数理解析研究所講究録
第587巻 1986年 58-68

ハイパーグラフにおける完全マッチングについて

東大・理　宮本 敬士 (Takashi Miyamoto)

ここでは，(2-) グラフにおけるHallの定理の，ハイパーグラフへのある種の拡張について述べる。これは，R. Aharoni [1] の予想として知られているものである。結果的には，Aharoniの予想は特別な場合にのみ解けたが，一般の場合はなお未解決である。

最初に，Hallの定理について簡単に触れておく。グラフGとしては単純二部グラフを考えることにして，Gの部集合をV_1とV_2で表す。Gのマッチングとは，互いに頂点を共有しない辺の集合のことをいう。Gのマッチングが，$|V_1|$本の辺を含んでいるとき，V_1からの完全マッチングであるという。さらに，Gの頂点集合（$V(G)$と表す）の部分集合Sに対して，Sの隣接点集合$\Gamma(S)$を，$\Gamma(S):=\{y\in V(G) \mid xy\in E(G) \text{ for some } x\in S\}$と定義する。（$E(G)$はGの辺集合である。）

Hallの定理を以下に示す。

（定理 Hall）

$${}^{\forall}S \subseteq V_1 ; \Gamma(S) \geqq |S| \Longleftrightarrow \text{G に } V_1 \text{ からの完全マッチング}$$

が存在する。

このようにHallの定理は，二部グラフにおいて，V_1からの完全マッチングが存在するための必要十分条件を与えるものである。この定理をハイパーグラフに拡張する場合（ただし後述のように「十分性」の部分のみの拡張であるが），対象となるハイパーグラフは，二部グラフに相当するような構造を持つものでなければならない。

今後は，n-partite n-graphと呼ばれる，ハイパーグラフの族のみを考える。ハイパーグラフHがn-partite n-graph であるとは

$$H := (V(H), E(H))$$

$$V(H) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n \text{ (disjoint)}$$

$$E(H) \subseteq V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$$

と表し得る場合をいう。二部グラフの場合と同様に，Hのマッチングとは，互いに頂点を共有しない辺の集合のことである。Hのマッチングのうち，含まれている辺の数が最大なものを，Hの最大マッチングといい，Hの最大マッチングに含まれている辺の数を$\nu(H)$で表す。また，Hのマッチングが

$|V_1|$本の辺を含んでいるとき，V_1からの完全マッチングであるという。n-partite n-graphの定義より，HにV_1からの完全マッチングが存在すれば，それはHの最大マッチングである。従って，HにV_1からの完全マッチングが存在することと，$\nu(G)=|V_1|$ となることとは同値である。以後，「V_1からの完全マッチング」を，単に完全マッチングと呼ぶことにする。

$S \subseteq V_1$に対して，$N(S) := \{(v_2, \cdots v_n) \mid (a, v_2 \cdots v_n) \in E(H)$ for some $a \in S\}$と定義する。(ただし，$n \geqq 2$とする) すなわち，$N(S)$とは，Sに属する頂点を通るHの辺のそれぞれを，$V_2 \times \cdots \times V_n$に制限したものの集合である。さらに，$\Gamma(S)$とは，頂点集合が$V_2 \cup \cdots \cup V_n$，辺集合が$N(S)$であるようなハイパーグラフであると定義する。($n \geqq 2$) 明らかに，$\Gamma(S)$は$(n-1)$-partite $(n-1)$-graphになっている。

そこで，Hに完全マッチングが存在するための十分条件を考える。Hallの定理は$n=2$ すなわち2-partite 2-graphの場合に相当するわけだが，この定理の条件を，次のように表すことができる。

$$\forall S \subseteq V_1 ; \nu(\Gamma(S)) \geqq |S| \quad --- (*)$$

($n=2$ だから，$\Gamma(S)$は1-partite 1-graphとなる。$\nu(\Gamma(S))$は，$\Gamma(S)$の頂点数(=辺数) に等しい。)

しかしながら，(*)は $n \geqq 3$ では十分条件にはなり得ない。

例えば,

$$H=(V(H),\ E(H)),\ V(H)=V_1\cup V_2\cup V_3$$

$$V_1=\{a_1,\ a_2\},\quad V_2=\{b_1,\ b_2\},\quad V_3=\{c_1,\ c_2\}$$

$$E(H)=\{(a_1,b_1,c_1),\ (a_1,b_2,c_2),$$
$$(a_2,b_2,c_1),\ (a_2,b_1,c_2)\}$$

とすると,Hは3-partite 3-graph であり,明らかに(*)が満たされているが,Hは完全マッチングを持たない。同様な例を $n\geqq 4$ で作ることは容易である。

従って, $n\geqq 3$ では,完全マッチングが存在するための($\nu(\Gamma(S))$ に関する)十分条件は,$\nu(\Gamma(S))>|S|$ を満たすものでなければならない。

Aharoni の予想は,次の通りである。

(予想 R. Aharoni [1])

$$\forall S\subseteqq V_1;\ \nu(\Gamma(S))\geqq (n-1)(|S|-1)+1 \quad \cdots (**)$$
$$(n\geqq 2)$$
$$\Longrightarrow \nu(H)=|V_1|$$

$n=2$ ならばAharoni の予想する十分条件は(*)に一致している。この予想によると,$\Gamma(S)$で最低必要とされる最大マッチングの値は,$|S|$が1増加するのに対して, $n-1$ の割合で増加する。これは,(*)での増加の割合に対して,非常に急激である。しかし,もしこの予想が正しければ,(**)はsharp な条件であることが,次の例により示される。

(例) $H=(V(H),\ E(H))$

$$V(H)=V_1\cup V_2\cup\cdots V_n\quad(n\geqq 2)$$

$$V_1=\{a_i^1\mid 1\leqq i\leqq l\}\quad(l\geqq 2)$$

$$V_k=\{a_{ij}^k\mid 1\leqq i\leqq l-1,\ 1\leqq j\leqq n-1\}\quad(2\leqq k\leqq n)$$

$$E(H)=\bigcup_{i=1}^{l-1}\{(a_i^1,\ a_{ij}^2,\cdots,a_{ij}^n)\mid 1\leqq j\leqq n-1\}$$

$$\cup\{(a_{i+1}^1,\ a_{i,1}^2,\cdots,a_{i,n-1}^n)\mid 1\leqq i\leqq l-1\}$$

この例では，Hはn-partite n-graphであり，$S=V_1$の場合を除いて(**)が満たされている。しかし，Hには完全マッチングが存在しない。

今回は，Aharoniの予想の証明を試みたが，部分的な結果を得るにとどまった。証明の方針として考えられるのは，$|V_1|$に関する帰納法を用いることであるが，後述の，$|V_1|$が小さい場合の証明が示す通り，$|V_1|$が増えるにつれて，議論が急に複雑になるのである。

(定理) $|V_1|\leqq 4,\quad n\geqq 2,$

$$\forall S\subseteq V_1;\ \nu(\Gamma(S))\geqq(n-1)(|S|-1)+1$$

$$\Longrightarrow \nu(H)=|V_1|$$

(証明)

$|V_1|=1$ の場合．自明である。

$|V_1|=2$ の場合。$V_1=\{a_1, a_2\}$ とする。
定理の仮定により，$\Gamma(V_1)$ には，n本以上の辺からなるマッチングが存在する。このマッチングの中に，Hにおいて，a_1を通る辺とa_2を通る辺がそれぞれ存在するならば，Hには完全マッチングが存在する。従って，これらの辺は，すべてa_1を通るとしてよい。「$|V_1|=1$ の場合」に定理は正しいので，Hにはa_2を通る辺が存在するが，この辺は，先に述べたマッチングのすべての辺と交わることができない。（マッチングの中には，この辺と交わらない辺が，少なくとも1本は存在する。）それゆえ，Hには完全マッチングが存在する。

$|V_1|=3$ の場合。$V_1=\{a_1, a_2, a_3\}$ とする。
$\Gamma(V_1)$ には，$(2n-1)$本以上の辺からなるマッチングが存在する。これらの辺は，Hではa_1またはa_2を通るとしてよい。このマッチングの中で，Hにおいてa_1を通る辺全体の集合をF_1，a_2を通る辺全体の集合をF_2で表す。（F_1，F_2は，Hの辺の集合として考えている。）$|F_1|+|F_2| \geqq 2n-1$ なので，一般性を失わず，$|F_1| \geqq n$としてよい。「$|V_1|=2$ の場合」に定理は正しいので，Hには，a_2を通る辺とa_3を通る辺で，互いに頂点を共有しないものがある。前者をf_2，後者をf_3とする。f_3と交わらない辺がF_2に存在すれば，$|F_1| \geqq n$なので，F_1に属する辺でf_3と交わらないものがあるゆえ，Hに完全マッチングが存在す

る。従って，f_3はF_2に属する辺すべてと交わっている（このことを，「f_3がF_2をcoverする」と言う。正確には，ある辺集合$\{g_1 \cdots g_s\}$が別の辺集合$\{h_1 \cdots h_t\}$をcoverするとは，「任意の$h_i \in \{h_1 \cdots h_t\}$に対して，ある$g_j \in \{g_1 \cdots g_s\}$が存在し，$h_i$と$g_j$が$V_2 \cup \cdots \cup V_n$に属する頂点で交わる」ということである。）としてよい。さて，$F_1 \cup F_2$の辺の中で，別の一辺からcoverされるのは，高々$n-1$本であることに注意しよう。ゆえに，$\{f_2, f_3\}$によってcoverされる$F_1 \cup F_2$の辺は，高々$2n-2$本である。一方，$|F_1 \cup F_2| \geqq 2n-1$であり，$f_3$は$F_2$をcoverしているので，$F_1$には$\{f_2, f_3\}$によってcoverできない辺がある。ゆえに，Hには完全マッチングが存在する。

$|V_1|=4$の場合。$V_1=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$とする。$E_i:=\{e \mid e \in E(H)$, eはa_iを通る。$\}$ $(i=1 \cdots 4)$とする。$\Gamma(V_1)$には，$3n-2$本以上の辺からなるマッチングがある。これらの辺は，Hでは，a_1, a_2, a_3のいずれかを通るとしてよい。先と同様にF_1, F_2, F_3を定める。（$|F_1| \geqq n$としてよい。）「$|V_1|=3$の場合」に定理は正しいので，Hには，a_2を通る辺（f_2とおく），a_3を通る辺（f_3），a_4を通る辺（f_4）で，互いに交わらないものがある。f_4は，一般性を失わず，F_3をcoverしているとしてよい。

$\{f_3, f_4\}$でF_1もF_2もcoverしなければ，明らかにHには完

全マッチングが存在する．$\{f_3, f_4\}$がF_2をcoverしていれば，$\{f_2, f_3, f_4\}$によってcoverされる$F_1 \cup F_2 \cup F_3$の辺は，高々$3n-3$本であり，一方，$|F_1 \cup F_2 \cup F_3| \geqq 3n-2$，かつ，$\{f_3, f_4\}$が$F_2 \cup F_3$をcoverしているので，$\{f_2, f_3, f_4\}$は$F_1$をcoverしない。従って，Hには完全マッチングが存在する。以上のことより，$\{f_3, f_4\}$がF_1をcoverしているとしてよい。この結果，次のことがわかる。

① $|F_2| \geqq n$ （$\{f_3, f_4\}$が $F_1 \cup F_3$ をcoverしている）

② E_4に属する任意の辺は，F_3をcoverするとしてよい。

③ E_1に属する任意の辺は，f_3またはf_4と交わるとしてよい。

定理の仮定により，$\Gamma(\{a_1, a_3, a_4\})$には$2n-1$本からなるマッチングが存在する。このマッチングをLとし，$L_i := L \cap E_i$と定める。

まず，③より，$|L_1| \leqq 2n-2$ ··· ④ である。

次に，$|L_1 \cup L_3| \geqq 2n-1$と仮定する．④より，$L_3$は空ではない。$f_4$が$L_3$をcoverしたとすると，③より，$\{f_3, f_4\}$が$L_1 \cup L_3$をcoverすることになって，仮定に反する．従って，L_3の元ℓ_3で，f_4に交わらないものがある．このようなすべての元ℓ_3について，$\{\ell_3, f_4\}$はF_1をcoverするとしてよい。（F_2をcoverしたとすると，$\{\ell_3, f_3, f_4\}$が$F_1 \cup F_2 \cup F_3$を

coverすることになり，矛盾である。）しかしながら，$|F_1| \geqq n$ なので，F_1には，f_4でcoverできない辺d_0がある。ゆえに，$\{f_4, d_0\}$がL_3をcoverする。

さて，L_1の元l_1で，f_4と交わらないものがあるとする。$\{l_1, l_3, f_4\}$は，互いに交わらない辺の集合で，$F_1 \cup F_3$をcoverする。従って，F_2はcoverできないゆえ，Hに完全マッチングが存在する。だから，L_1の元はf_4と交わるとしてよい。

結局，$\{f_4, d_0\}$が$L_1 \cup L_3$をcoverすることになり，仮定$|L_1 \cup L_3| \geqq 2n-1$に反する。それゆえ，$|L_1 \cup L_3| \geqq 2n-1$ならばHは完全マッチングを持つ。

この結果，$|L_1 \cup L_3| \leqq 2n-2$としてよい。同様な議論で，$|L_1 \cup L_4| \leqq 2n-2$としてよいことが言える。一方，$|L_1 \cup L_3 \cup L_4| = |L| \geqq 2n-1$なので，$L_3$，$L_4$は空ではない。

③より，L_1に属する任意の辺は，f_3またはf_4と交わる。従って，「f_4に交わらないL_3の元l_3'が存在する。」「f_3に交わらないL_4の元l_4'が存在する」のうち，少なくとも一方が成立する。どちらが成立したとしても，同様な議論が可能なので，ここでは前者の場合のみを示す。

まず，$\{l_3', f_4\}$はF_1をcoverするとしてよい。（$|L_1 \cup L_3| \geqq 2n-1$の場合と同じ議論が使える）また，②より，$L_4$に属

する任意の辺l_4は，F_3をcoverする。従って，$\{l_3', l_4\}$ はF_1をcoverするとしてよい。（F_2をcover したとすると，$\{l_3', l_4, f_4\}$で$F_1 \cup F_2 \cup F_3$を coverすることになって矛盾である。）さらに，L_3に属する任意の辺l_3について，$\{l_3, l_4\}$ はF_1をcoverするとしてよい。（F_2をcover するならば，$\{l_3, l_3', l_4\}$を考えれば矛盾）

ここで，$L_1 \neq \phi$と仮定する。適当にL_3とL_4の元を一つずつ取ってくると，この二本で$F_1 \cup F_3$ を cover しているので，L_1の元はF_2をcoverすることはなく，H に完全マッチングが存在する。ゆえに，$L_1 = \phi$としてよい。

L_3の任意の辺をl_3，L_4の任意の辺をl_4とする。すでに示したように，$\{l_3, l_4\}$はF_1をcoverするが，$|F_1| \geqq n$なので，F_1には，l_3と交わらない辺d_i'，l_4と交わらない辺d_i''が存在する。d_i'はL_4をcoverし，d_i''はL_3をcoverする。また，$L_1 = \phi$である。以上のことにより，$\{d_i', d_i''\}$はLをcoverし，$|L| \leqq 2n-2$となって，矛盾である。

この結果，$|V_1| = 4$の場合も，定理が正しいことが示された。

（証明終）

[参考文献]

[1] R. Aharoni, Matchings in n-Partite n-Graphs, Graphs and Combinatorics, 1(1985), 303−304.