

## 一般化チェビシエフ補間に基づく多重積分

福井大・工 長谷川武光 (Takemitsu Hasegawa)

名大・工 鳥居達生 (Tatsuo Torii)

1 はじめに

1次元積分則をくり返し適用して(即ち直積型で)有限領域での多重積分

$$I = \int_a^b dx_1 \int_{\varphi_2(x_1)}^{\psi_2(x_1)} dx_2 \cdots \int_{\varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\psi_n(x_1, \dots, x_{n-1})} dx_n f(x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

の近似値  $I_N$  を要求絶対精度  $\varepsilon_a$  (相対精度  $\varepsilon_r$ ) に応じて

$$|I - I_N| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = \max(\varepsilon_a, \varepsilon_r |I|) \quad (2)$$

のように計算するいわゆる自動積分法<sup>1)</sup>の能率的なプログラムを作る。直積型多重積分法は、一般に積分の次元  $n$  が増大する必要な標本点数 (= 関数評価回数)  $N$  が  $N \approx n^d$  ( $n$ : 各次元方向の標本数) のように指数関数的に増大するので高次元に適さない(高次元積分には標本数が次元に依存しない数論を利用して作られた積分法が適する<sup>2), 3)</sup>)。

ここでは3次元までの滑らかな関数に対する多重積分を考

える。能率的なプログラムを作るためには

1) 信頼性の高い誤差推定と

2) できるだけ少ない標本点数で要求精度を満足することが要求される。基礎となる1次元自動積分法としては滑らかな関数に対して収束が速い(指数関数的,  $r^{-n}$ ,  $r > 1$ ) クレンショー・カーチス型の積分則を用いる。さらに無駄な標本点数を減らすため、標本数を倍々と増加させないでより緩やかに(実際8点づつ追加)増す手法<sup>4)</sup>を用いる。このことの効果は多重積分の次元数が大きい程顕著になる。

直積型多重積分法の信頼性と手間は利用すべき1次元積分則の性能のみならず、要求精度の各次元方向の積分に対する割り当て方にも依存する<sup>5)</sup>。この方法を2節で述べる。3節では1次元自動積分法について述べる。多重積分のプログラムおよび2次元と3次元積分に対する数値例をそれぞれ4節、5節で述べる。

## 2 要求精度の割り当て方

要求精度 $\varepsilon$ を各次元方向の積分に対して割り当てる方法を簡単のため次の2重積分について述べる。

$$I = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy f(x, y) \quad (3)$$

この積分は2段階の積分

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy f(x, y) \quad , \quad (4)$$

$$I = \int_a^b dx F(x) \quad , \quad (5)$$

の型で書かれることが出来る。直積型の積分法は(4),(5)に対してそれぞれ1次積分則をくり返し適用する手法である。

1次元積分則  $Q(F)$  を

$$Q(F) = \sum_{i=1}^n w_i F(x_i) \quad , \quad \left( \sum_{i=1}^n w_i = b-a \right) \quad (6)$$

とかき、そのときの誤差を  $E_1$  とする。即ち

$$Q(F) = I + E_1 \quad . \quad (7)$$

同様にして  $x=x_i$  での(4)に積分則を適用して近似値

$$\tilde{F}(x_i) \equiv Q(f) \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{m(i)} w_j^{(i)} f(x_i, y_j) \quad (8)$$

とそのときの誤差  $E_2(x_i)$  をうる。したがって

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x_i) &= F(x_i) + E_2(x_i) \quad , \quad (9) \\ \sum_{j=1}^{m(i)} w_j^{(i)} &= \psi(x_i) - \varphi(x_i) \quad . \end{aligned}$$

すると積分  $I$  の近似値  $Q(\tilde{F})$  の誤差は

$$\begin{aligned} |Q(\tilde{F}) - I| &\leq |Q(F) - I| + |Q(\tilde{F}) - Q(F)| \\ &= |E_1| + |Q(E_2)| \quad . \end{aligned}$$

この値が要求精度  $\varepsilon$  以下となればよい。ここでは

$$|E_1| \leq \varepsilon/2, \quad |Q(E_2)| \leq \varepsilon/2 \quad (10)$$

とする。  $|Q(E_2)| \leq \sum_{i=1}^n |w_i| |E_2(x_i)|$  であり、本方法では  $\frac{\sum_{i=1}^n |w_i|}{\sum_{i=1}^n w_i} \leq 4$  ( $n \leq 511$ ) なので (3節参照)

$$|E_2(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2} / \{4(b-a)\} \left( \leq \frac{\varepsilon}{2} / \sum |w_i| \right) \quad (11)$$

とすればよい。即ち外側の積分に対する要求精度を  $\varepsilon/2$ 、内側のそれは外側の積分区間の幅  $b-a$  に依存して  $\frac{\varepsilon}{2} / \{4(b-a)\}$  とする。3次元積分の場合も同様にすればよい。

### 3 1次元自動積分法<sup>4)</sup>

区間  $[-1, 1]$  上の積分

$$I = \int_{-1}^1 F(x) dx \quad (12)$$

に対して、要求精度に達するまで標本点数を倍々より緩く増して近似値の列を作ってゆく方法を簡略に説明する。任意の区間  $[a, b]$  上の積分は1次変換により容易に(12)に帰着する。

#### 3-1 一般化チェビシェフ補間

数列  $\{\alpha_i\}$  を

$$\alpha_1 = 1/4, \quad \alpha_{2i} = \alpha_i/2, \quad \alpha_{2i+1} = \alpha_{2i} + 1/2 \quad (13)$$

によって定義し、標本点  $x_i$  を

$$x_i = \cos 2\pi \alpha_i$$

とする。すると  $\{\alpha_i\}$  は  $(0, 1)$  上に一様分布し、 $\{x_i\}$  は  $[-1, 1]$

上でのチェビシェフ分布列となる。この標本点  $x_i, i=1, 2, \dots, (l+1)N-1$ , に基づいて積分  $I$  に対する  $l$  番目の近似  $Q^l(F)$  は補間型積分則

$$Q^l(F) = \int_1^1 P_l(x) dx \quad (14)$$

によって与えられる。ここで  $P_l(x)$  は

$$P_l(x_i) = F(x_i), \quad i=1, 2, \dots, (l+1)N-1 \quad (15)$$

を満足する  $(l+1)N-2$  次の補間多項式である。以下では  $Q^l(F), l=0, 1, \dots$ , を漸化的に計算する方法について述べる。

このため補助多項式

$$\omega_m(x) = 2^m \prod_{k=1}^m (x - \cos 2\pi \alpha_k), \quad \omega_0(x) = 1 \quad (16)$$

を定義する。すると次数が  $m = lN-1$  の場合

$$\omega_{lN-1}(x) = U_{N-1}(x) \omega_{l-1}(T_N(x)) \quad (17)$$

と表わされる(文献4)参照)。ここで  $T_N(x)$  と  $U_N(x)$  はそれぞれ  $N$  次の第1種および第2種チェビシェフ多項式で、 $x = \cos \theta$  とおくと

$$\begin{aligned} T_N(x) &= \cos N\theta, \\ U_N(x) &= \sin(N+1)\theta / \sin \theta, \end{aligned} \quad (18)$$

で与えられる。関係(17)を用いると補間多項式  $P_l(x)$  は

$$P_l(x) = \sum_{k=1}^{N-1} A_{0,k} U_{k-1}(x) + U_{N-1}(x) \sum_{i=1}^l \omega_{l-i}(T_N(x)) \sum_{k=0}^{N-1} A'_{i,k} T_k(x), \quad (19)$$

と表わされる。ここで  $\Sigma'$  は初項のみ  $1/2$  倍して総和すること

を意味する。この(19)式を(14)に代入して積分  $I$  の  $l$  番目の近似値  $Q^l(F)$  は

$$Q^l(F) = \sum_{k=1}^{N-1} A_{0,k} W_{0,k} + \sum_{i=0}^l \sum_{k=0}^{N-1} A_{i,k} W_{i,k}, \quad (20)$$

となる。ここで補間係数  $A_{i,k}$  と重み  $W_{i,k}$  は  $l$  に依存しない。このため計算は漸化的に実行される。実際  $Q^l(F)$  から  $Q^{l+1}(F)$  へ進むためには単に  $A_{l+1,k} W_{l+1,k}$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$  を計算するだけでよい。すなわち

$$Q^{l+1}(F) = Q^l(F) + \sum_{k=0}^{N-1} A_{l+1,k} W_{l+1,k} \quad (21)$$

と表わされる。

補間点  $\{x_i\}$  は区間  $[-1, 1]$  の両端を含まないので積分則はいわゆる *open type* である。また  $l$  が  $2$  の中  $l=2^n$  のとき、標本点  $x_i$ ,  $i=1, 2, \dots, (l+1)N-1$ , (但し  $N$  も  $2$  の中とする) が Filippi<sup>6)</sup> の用いた点に一致するので  $Q^l(F)$  は Filippi の積分則となる。したがって本方法は Filippi 則の拡張になっている。

### 3-2 誤差と数値的安定性

積分  $I$ , (12), の近似  $Q^l(F)$  の打ち切り誤差  $E_l(F)$  は  $(l+1)N-1$  次の差分商  $F[x, x_1, \dots, x_{(l+1)N-1}]$  を用いて

$$E_l(F) = \int_{-1}^1 L_{N-1}(x) \omega_l(T_N(x)) 2^{1-(l+1)N} F[x, x_1, \dots, x_{(l+1)N-1}] dx \quad (22)$$

と表わされる。さて簡単のため関数  $F(z)$  に次の仮定をおく。  
 $E_\rho$  を複素平面  $z$  上で  $-1$  と  $1$  を焦点として長軸、短軸の長さを  
それぞれ  $\rho + \rho^{-1}$ ,  $\rho - \rho^{-1}$  ( $\rho > 1$ ) の楕円とする。  $F(z)$  は  $E_\rho$  上お  
び内部で解析的で  $E_\rho$  の外部に  $J$  個の単極  $z_j$  をもつ関数と仮  
定する。すると差分商のチェビシエフ展開

$$\begin{aligned} z^{-(l+1)N} F[x, x_1, \dots, x_{(l+1)N-1}] &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{E_\rho} F(z) / \{(z-x) U_{N-1}(z) \omega_l(T_N(z))\} dz \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{l+1,k} T_k(x) \quad , \quad (23) \end{aligned}$$

の係数  $A_{l+1,k}$  は  $|A_{l+1,k}| = O(r^{-k})$  となる。ここで

$$r = \min_j |z_j + \sqrt{z_j^2 - 1}| > 1 .$$

そこで  $|E_l(F)| \leq |W_{l+1,1}| |A_{l+1,1}| / (1-r^{-2})$  となる。この  
ことと、実際に計算される補間係数  $A_{l,k}$  に対して極  $z_j$  が  
 $[-1, 1]$  に近くないとき成立する関係

$$|A_{l,k}| \simeq |a_{l,k}|$$

を用いると、誤差を

$$e_l = (|A_{l,N-1}| + |A_{l,N-3}|) |W_{l+1,1}| \quad (24)$$

によって推定できる。極  $z_j$  が  $[-1, 1]$  に近いときまたは  $F(x)$  の  
 $p$  階微分  $F^{(p)}(x)$  ( $p \geq 1$ ) が  $[-1, 1]$  上で不連続となるときこの推  
定は失敗する。このときの対策は文献 4) 参照。

次に積分則  $Q^l(F)$  の数値的安定性について調べよう。

$$Q^l(F) = \sum_{j=1}^{(2^l)^{N-1}} w_j^l F(x_j)$$

と表わしたとき，条件数  $\sigma^l = \sum_j |w_j^l| / \sum_j w_j^l$  を定義すると  $\sigma^l \geq 1$  . 全ての  $w_j^l > 0$  なら  $\sigma^l = 1$  , そうでないなら  $\sigma^l > 1$  .  
 数値計算の結果  $N = 2^3 = 8$  のとき

$$\begin{cases} \sigma^l \leq 1.5, & (0 \leq l < 64, \quad l \neq 30, 62), \\ \sigma^l = 2.2, & (l = 30), \\ \sigma^l = 3.65, & (l = 62), \end{cases}$$

である。したがって実用上は数値的に安定であるといえるであろう。  
 以上の結果から  $0 \leq l < 64$  (即ち  $64 \times 8 - 1 = 511$  点以内) に対して  $\sigma^l < 4$  が結論される。この事実を2節の多重積分に対する要求精度を各次元方向に割り当てるし方に利用した。

#### 4 プログラム化

FORTRAN言語を用いて倍精度用の2, 3次元積分の自動積分プログラムを作る。1次元積分則  $Q^l(F)$  の追加点数  $N$  を実用上8点とした。滑らかな関数ならそのチェビシェフ展開の収束が速いので，各次元方向の最大標本点数は511 ( $= 64 \times 8 - 1$ ) 点で十分である。1次元積分用の標本点  $\{x_j\}$  と(20)式の重み  $W_{i,k}$ ,  $i=0, 1, \dots$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$  は被積分関数とは無関係であるので，予め必要な511点数分だけ漸化的に計算してメモリーに納めておけば能率的である。重み  $W_{i,2h} = 0$ ,  $k=0, 1, \dots$  であ



るので必要な  $W_{i,k}$  の個数は  $512/2 = 256$  でよい。

511個の  $\{x_j\} = \{\cos 2\pi d_j\}$  を次のように計算する。  $\cos 2\pi d_{2^k+i}$   
 $= (-1)^i \cos \pi d_e$  ( $i=0,1$ ) であるから  $\{\cos \pi d_e\}$  のみが必要される。  
 漸化式

$$\alpha_{2^k} = \alpha_{2^{k-1}}/2,$$

$$\alpha_{2^{k+j}} = \alpha_{2^{k-1+j}} - \alpha_{2^k}, \quad (1 \leq j < 2^{k-1})$$

$$\alpha_{2^{k+j}-1} = 1 - (\alpha_{2^{k-1+j}} + \alpha_{2^k}) \quad (0 \leq j < 2^{k-1}), \quad k=1,2,\dots$$

と初期値  $\alpha_1 = 1/4$  を用いると  $2^n - 1$  個の  $\{\cos \pi d_e\}$  ( $1 \leq l < 2^n$ ) が  $n$  回の平方根と  $2^n$  回の乗算で求められる。

重み  $W_{i,k}$  ( $1 \leq i \leq 2^n$ ), ( $0 \leq k \leq N$ ) は

$$W_{2^n, k} = 2^{mN} N / \{(2^n N)^2 - k^2\} \quad n=0,1,\dots, k=\text{奇数}$$

を初期値として漸化式

$$W_{t+2^{n+j}, k} = W_{t, 2^{n+j}N+k} + W_{t, 2^{n+j}N-k} - 2(\cos 2\pi \alpha_{2^{j+2^k}}) W_{t,k},$$

$$t = 2^n + 2^{n-j} \cdot \Delta, \quad 0 \leq \Delta < 2^{j-1}, \quad 1 \leq j < n, \quad n=1,2,\dots, m-1,$$

によって計算される。

直積型積分法では1次元積分則をくり返し階層的に使用する。そこで1次元積分則を再帰的に呼出す型式にプログラムを書くことができればその表現が簡単になる。しかしFORTRANではこの再帰呼出し機能がないので1つのルーチン内で全てを処理する。すなわち、次元数個の1次元配列(サイズは  $512/2 = 256$ ) を(20)式の係数  $A_{i,k}$  のために用意して各座標

軸方向の積分のための前処理をした後,  $A_{i,k}$  の計算と収束判定は共通の場所で行う。そして各座標軸毎に別々に後処理をしてその方向の積分の近似値をえた後, 全体の積分の近似値をうるようにプログラムを書く。補間条件から係数  $A_{i,k}$  を求める計算法の導出は文献4)を参照。

## 5 数値例

まず初めに正方形  $D=[0,1]^2$  上の2種類の2重積分

$\iint_D f(x)f(y)dv$ , ここで  $f(x)$  と  $f(y)$  として

$$(A) \quad f(x) = (e^2 - 1) / \{e^2 - 2e \cos(2\pi x) + 1\} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \cos(2\pi n x);$$

$$(B) \quad f(x) = (e^2 - 1) / (e^2 - 2e^x + 1) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} T_n(x),$$

に対して数論を利用した good lattice points 法 (GLP と略す)<sup>3)</sup>

と本方法との収束の速さを比較する。GLP は自動積分法でない。2次元 GLP の点列として Fibonacci 点列<sup>3)</sup>を用いる。

関数(A)の積分は周期関数の1周期積分(このような2次元周期関数に対するGLPの最良の点列については2)参照), 関数(B)は非周期関数の積分である。関数A,Bの積分に対する結果をそれぞれ図1, 図2に示す。非周期関数に対してGLPを適用するためには, 予め非周期関数をGLPが適用可能な関数族に入るように変数変換しておく必要がある。図2においては0次から5次の多項式による変換を行った後GLPを適用して

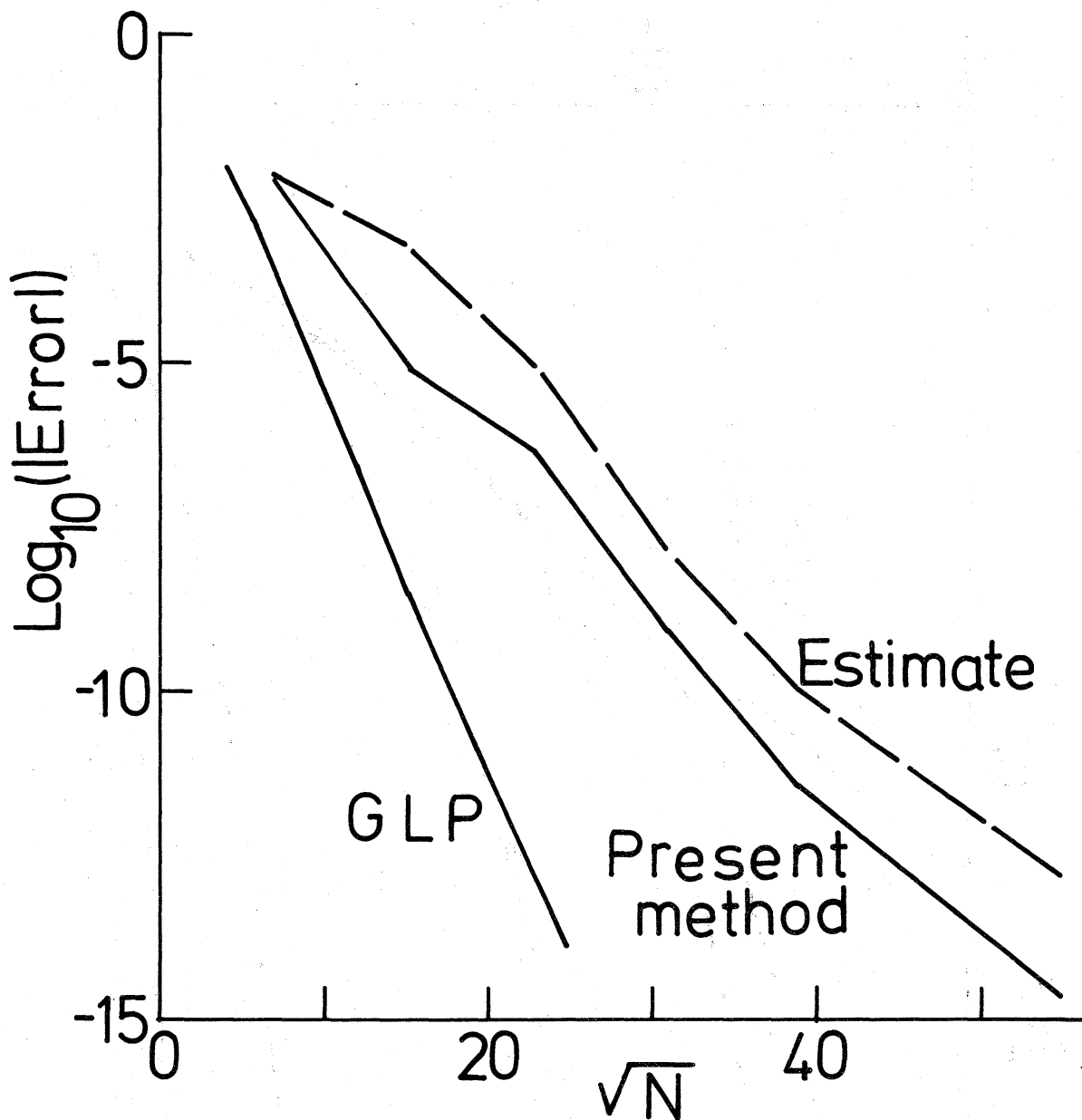


図1.  $D = [0, 1]^2$ ,  $\iint_D f(x)f(y) dV$ .  $f(x) = (e^x - 1) / \{e^x - 2e \cos(2\pi x) + 1\}$   
 GLP は Good Lattice Points 法, Estimate は本方法による推定誤差.

いる。図1, 2において横軸は標本点数の平方である。

次に本方法と Genz と Malik<sup>7)</sup> による多次元 (2~15次元) の適応型自動積分のプログラム ADAPT とを以下に示す 2次元

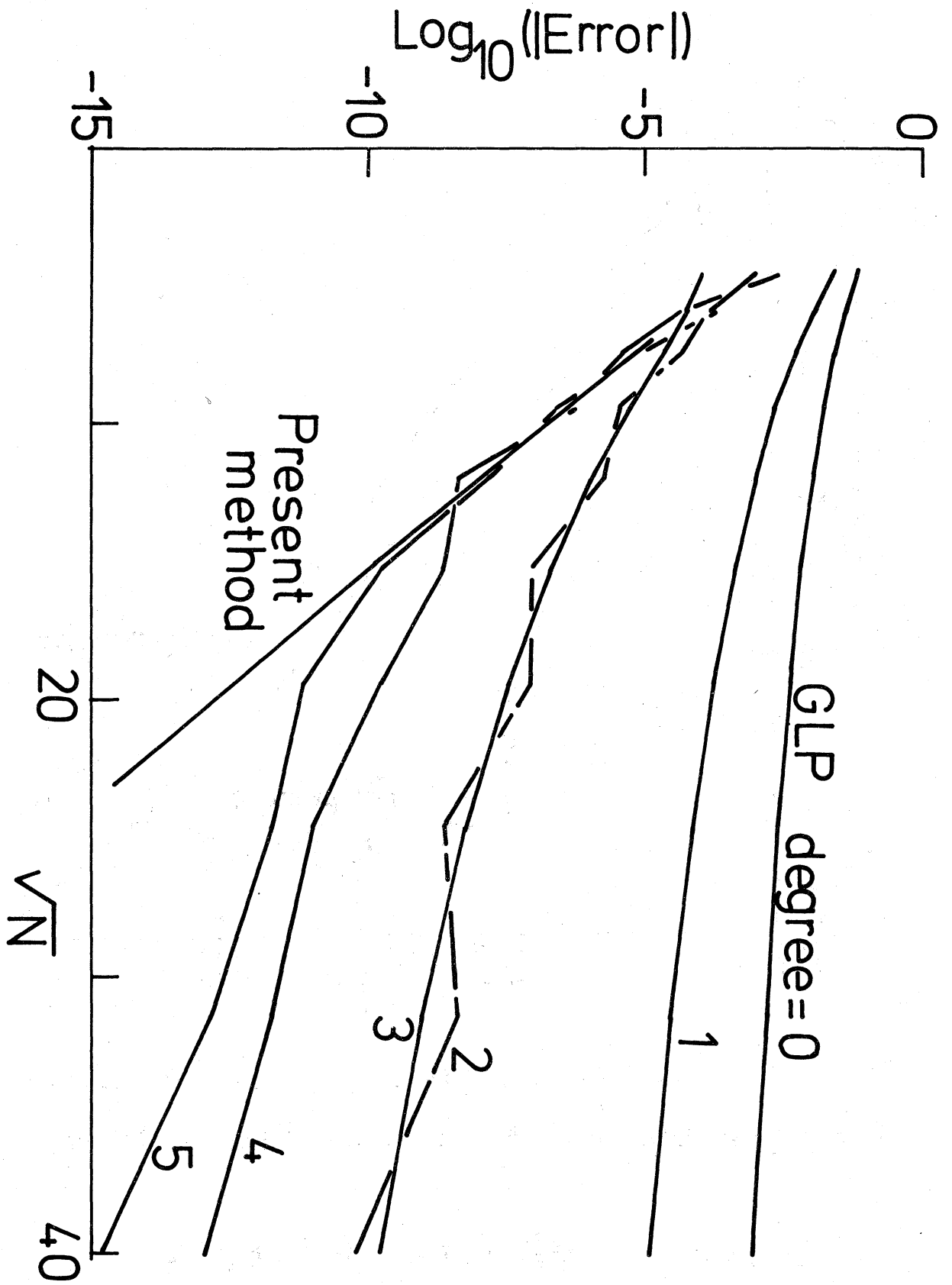


图 2.  $D=[0,1]^2, \iint_D f(x)f(y)dV, f(x)=(e^x-1)/(e^x-2ex+1)$

および3次元積分について比較する。ADAPTは完全対称則を基礎とした多次元超立方体領域上の適応型積分法である。

### 2次元積分の問題

$$1) \int_0^1 \int_0^1 dx dy / (1+x^2y^2)$$

$$2) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy / \{4(2.01+x+y)\}$$

$$3) \int_0^{3\pi} \int_0^{3\pi} \cos(x+y) dx dy = -4$$

$$4) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |x^2+y^2-0.25| dx dy = 5/3 + \pi/16$$

$$5) \int_0^1 \int_0^1 dx dy / (1-xy) = \pi^2/6$$

### 3次元積分の問題 領域 $D = [0, 1]^3$

$$6) \iiint_D \exp\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i\right) dV = \prod_{i=1}^3 (e^{\alpha_i} - 1) / \alpha_i, \quad \text{with } \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 12,$$

$$7) \iiint_D \prod_{i=1}^3 \left\{ \alpha_i^2 + (x_i - \beta_i)^2 \right\}^{-1} dV = \prod_{i=1}^3 \left[ \tan^{-1}\left\{ (1 - \beta_i) / \alpha_i \right\} + \tan^{-1}\left\{ \beta_i / \alpha_i \right\} \right],$$

$$\text{with } \prod_{i=1}^3 \alpha_i^2 = 1/25, \quad \beta_1 = 0.5/\sqrt{2}, \quad \beta_2 = 0.5/\sqrt{3}, \quad \beta_3 = 0.5/\sqrt{5},$$

$$8) \iiint_D \cos\left(2\pi r + \sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i\right) dV, \quad \text{with } \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 9, \quad r = 1/7,$$

$$9) \iiint_{D'} |x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 0.125| dV = 7 + \sqrt{2}\pi/240, \quad \text{but } D' = [-1, 1]^3.$$

6), 7), 8) においてパラメータ  $\alpha_1 = \alpha_2/2 = \alpha_3/4$  とおいた。積分 1), 6) は滑らか型, 2), 7) はヒップ型, 3), 8) は振動型, 4), 9) は微分が不連続型, 5) は特異点のある型である。問題 1) ~ 9) について要求相対精度  $\epsilon_r = 10^3, 10^6, 10^9$  としたときの必要な標本点数  $N$  とそのときの実際の相対精度を表 1, 2 に示す。

2次元三角形領域上の次の3つの積分について Laurie のプログラム CUBTRI<sup>8)</sup> と比較した。

表1. 2次元積分

問題	$\epsilon_r = 10^{-3}$			$\epsilon_r = 10^{-6}$			$\epsilon_r = 10^{-9}$			
	本方法		ADAPT <sup>†)</sup>	本方法		ADAPT	本方法		ADAPT	
	標本数	誤差	標本数	標本数	誤差	標本数	誤差	標本数	誤差	
1)	49	$3 \times 10^{-7}$	17	$3 \times 10^{-5}$	161	$6 \times 10^{-10}$	187	$9 \times 10^{-8}$	2907	$4 \times 10^{-13}$
2)	193	$7 \times 10^{-4}$	429	$8 \times 10^{-6}$	1497	$5 \times 10^{-8}$	3723	$2 \times 10^{-10}$	37111	$6 \times 10^{-15}$
3)	225	$4 \times 10^{-8}$	1003	$4 \times 10^{-7}$	529	$3 \times 10^{-15}$	9775	$6 \times 10^{-12}$	43673	$2 \times 10^{-14}$
4)	313	$1 \times 10^{-3}$	765	$1 \times 10^{-5}$	4721 *	$6 \times 10^{-5}$	30209	$1 \times 10^{-7}$	43673 *	$2 \times 10^{-7}$
5)	321	$1 \times 10^{-3}$	629	$5 \times 10^{-5}$	14673 *	$4 \times 10^{-6}$	5627	$3 \times 10^{-9}$	43673	$7 \times 10^{-8}$

表2 3次元積分

問題	$\epsilon_r = 10^{-3}$			$\epsilon_r = 10^{-6}$			$\epsilon_r = 10^{-9}$			
	本方法		ADAPT	本方法		ADAPT	本方法		ADAPT	
	標本数	誤差	標本数	標本数	誤差	標本数	誤差	標本数	誤差	
6)	711	$2 \times 10^{-6}$	231	$9 \times 10^{-5}$	3375	$9 \times 10^{-12}$	7425	$2 \times 10^{-8}$	65967	$7 \times 10^{-11}$
7)	903	$3 \times 10^{-5}$	165	$7 \times 10^{-5}$	8991	$2 \times 10^{-9}$	7491	$4 \times 10^{-10}$	65967	$5 \times 10^{-12}$
8)	735	$2 \times 10^{-7}$	429	$8 \times 10^{-6}$	1575	$8 \times 10^{-10}$	20295	$4 \times 10^{-10}$	65967	$4 \times 10^{-10}$
9)	543	$8 \times 10^{-5}$	363	$1 \times 10^{-3}$	11887 <sup>†)</sup>	$5 \times 10^{-6}$	21879 <sup>†)</sup>	$8 \times 10^{-6}$	65967 <sup>†)</sup>	$7 \times 10^{-6}$

†) 問題 9) の  $\epsilon_r = 10^{-6}$ ,  $10^{-9}$  の欄はそれぞれ  $\epsilon_r = 10^{-5}$ ,  $10^{-7}$  に対する結果である。

$$10) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \sqrt{x+y} = 2/3$$

$$11) \int_0^1 dx \int_0^x dy \sqrt{x^2+3y^2} \\ = \frac{1}{\sqrt{3}} \log(2+\sqrt{3})$$

$$12) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \sin(3x+6y) \\ = (\sin 3)/9 - (\sin 6)/18$$

問題 10), 11) は三角形領域の頂点が特異点であるタイプ, 12) は振動型である。CUBTRI

表3 二次元三角形領域上の積分

問題	$\epsilon_a$	本方法		CUBTRI <sup>8)</sup>	
		標本数	誤差	標本数	誤差
10)	$10^{-3}$	73	$1 \times 10^{-3}$	95	$1 \times 10^{-4}$
	$10^{-6}$	3049	$3 \times 10^{-7}$	475	$8 \times 10^{-7}$
	$10^{-9}$	17249	$6 \times 10^{-9}$	2375	$6 \times 10^{-11}$
11)	$10^{-3}$	49	$3 \times 10^{-6}$	323	$6 \times 10^{-4}$
	$10^{-6}$	105	$2 \times 10^{-10}$	1919	$4 \times 10^{-8}$
	$10^{-9}$	161	$2 \times 10^{-14}$	7391	$8 \times 10^{-11}$
12)	$10^{-3}$	57	$7 \times 10^{-7}$	19	$2 \times 10^{-8}$
	$10^{-4}$	73	$4 \times 10^{-8}$	95	$1 \times 10^{-11}$
	$10^{-9}$	217	$1 \times 10^{-14}$	171	$3 \times 10^{-11}$

は二次元三角形領域専門の特異積分向きに作られた適応型自動積分法である。積分10), 11), 12)の結果を表3に示す。数値例によって本方法は, 滑らかな型か振動型の2~3次元有限領域(特に境界が滑らかな関数で定義される)上の積分に対して能率的であることがわかる。

本プログラムは名古屋大学大型計算機センターにライブラリープログラムとして登録されている<sup>9), 10)</sup>。

### 参考文献

1) P.J.Davis and P.Rabinowitz: Methods of Numerical Integration, Academic Press, Orlando (1984).

2) 杉原正顕: Good Lattice Pointsを用いた多重数値積分,

京都大学数理解析研究所講究録 483, pp.249-283 (1983).

- 3) Hua Loo Keng and Wang Yuan: Applications of Number Theory to Numerical Analysis, Springer-Verlag, Berlin (1981).
- 4) T.Hasegawa, T.Torii and I.Ninomiya: Generalized Chebyshev Interpolation and its Application to Automatic Quadrature, Math.Comput., Vol.164, pp.537-553 (1983).
- 5) F.N.Fritsch, D.K.Kahaner and J.N.Lyness: Double Integration Using One-Dimensional Adaptive Quadrature Routines: A Software Interface Problem, ACM Trans.Math.Software, Vol.7, pp.46-75 (1981).
- 6) S.Filippi: Angenäherte Tschebyscheff Approximation einer Stammfunktion - eine Modifikation des Verfahrens von Clenshaw und Curtis, Numer.Math., Vol.6, pp.320-328 (1964).
- 7) A.C.Genz and A.A.Malik: Remarks on Algorithm 006: An Adaptive Algorithm for Numerical Integration over an N-Dimensional Rectangular Region, J.Comp.Appli.Math., Vol.6, pp.295-302 (1980).
- 8) D.P.Laurie: Algorithm 584 CUBTRI: Automatic Cubature over a Triangle, ACM Trans.Math.Software, Vol.8, pp.210-218 (1982).
- 9) 名古屋大学大型計算機センター; ライブラリープログラム利用の手引(数値計算編)(1982).
- 10) 二宮市三, 秦野甯世: 数学ライブラリ NUMPAC, 情報処理, Vol.26, No.9, pp.1033-1042 (1985).