数 ε に対して，$f(x)=O\left(\exp\left(-A\exp\left(\frac{1+\varepsilon}{d}|x|\right)\right)\right)$ が実軸上で成立する．

を満足するならば，$f(z)\equiv 0$．

定理4.4の証明にあたっては，次の Phragmén - Lindelöf の補題を使用するために，$D(d)$上の関数 $f(z)$ を，$f(d\log w)\equiv$

$g(w)$と変数変換して，$\mathcal{P}=\{w\in\mathbb{C}\mid |\arg w|<\pi/2\}$の関数に変換して考える。

Phragmén-Lindelöfの補題[13]

角領域$\Delta=\{z\in\mathbb{C}\mid |\arg z-\theta_0|<\pi/2\alpha\}$を考える.

$f(z)$は，次の条件を満足するとする.

(i) $f(z)$はΔで正則，$\overline{\Delta}-\{0\}$で連続.

(ii) ある$\delta>0$に対して，Δに属する任意のzについて

$$|f(z)|\leqq M\exp(|z|^{\alpha-\delta}).$$

(iii) 任意の正数rに対して，$|f(re^{\pm i(\pi/2\alpha+\theta_0)})|\leqq M$.

この時，Δに含まれる任意のzに対して$|f(z)|\leqq M$が成り立つ.

$g(w)$に関して，定理4.4を書きかえると次のようになる.

定理4.4'

$g(w)$が次の3つの条件：

(i) $g(w)$は，$\mathcal{P}$で正則で，$\overline{\mathcal{P}}-\{0\}$で連続.

(ii) $g(w)$は，$\overline{\mathcal{P}}-\{0\}$で有界：$|g(w)|\leqq M$.

(iii) ある正数εに対して，$g(r)=O(\exp(-Ar^{1+\varepsilon}))$が正の実軸上で成立する.

を満足するならば，$g(w)\equiv 0$.

(証明)

$$\rho(w)\overset{\mathrm{d}}{=}\exp\left(A\left(1+i\frac{\cos(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}{\sin(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}\right)w^{1+\varepsilon}\right)$$とし，$F(w)\equiv\rho(w)\cdot g(w)$

を考える。

まず，$\Delta=\{w\in\mathbb{C}\mid 0<\arg w<\pi/2\}$として，$F(w)$にPhragmén-Lindelöfの補題を適用する．条件の(i)は明らかに成立する．また，定理4.4′の条件(ii)から条件(ii)も成立する．条件(iii)については，次の評価：

$$|F(re^{i0})|\leq\left|\exp\left(A\left(1+i\frac{\cos(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}{\sin(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}\right)r^{1+\varepsilon}\right)\right|\cdot|\exp(-Ar^{1+\varepsilon})|\cdot M''=M''$$

$$|F(re^{i\frac{\pi}{2}})|\leq\left|\exp\left(A\left(1+i\frac{\cos(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}{\sin(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}\right)r^{1+\varepsilon}\cdot\left(\cos(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}+i\sin(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}\right)\right)\right|\cdot M$$
$$=M.$$

が成立することから，成り立つ．従って，ある定数Mがあって，Δに含まれる任意のwに対して$|F(w)|\leq M$．つまり，

$$|g(w)|\leq M\cdot|\rho(w)|^{-1}$$
$$=M\cdot\exp\left(\left(-A\cdot\cos(1+\varepsilon)\theta+A\frac{\cos(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}{\sin(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}\sin(1+\varepsilon)\theta\right)r^{1+\varepsilon}\right)$$

なる評価が，任意の$w=re^{i\theta}\in\Delta$について成立する．同様に$\Delta'=\{w\in\mathbb{C}\mid 0>\arg w>-\pi/2\}$についてもPhragmén-Lindelöfの補題を用いることによって，任意の$w=re^{i\theta}\in\Delta'$について，

$$|g(w)|\leq M'\cdot\exp\left(\left(-A\cdot\cos(1+\varepsilon)\theta+A\frac{\cos(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}{\sin(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}|\sin(1+\varepsilon)\theta|\right)r^{1+\varepsilon}\right)$$

となることがわかる．今さらに，定理4.4′の条件(iii)を考える

と，この形の $g(w)$ に対する評価式は，$\mathfrak{D}$ 全体で成立することがわかる。

次に $H(w) \equiv \exp(K \cdot w^{1+\varepsilon}) \cdot g(w)$ を考えると，

$$|H(w)| \leq M''' \cdot \exp\left(\left((-A+K)\cos(1+\varepsilon)\theta + A\frac{\cos(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}{\sin(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}|\sin(1+\varepsilon)\theta|\right) r^{1+\varepsilon}\right)$$

なる評価が成立する．この評価式から，$\theta_0 = \pm\frac{1}{1+\varepsilon}\tan^{-1}\left(\frac{-A+K}{A}\cdot\frac{\sin(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}{-\cos(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}\right)$ とするとき，$|\theta_0| < \frac{1}{1+\varepsilon}\cdot\frac{\pi}{2}$ であり，$|H(re^{i\theta_0})| \leq M'''$ であることがわかる．ここで，再び，Phragmén-Lindelöf の補題を用いると，$w = re^{i\theta}$ $(|\theta| \leq |\theta_0|)$ に対して

$$|g(w)| \leq M''' \exp(-K \cdot r^{1+\varepsilon} \cos(1+\varepsilon)\theta)$$

であることが導びかれる．今，K が十分大ならば，θ_0 は K の単調増加関数であるから，この評価から，十分大きな K に対して，任意の実数 x について

$$|g(x)| \leq M''' \cdot \exp(-K \cdot x^{1+\varepsilon})$$

となることがわかる．従って，$K \to \infty$ として，任意の実数 x に対して $g(x) \equiv 0$ となることがわかる．あとは，一致の定理から $g(w) \equiv 0$ が $\mathfrak{D}$ 全体で成立する　　　　$\boxtimes$

この定理の結果は，§2 で述べた (p.4～p.5) 解析関数の一般的性質"実軸上で $z = x \to \pm\infty$ の時，急減少であればあるほど，虚軸方向で $z = iy \to \pm i\infty$ の時，増大が急になる"の現

われと考えることができる。

4.3 DE 変換公式の最適性、および、二重指数関数の原理(改訂版)

定理 4.4 の結果から, $\mathbf{A}(\mathcal{D}(d))$ 上の $\{0\}$ 以外の関数を含む関数空間としては, *double exponential* よりはやい減衰をする関数の空間は考え得ないことがわかる。このことから(大変大雑把な言い方であるが), $\mathbf{A}(\mathcal{D}(d))$ 上では H_{double} ぐらいの関数空間を考えるのが限界であることがわかる. 従って, 定理 4.2 , 4.3, 4.4 の結果が, DE 変換公式の最適性を物語っているといえる(これも,また, かなり大雑把な言い方であるが). より厳密に DE 変換公式の最適性を言うのならば, $\mathbf{A}(\mathcal{D}(d))$ 上に, $\mathcal{D}(d)$ 内で $|z| \to \infty$ となるときの関数の減衰度に応じて関数空間族 $\{H_{w_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ を導入し, $H_{w_\lambda} \ne \{0\}$ なる任意の H_{w_λ} 上で $\inf_{a_j, A_j \in \mathbb{R}} \| E_N(a_1, \cdots, a_N; A_1, \cdots, A_N) \|_{H_{w_\lambda}} \geq C\exp(-\frac{cN}{\log N})$ が成立することを証明する必要がある. しかし, 現状では, まだ, このように精密な結果は得られていない(本当に成立するかどうかもわからない…).

§2 で必要性のあることを指摘した《二重指数関数の原理(改訂版)》については,これまでに得られた知見をもとにすれば, おのずと, 次のようになる.

《二重指数関数の原理(改訂版)》

"与えられた積分 $\int_{(a,b)} f(x)dx$ に対し, 区間 (a, b) を $(-\infty, \infty)$

に変換し，かつ，変換後の被積分関数 $f(\varphi(u))\varphi'(u)$ が H_{double} に入るような変数変換 $x=\varphi(u)$ を施し，変換された積分問題 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$ に対して，等間隔きざみ幅の台形則を適用する."

ただし，この原理の中で述べられているような適当な変数変換が存在するとは限らないことに注意せよ．そのような場合には，他の手段を用いて数値積分を実行する必要がある．

§5. おわりに

以上の議論によって，DE変換公式の最適性に関する議論がある程度精密化できたといえる．ただし，§4の終りにおいても述べたように，厳密な意味での最適性の証明はまだ得られていない．また，次の一連の問題もある：

(1) §2で述べた無限区間における台形則（無限和）の最適性を誤差そのものを用いて評価すること（今回のDE変換公式の議論では，台形則（無限和）の最適性は用いなかったが，理論的には興味ある問題である）．

(2) [0, 1] から [0, 1] へ変数を変換して台形則を用いるIMT型の数値積分公式とDE変換公式のかかわりを明確にすること（IMT型の数値積分公式の場合，対象となる被積分関数の族が明らかではなく，まず，それを明確化する必要がある）．

(3) [10], [11] で用いられた"応用上重要な"積分問題 $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\alpha}f(x)dx$ ($\alpha>-1$, $f(x)$は, $[-1, 1]$を含むある開集合上解析的な関数)に対して, DE変換公式を用いると, 数値積分誤差は $O(\exp(-c\frac{N}{\log N}))$ となることがわかっているが, これ以上改善の余地がないのかどうかを明らかにすること.

(4). (大問題であるが) これまでに得られた結果を多次元の場合に拡張すること.

今後の研究によって, これらの問題が解決されることを期待したい。

参考文献

[1] J.E. Andersson: Optimal quadrature of H^p functions, Math. Z., Vol.172(1980), pp.55-62.

[2] J.E. Andersson and B.D. Bojanov: A note on the optimal quadrature in H^p, Numer. Math., Vol.44(1984), pp.301-308.

[3] P.J. Davis and P. Rabinowitz: "Methods of Numerical Integration," 2nd-ed., Academic Press(1984).

[4] F. Hausdorff: Zur Theorie der linearen metrischen Räume, J. Reine Angew. Math., Vol.1 67(1932), pp.294-311.

[5] G.G. Lorentz: "Approximation of Functions," Holt, Rinehart and Winston (1966).

[6] D.J. Newman: "Approximation with Rational Functions," Regional Conference Series in Math., No.41(1979).

[7] M.J.D. Powell: "Approximation Theory and Method," Cambridge Univ. Press(1981).

[8] F. Stenger: Integration formulas based on the trapezoidal formula, J. Inst. Math. Appl., Vol.12(1973), pp.103-114.

[9] F. Stenger: Optimal convergence of minimun norm approximaton on H^p, Numer. Math., Vol.29(1978), pp.345-362.

[10] 森正武："数値解析と複素関数論," 筑摩書房 (1975).

[11] 高橋秀俊, 森正武: 変数変換によって得られる積分公式(2), 数理解析研究所講究録, No.172 (1973), pp.88-104.

[12] 戸田英雄, 小野令美: 数値解析における一つの話題—DE変換数値積分公式の有効性を発揮させるための注意—, 日本物理学会誌, Vol.37 (1982), pp.655-663.

[13] 辻正次："複素函数論," 槇書店 (1968).