数理解析研究所講究録
第587巻 1986年 90-92

反対称有向グラフにおける有向4-サイクルの個数について

近畿大　田澤新成（Shinsei TAZAWA）

位数pの単純グラフの族の中で弦のない4-サイクルの最大個数t_pは

$$t_p=\begin{cases}\binom{n}{2}^2 & (p=2n)\\ \binom{n}{2}\binom{n+1}{2} & (p=2n+1)\end{cases}$$

であり，それの極値グラフはそれぞれ$K_{n,n}$と$K_{n,n+1}$であることが立花，奈良[3]によって示された。田澤[2]は三角形を含まない連結な(p,q)-単純グラフの族に対し，弦のない4-サイクルの最大個数についての1つの上限を与えた。

ここでは，位数pの反対称有向グラフの族の中で弦のない有向4-サイクルの最大個数について考える。そこで，弦のない4-サイクルとはそれの底グラフが弦をもたないことを意味する。この問題について，Moon and Mosen [1]は反対称有向グラフの族として$m\times n$の2組トーナメントの族のもとで，それの最大個数は$[m^2/4][n^2/4]$であることを示した。ここで，$[x]$

は x を越えない最大の整数を表わす。反対称有向グラフ D に含まれる弦のない有向4ーサイクルの個数を $f(D)$ とおき，次の結果をえた。

定理　位数 p の反対称有向グラフ D の底グラフが三角形を含まないとき，

$$f(D) \leqq \frac{p^4}{128}$$

である。

定理の証明　有向4ーサイクルを点の列 $xyuvx$ で表示する。$\mathcal{L}(D)$ を D に含まれる弦のない有向4ーサイクルの集合として，$e=uv\in E(D)$（D の弧集合）に対し，

$$s(e) = \#\{w\in V(D) \mid \exists w'\in V(D),\ uvw'wu\in\mathcal{L}(D)\}$$

$$t(e) = \#\{w'\in V(D) \mid \exists w\in V(D),\ uvw'wu\in\mathcal{L}(D)\}$$

とおくと，

$$f(D) \leqq \frac{1}{4}\sum_{e\in E(D)} s(e)t(e) \tag{1}$$

となる。D の点 x の出次数を $d^+(x)$，入次数を $d^-(x)$ とおくと，$e=uv\in E(D)$ に対し

$$s(e) \leqq d^-(u),\quad t(e) \leqq d^+(v) \tag{2}$$

である。$d(x) = d^+(x)+d^-(x)$ とおく。G を D の底グラフとするとき，G は三角形を含まないから，G の各辺 uv に対し，

$$(d(u)-1)+(d(v)-1) \leqq p-2 \quad \text{すなわち} \quad d(u)+d(v) \leqq p \tag{3}$$

が成り立つ。さて，(2)，(3)から

$$s(e)+t(e) \leqq p \tag{4}$$

をうる。さらに，(2)から

$$\sum_{e\in E(D)} \{s(e)+t(e)\} \leqq \sum_{uv\in E(D)} \{d^-(u)+d^+(v)\} = 2\sum_{u\in V(D)} d^-(v)d^+(v)$$

$$\leqq \frac{1}{2}\sum_{v\in V(D)} d(v)^2 = \frac{1}{2}\sum_{uv\in E(G)} \{d(u)+d(v)\}$$

となり，(3)から

$$\sum_{e\in E(D)} \{s(e)+t(e)\} \leqq \frac{1}{2} q p \tag{5}$$

をうる。ここで，$q=|E(D)|$．従って，制約条件(4)，(5)のもとで(1)の右辺の上限を求めると，

$$\frac{1}{4}\sum_{e\in E(D)} s(e)t(e) \leqq \frac{qp^2}{32} \tag{6}$$

となり，Gが三角形を含まないという事実からえられる不等式 $q \leqq p^2/4$ を(6)に適用して求める定理をうる。

参考文献

[1] J.W.Moon and L.Moser(1962). On the distribution of 4-cycles in random bipartite tournaments. Canad. Math. Bull. 5, 5-12.

[2] 田澤(1984) Motzkin-Straus 定理の1つの応用，日本数学会秋季総合分科会

[3] 立花，奈良(1984) 数理解析研究所講演予稿集