数理解析研究所講究録
第587巻 1986年 1-8

(t)-designに関するGrossタイプの定理

阪大理 永尾 汎 (Hirosi Nagao)
鹿大理 厚見 寅司 (Tsuyoshi Atsumi)
上越教育大 伊藤 達郎 (Tatsuro Ito)

Def. $N=\{1,2,\cdots,n\}$, $F=\{\alpha,\beta,\cdots\}$ $|F|=q$

$V=N\times F$ $\quad S\subseteq V$ $\quad S=\{(i_1,\alpha_1),\cdots,(i_k,\alpha_k)\}$

S : (k)-subset $\overset{\text{d.}}{\longleftrightarrow}$ $i_1,\cdots,i_k$ はすべて異なる。

Def. $\mathbb{B}$ を (k)-subsets のある family とするとき

$(V,\mathbb{B})$ が (t)-$((n,q),k,\lambda)$ design $\overset{\text{d.}}{\longleftrightarrow}$ $\forall(t)$-subset T を含む $B(\in\mathbb{B})$ の個数が丁度 λ 個.

(t)-design はまた t-design of type $q-1$ [2] として知られている。 以下 $2\leqq t<k<n$, $2\leqq q$ と仮定する.

Lemma 1. $(V,\mathbb{B})$: (t)-$((n,q),k,1)$ design とする。

I : (i)-subset, J : (j)-subset s.t.

(i) $I\cap J=\phi$

(ii) $\exists B(\in\mathbb{B})\supseteq I\cup J$.

とするとき $\lambda(I, J) = \#\{C \in \mathbb{B} \mid I \subseteq C,\ J \cap C = \phi\}$

この数は i, j, t, n, q, k で決まり．$\lambda_{i,j}$ とおくと．

$\lambda_{i,j} = \lambda_{i,j-1} - \lambda_{i+1,j-1}$ がなりたつ．

Theorem 1．$(V, \mathbb{B})$: (t)-$((n, q), k, 1)$ design $t = \text{odd}$

$\Rightarrow \lambda_{0,k} > 0$

Theorem 2．$(V, \mathbb{B})$: (t)-$((n, 2), k, 1)$ design

$t = \text{even} \Rightarrow \lambda_{0,k} > 0$

上の定理は Gross の定理 1［3］の拡張である。

t-design の時と同様に (t)-design に対しても "λ_i" とか "design の拡大" 等が定義される。

次のような結果を得る．

$$\lambda_i = \frac{\lambda \binom{n-i}{t-i} q^{t-i}}{\binom{k-i}{t-i}} \qquad 0 \leqq i \leqq t.$$

$(V, \mathbb{B})$: (t)-$((n, q), k, \lambda)$ design が拡大可能ならば

$$b(n+1)q \equiv 0 \pmod{k+1}$$

Fisher's Inequality

(2)-$((n, q), k, \lambda)$ design では

$$b \geqq nq$$

$\lambda=1$ である (t)-design の例

例1. $(N, \mathcal{C})$: 3-$(2^d, 4, 1)$ design とする $(d \geq 3)$

$N=\{1, 2, \cdots, 2^d\}$, $F=GF(2)$, $V=N\times F$

$\mathbb{B}=\{B \mid B=\{(i_1,\alpha_1), (i_2,\alpha_2), (i_3,\alpha_3), (i_4,\alpha_4)\}$ (4)-subset of V, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}\in\mathcal{C}$, $\sum_{i=1}^{4}\alpha_i=0\}$

$(V, \mathbb{B})$: (3)-$((2^d, 2), 4, 1)$ design である.

例2. (t)-$((k, g), k, \lambda)$ design $(V, \mathbb{B})$ は大きさ b 制約数 k, 水準 g, 強さ t の orthogonal array とよばれている。 $A=\{1, 2, \cdots, k\}\times F$

$(A, \mathbb{B})$: index λ の orthogonal array (b, k, g, t) とする。 G は $N=\{1, 2, \cdots, n\}$ $(n>k)$ 上 t 重可移群とする.

$B\in\mathbb{B}$ に対して $B^\sigma=\{(i^\sigma,\alpha) \mid (i,\alpha)\in B\}$ と定める。

$V=N\times F$ $\quad \mathbb{B}^G=\{B^\sigma \mid B\in\mathbb{B}, \sigma\in G\}$

$(V, \mathbb{B}^G)$: (t)-$((n, g), k, \lambda')$ design になる

Orthogonal array $(7^5, 8, 7, 5)$ は存在する. [ ]

M_{24} は $\{1, 2, \cdots, 24\}$ 上 5 重可移群である

上のことより

(5)-$((24, 7), 8, 1)$ design がつくれる。

Proposition 1. (t)-$((n, q), k, 1)$ design with $1 < t+1 \leqq k < n$ が存在すれば

$$(n-t-1)q \geqq (t+1)(k-t-1)$$

上は Bush, Cameron の結果の拡張である。

以下 $(V, \mathcal{B})$: (t)-$((n, q), k, 1)$ design に対して成立する結果である

Lemma 2. $$\lambda_{i,j} = \sum_{r=0}^{j} (-1)^r \binom{j}{r} \lambda_{i+r}.$$

特に $$\binom{n-t}{k-t}\lambda_{0,k} = \sum_{r=0}^{t-1} (-1)^r \binom{k}{r}\binom{n-r}{k-r} q^{t-r} + (-1)^t \binom{k-1}{k-t}\binom{n-t}{k-t}.$$

証明) sieve method による.

$$f(t) = \sum_{r=0}^{t-1} (-1)^r \binom{k}{r}\binom{n-r}{k-r} q^{t-r} + (-1)^t \binom{k-1}{k-t}\binom{n-t}{k-t}$$

とおく

次の公式は重要である.

Lemma 3. $$f(k) q^{-k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r}\binom{n-k}{k-r}\left(1 - \frac{1}{q}\right)^r > 0$$

よって (*) $$f(t) q^{-t} = f(k) q^{-k} + (-1)^t \binom{k-1}{k-t}\binom{n-t}{k-t}$$

$$-\left\{\sum_{r=t}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}\binom{n-r}{k-r}q^{-r}\right\}.$$

証明

$$(1+x)^n\left(1-\frac{1}{q}\frac{x}{x+1}\right)^k=(1+x)^{n-k}\left(1+\left(1-\frac{1}{q}\right)x\right)^k$$

展開して x^k の係数を考える。

Lemma 4. $\dfrac{n-m}{k-m}\geqq\dfrac{n-p}{k-p}\quad(n>k\geqq p)$

$$\frac{n-t+1}{k-t+1}\geqq\frac{k}{t+1}\geqq\frac{k-l}{l+1}\quad(l\geqq t)$$

証明

Fisherの不等式より

定理1の証明

$t=\mathrm{odd}$ より (*) は次のようになる。

$$f(t)q^{-t}=f(k)q^{-k}+\left\{\binom{k-1}{t-1}\binom{n-t}{k-t}q^{-t}-\binom{k}{t+1}\binom{n-t-1}{k-t-1}q^{-t-1}\right\}$$

$$+\sum_{l}\left\{\binom{k}{l}\binom{n-l}{k-l}q^{-l}-\binom{k}{l+1}\binom{n-l-1}{k-l-1}q^{-l-1}\right\}.$$

$$l\in\left\{t+2,t+4,\cdots,2\left[\frac{k-1}{2}\right]+1\right\}.$$

$$\binom{k}{l}\binom{n-l}{k-l}q^{-l}-\binom{k}{l+1}\binom{n-l-1}{k-l-1}q^{-l-1}$$
$$=q^{-l-1}\binom{k}{l}\binom{n-l-1}{k-l-1}\left(\frac{n-l}{k-l}q-\frac{k-l}{l+1}\right)\geqq 0$$

Lemma 4 より

よって $f(t)>0$ ∴ $\lambda_{0,k}>0$.

定理 2 の証明について i.e. $t=\text{even}$. $q=2$ のとき

$t=2$ 一般の q について成立

$t=4$ あとで証明する

$t\geqq 6$ と仮定する.

$k-t=1$ or 2 公式(※)を用いて定理は成立

$t\geqq 2(k-t)$ $n\geqq 2k$ $\Rightarrow f(t)>0$

$t\geqq 6$, $k-t=3$ のとき $\Rightarrow f(t)>0$

$k-t\geqq 4$ のとき Proposition 1 より $n\geqq 2k$.

Lemma 5 (Strong Fisher's inequality)

(2)-$((n,q),k,1)$ design $(V,\mathbb{B})$ のパラメーターが次の

(i), (ii) いずれも満足しないとする.

(i) $(n-1)q=k(k-1)$

(ii) $(n-1)q = (k-1)(k+q)$

$$\Rightarrow \quad q \geqq 2\sqrt{k}$$

or

$$(n-1)q > (k-1)(k+\sqrt{k})$$

(2)-((n-t+2, 2), k-t+2, 1) について strong Fisher's inequality を適用したいので

$$q=2, \quad 2\sqrt{k-t+2} \geqq 2\sqrt{3} \neq 2$$

よって i), ii) の場合の可能な拡大は決定する.

可能なパラメーターは直接公式(*)で計算し

$\lambda_{0,k} > 0$ となる。

Proposition 2. (t)-((n, q), k, 1) design $t \geqq 4$, even.

$n \geqq 2k$ かつ

$$(n-2k+t-2)\cdots\cdots(n-2k+1)\,q^{t-2}\,\frac{t!}{3}$$

$$> k(k-1)^2 \cdots\cdots (k-t+3)^2(k-t+2)$$

ならば $\quad f(t) > 0$

今 (t)-((n, q), k, 1) design $(V, \mathbb{B})$ に対して 次のことを仮定しより

$$n \geqq 2k, \quad t \geqq 6, \quad k-t \geqq 4$$

$$(n-t+1)\,2 > (k-t+1)\left(k-t+2+\sqrt{k-t+2}\right)$$

もし $k-t \geqq 9$ ならば

$$(n-2k+t-2)\cdots(n-2k+1)\,2^{t-2}\,\frac{t!}{3}$$

$$> k(k-1)^2\cdots(k-t+3)^2(k-t+2)$$

$k-t=8, 7, \cdots, 4$ の場合と, $t=4$ の場合がのこる.

Remark.

$t=$ even のとき k が小さいとき 上の方法で示される が計算が少しやっかいである.

References

1. Cameron. Extremal results and Configuration Theorems For Steiner systems. Annals of Discrete Mathematics 7(1980) 43−63.

2. Delsarte. Four fundamental parameters of code and their combinatorial significance. Info. and Control 23 (1973) 407−438,

3. Gross Intersection Triangles and Block intersection Numbers of Steiner systems. Math. Z. 139 (1974) 87−104.