数理解析研究所講究録
第 587 巻 1986 年 130-138

28次のアダマール行列について

愛媛大・理　木村 浩 (Hiroshi Kimura)
愛媛大・教育　大森博之 (Hiroyuki Ohmori)

位数が24以下のアダマール行列の分類がなされている.([1], [2], [4])。又位数28のアダマール行列が群論的な手法で構成されているが([7], [8]), それらの自己同型群の位数は比較的大きい。最近, 自明な自己同型群しかもたない位数28のアダマール行列も構成された([5])。今回はHall setを持つ位数28のアダマール行列を組織的に構成する方法と, 構成された行列(約6000個)をK-行列によって分類し, 476個のK-同値なクラスを得た事の報告である。

Hを位数28のアダマール行列とし, いわゆる標準化([3])されているものとし, Hに対応するアダマール2-デザインをD(H)とおく。このとき, HがHall setを持つとはHがH′(H′は標準化された位数28のアダマール行列でD(H′)が(2.1)の形の部分行列

をもつ）にアダマール行列の意味で同値の時をいう。

一般性を失う事なくD(H)の最初の3ブロックは(2,1)の形をもつとしてよく，その際図(2,1)のように点の部分集合をX，B，C，…，W，Eと名付ける。

$$
\left|\begin{array}{ccccc|c|c|c|cccccc|cccccc|cccccc|c|}
1&1&1&1&1&1&1& &1&1&1&1&1&1& & & & & & & & & & & & \\
1&1&1&1&1&1& &1& & & & & & &1&1&1&1&1&1& & & & & & \\
1&1&1&1&1& &1&1& & & & & & & & & & & & &1&1&1&1&1&1&
\end{array}\right|
$$

X	B	C	D	U	V	W	E

(2.1)

この時上述の3ブロック以外のD(H)のブロックのX，…，W，E部分における1の個数をx，…，w，eとするとこれらは下の表のいずれかである。

$$
\begin{aligned}
(x,\ b,\ c,\ d,\ e,\ u,\ v,\ w) &= (3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 3,\ 3,\ 3)\\
&= (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 3,\ 3,\ 3)\\
&= (2,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 4,\ 3,\ 3)\\
&= (2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3)\\
&= (2,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 3,\ 4,\ 3)\\
&= (2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3)\\
&= (2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 3,\ 3,\ 4)\\
&= (2,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 3,\ 4,\ 2)
\end{aligned}
$$

上の表で上から順に1，2，…，8型と呼ぶ事にし，D(H)でi型の現われる個数をa_iとする。この時

定理1. $a_1=4,\ a_2=2,\ a_3=\cdots=a_8=3$。

これよりD(H)は一般性を失う事なく図(2,2)の形をもつ。

	1 2 3 4 5	6	7	8	9 10 11 12 13 14	15 16 17 18 19 20	21 22 23 24 25 26	27
1	1 1 1 1 1	1	1		1 1 1 1 1 1			
2	1 1 1 1 1	1		1		1 1 1 1 1 1		
3	1 1 1 1 1		1	1			1 1 1 1 1 1	
4	1 1 1				1 1 1	1 1 1	1 1 1	1
5	(3)				(3)	(3)	(3)	1
6	(3)				(3)	(3)	(3)	1
7	(3)				(3)	(3)	(3)	1
8	(1)	1	1	1	(3)	(3)	(3)	
9	(1)	1	1	1	(3)	(3)	(3)	
10	(2)			1	(4)	(3)	(3)	
11	(2)			1	(4)	(3)	(3)	
12	(2)			1	(4)	(3)	(3)	
13	(2)	1	1		(2)	(3)	(3)	1
14	(2)	1	1		(2)	(3)	(3)	1
15	(2)	1	1		(2)	(3)	(3)	1
16	(2)		1		(3)	(4)	(3)	
17	(2)		1		(3)	(4)	(3)	
18	(2)		1		(3)	(4)	(3)	
19	(2)	1		1	(3)	(2)	(3)	1
20	(2)	1		1	(3)	(2)	(3)	1
21	(2)	1		1	(3)	(2)	(3)	1
22	(2)	1			(3)	(3)	(4)	
23	(2)	1			(3)	(3)	(4)	
24	(2)	1			(3)	(3)	(4)	
25	(2)		1	1	(3)	(3)	(2)	1
26	(2)		1	1	(3)	(3)	(2)	1
27	(2)		1	1	(3)	(3)	(2)	1

(2.2)

ここで (i) は各部分における 1 の個数である (i=2,3,4)。

定理2. HをHall setをもつ位数28のアダマール行列とする。この時 Hの転置行列もHall setをもつ。

次に(2,2)において▨部分を決定するのに，必要に応じてHの行及び列を入れかえる事により，その部分は図(3,2)の17通りのいずれかになる。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array} \\ \begin{array}{c}4\\5\\6\\7\end{array} & \left|\begin{array}{ccccc}1&1&1&&\\&&1&1&1\\&1&&1&1\\1&&&1&1\end{array}\right|\end{array}$$

(1)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array} \\ \left|\begin{array}{ccccc}1&1&1&&\\1&&&1&1\\1&&1&&1\\1&1&&1&\end{array}\right|\end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array} \\ \left|\begin{array}{ccccc}1&1&1&&\\&1&&1&1\\&1&1&1&\\1&&&1&1\end{array}\right|\end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array} \\ \left|\begin{array}{ccccc}1&1&1&&\\1&&&1&1\\1&&&1&1\\1&1&1&&\end{array}\right|\end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c}4\\5\\6\\7\end{array} & \left|\begin{array}{ccccc}1&1&1&&\\&&1&1&1\\&&1&1&1\\1&1&&1&\end{array}\right|\end{array}$$

(5)

$$\left|\begin{array}{ccccc}1&1&1&&\\&1&1&1&\\1&&1&1&\\1&1&&1&\end{array}\right|$$

(6)

$$\left|\begin{array}{ccccc}1&1&1&&\\1&1&&&1\\1&1&&1&\\1&&&1&1\end{array}\right|$$

(7)

$$\left|\begin{array}{ccccc}1&1&1&&\\1&1&&1&\\&1&&1&1\\1&&&1&1\end{array}\right|$$

(8)

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c}4\\5\\6\\7\end{array} & \left|\begin{array}{ccccc}1&1&1&&\\1&1&1&&\\1&1&1&&\\1&1&1&&\end{array}\right|\end{array}$$

(9)

$$\left|\begin{array}{ccccc}1&1&1&&\\1&1&&1&\\1&1&&1&\\1&1&&1&\end{array}\right|$$

(10)

$$\left|\begin{array}{ccccc}1&1&1&&\\1&&&1&1\\1&&&1&1\\1&&&1&1\end{array}\right|$$

(11)

$$\left|\begin{array}{ccccc}1&1&1&&\\1&1&&1&\\1&1&&1&\\1&1&1&&\end{array}\right|$$

(12)

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c}4\\5\\6\\7\end{array} & \left|\begin{array}{ccccc}1&1&1&&\\1&&1&1&\\1&&1&1&\\1&1&&1&\end{array}\right|\end{array}$$

(13)

$$\left|\begin{array}{ccccc}1&1&1&&\\1&1&&&1\\1&1&&&1\\1&1&&1&\end{array}\right|$$

(14)

$$\left|\begin{array}{ccccc}1&1&1&&\\1&1&&1&\\1&1&&1&\\1&&&1&1\end{array}\right|$$

(15)

$$\left|\begin{array}{ccccc}1&1&1&&\\1&&&1&1\\1&&&1&1\\1&1&&1&\end{array}\right|$$

(16)

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c}4\\5\\6\\7\end{array} & \left|\begin{array}{ccccc}1&1&1&&\\&1&&1&1\\&1&&1&1\\1&&&1&1\end{array}\right|\end{array}$$

(17)

(3.2)

Lemma 1　$D(H)=(d_{ij})$ とし　$d_{ij}=0$ の時 $d'_{ij}=1$，$d_{ij}=1$ の時 $d'_{ij}=0$ とおくと

$$d_{4j}+d_{5j}+d_{6j}+d_{7j}+d'_{8j}+d'_{9j}=4 \quad (j=1,2,\cdots,5)$$

上のLemmaにより図(2.2)の $\boxed{\quad}$ 部分は図(3.3)のいずれかになる。

	1	2	3	4	5
4	1	1	1		
5			1	1	1
6		1		1	1
7	1			1	1
8					1
9				1	

(1)

	1	2	3	4	5
4	1	1	1		
5	1			1	1
6	1		1		1
7	1	1		1	
8	1				
9	1				

(2)

	1	2	3	4	5
4	1	1	1		
5		1		1	1
6		1	1	1	
7	1			1	1
8				1	
9		1			

(3)

	1	2	3	4	5
4	1	1	1		
5	1			1	1
6	1			1	1
7	1	1	1		
8	1				
9	1				

(4)

	1	2	3	4	5
4	1	1	1		
5			1	1	1
6			1	1	1
7	1	1		1	
8				1	
9			1		

(5)

(3.3)

Lemma 2　Hを(2.2)の形をしたD(H)で $\boxed{\quad}$ 部分が(3.3)の(5)をもつアダマール行列とする。このときHは $\boxed{\quad}$ 部分が(3.3)の(2)であるD(H')をもつアダマール行列H'と同値である。同様にして(3.3)の(4)から得られるアダマール行列は(3.3)の(2)から得られる行列の転置行列と同値となる。

結局Hall setをもつ位数28のアダマール行列HはD(H)が(2.2)の形をしており、$\boxed{\quad}$ 部分が(3.3)の(1),(2),(3)のいずれかとなる。今回(3.3)の(1)の場合について計算機を用いて約6000(同値なものを

含むと思われる)個のアダマール行列を構成した。

次に位数28のアダマール行列Hに対してK-行列 $K^*(H)=(k_{ij})$ を対応させる。ここに $K^*(H)$ は 28×27 行列で k_{ij} は H の i 行と j 行を含む H の Hall set の個数を表わす。このK-行列は2つのアダマール行列の同値性の判定に有効と思われる(K-行列が違えば同値でない)。しかしK-行列が同じでも同値でないアダマール行列が存在する(表1)。このK-行列がどれほどの強さをもつかは今後の課題である。先に求めた約6000個のアダマール行列をK-行列により476個のK-同値なクラスに分類した。その一部を次下に示す。

表で数32511は2進展開により

0000000000000111111011111111 となりこれに対応するアダマール行列の行は

(1 1 1 1 1 1 1 1-1 1 1 1 1 1 1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1)

である。又 K(H) において

(2 ....111111114) は Type

(...................111111114) が2個ある事を示し、・は 0 を A, D はそれぞれ 10, 13 を表わす

Table of K-matrices of H-matrices in [8]

K(H)	H in [8]
28 3333333333333	No.1
28 111	No.2 and No.3
14 ....1111111112222223446 14 1111111222222233344	No.4
14 ....11111112222233334 14 11111122222333455	No.5
14 ....11111122222224 14 11111111222222244	No.7
28 11111111123	No.8
28 11111112222	No.9
28 11111111111111111111111111D	No.10
14 ....1111111111122333 14 111111111111222237	No.11
14 ....11111122222236 14 1111111122222333	No.12
26 ....111111111111122235 2 11111111111111111111111111D	[7] $\lvert Aut(H)\rvert = 4\cdot 13$

表 1

Table of H-matrices and K-matrices

1st row ~ 27th row of H

32511	2064767	132121023	149130767	252481081	158675509	179983411
40474593	28708817	243737829	221366499	215749323	81059109	93010723
104163083	222516569	212394837	190328135	106646165	30270611	87733389
141453737	177322393	184996743	64152169	107395155	61691981	

K(H) | K(^{T}H)

```
2 .................111111114
6 ..............111111111234
6 .............1111111122234       K(H)
6 ...........111111111222224
6 ......1111111111111111222A
2 ...11111111111111111112224
```

表 2

```
    32511   2064767 132121023 149130767 252481081 187904565 215307315
 44406753  89329617 209240805 244720331 189601991  80624421 104422155
 55895815 163065187 243394901 220616013  86501539  46025877  93959309
172713385 141867417 160093075  64149609  32334425 107656275

1 .....................11112222222
1 ...................1111111112223
2 ...................1111111122222
1 ...................1111111222233
1 ..................11111111122224
1 .................111111122222223
1 .................111111122222244
1 ................1111111111222233
1 ................1111111112222355
1 ................1111111122222222
1 ................1111111122222234
1 ................1111112222222235
1 ................1111112222223345
1 ...............11111111111122224
1 ...............11111111111122233
1 ...............11111111122222233
1 ...............11111111222222223
1 ...............11111112222222225
1 ..............111111111122222223
1 ..............111111111122223345
1 ..............111111111222222222
1 ..............111111111222223344
1 ..............111111112222222233
1 ..............111111122222222223
1 .............1111111111111122234
1 .............1111111111122222255
1 ............11111111111111222223

1 ...................1111111122234
2 ...................1111222222233
1 ..................11111111112333
1 ..................11111111222223
1 ..................11111112222222
1 ..................11111112222234
1 ..................11111122222233
1 .................111111122222223
1 .................111111122222334
2 .................111111222222234
1 ................1111111111222224
2 ................1111111112222223
1 ................1111111222222233
1 ................1111111222222344
1 ...............11111111112222234
1 ...............11111111112222333
1 ...............11111111122222233
1 ...............11111111222222223
1 ..............111111111111222234
1 ..............111111111122222334
1 ..............111111111222222333
1 ..............111111112222223334
1 ..............111111122222222223
1 .............1111111112222222223
1 ............11111111111122222233

    32511   2064767 132121023 149130767 252481081 187904565 215307315
 44406753  89329617 213533417 175675603 221062343  24700707  78527251
104422669 164182377 174482777 194267975  48114853  28698777  55530123
235137443 160093589 206877581  90626149 113893973 127054923

1 ..........................111222
3 .........................1111113
3 .........................1111122
4 .......................111111111
3 .......................111111222
3 ......................1111111122
3 ....................111111111222
3 ...................1111111111122
1 ...................1111111112223
3 .................111111111122223
1 ................1111111111111113

3 ................................
1 ..........................111222
6 ......................1111111122
3 .....................11111111133
3 .....................11111112222
3 ....................111111111123
3 ....................111111111222
3 ...................1111111111122
3 ...................1111111112223
```

表3

[注意] 表1~3に出ているK(H)はK*(H)の各行について成分を小さい順に並びかえ同一行の重複度及びその成分を記入したものである。

References

1 M.Hall,Jr., Hadamard Matrices of order 16, J. P. L. Research Summary No.36-10,1(1961),21-26.

2 M.Hall,Jr., Hadamard Matrices of order 20, J. P. L. Technical Report No.32-761,1965.

3 M.Hall.Jr., Combinatorial Theory, Ginn (Blaisdell), Boston, 1967

4 N.Ito, J. S. Leon, and J. Q. Longyear, Classification of 3-(24,12,5) desgins and 24-dimensional Hadamard matrices, J. Combin. Theory Ser. A 31(1981),66-93.

5 H. Kimura, Hadamard matrices of order 28 with automorhpism gruops of order two, J. Combin. Theory Ser. A (to appear).

6 Z. Kiyasu, Hadamard matrix and its applications, Denshi-tsushin Gakkai in (Japanese) 1980.

7 V. D. Tonchev, Hadamard matrices of order 28 with automorphisms of order 13, J. Combin. Theory Ser. A, 35(1983),43-57.

8 V. D. Tonchev, Hadamard matrices of order 28 with automorphisms of order 7, J. Combin. Theory Ser. A, 40(1985),62-81.