数理解析研究所講究録
第 588 巻 1986 年 1-8

Ultrafilters over $P_\kappa\lambda$

福島高専　阿部吉弘 (Yoshihiro Abe)

κを regular cardinal とする時、κ上の filter U について、次の(1)〜(4)が同値である事は良く知られている。

(1) U is weakly normal

(2) $U \subset V \wedge V$ is a filter $\longrightarrow V$ is weakly normal

(3) $\{X_\alpha \mid \alpha<\kappa\} \subset U^+ \wedge \forall\alpha<\beta(X_\beta \subset X_\alpha) \longrightarrow \underset{\alpha}{\triangle} X_\alpha \in U^+$

(4) U is a p-point $\wedge\ U \supset C_\kappa$ = the club filter on κ

また κ上の countably complete uniform ultrafilter の RK-ordering については、

U: weakly normal $\longleftrightarrow$ U: minimal.

ここでは、$P_\kappa\lambda$ 上の fine filter U について、同様な事が成立するかどうか調べてみる。以下、$\kappa\leq\lambda$ は cardinals で、κは regular と仮定する。

§1 Easy observations

Def. 1.1 Uは $P_\kappa\lambda$ 上の filter とする。

(i) U is fine $\underset{\Delta}{\longleftrightarrow}$ $\forall\alpha<\lambda(\{x \mid \alpha\in x\}\in U)$.

(ii) $\mathcal{U}$ is a fine measure $\underset{\Delta}{\longleftrightarrow}$ $\mathcal{U}$ is a κ-complete fine ultrafilter.

(iii) $\mathcal{U}$ is weakly normal $\underset{\Delta}{\longleftrightarrow}$ $\forall f : P_\kappa\lambda \to \lambda\ (\{x \mid f(x) \in x\} \in \mathcal{U} \to \exists \alpha < \lambda (\{x \mid f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{U}))$.

(iv) $\mathcal{U}$ is a P-point $\underset{\Delta}{\longleftrightarrow}$ $\forall f$: unbounded (mod $\mathcal{U}$) $\exists X \in \mathcal{U}^+$ $\forall \alpha < \lambda\, \exists \beta < \lambda\, (f^{-1}(\{\alpha\}) \cap X \subset P_\kappa \beta)$.

Proposition 1.2. 次の (1)～(3) は同値

(1) $\mathcal{U}$ is weakly normal.

(2) $\mathcal{V} \supset \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ is weakly normal

(3) $\{X_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \subset \mathcal{U}^+ \wedge (\alpha < \beta \to X_\beta \subset X_\alpha) \longrightarrow \underset{\alpha}{\Delta} X_\alpha \in \mathcal{U}^+$.

(proof) (1) $\to$ (2) は明らか．まず，(2) $\to$ (3) を示す．$\mathcal{V}$ を $\mathcal{U}$ と $\{X_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ から generate される filter とすると $\mathcal{V}$ は weakly normal である。$\underset{\alpha}{\Delta} X_\alpha \notin \mathcal{V}^+$ とすると，

$$(\underset{\alpha}{\Delta} X_\alpha)^c = \{x \mid \exists \alpha \in x\ (x \notin X_\alpha)\} \in \mathcal{V}.$$

従って，$\exists f\ (\{x \mid f(x) \in x \wedge x \notin X_{f(x)}\} \in \mathcal{V})$．$f$ に $\mathcal{V}$ の weak-normality を用いて，$\exists \alpha < \lambda (\{x \mid f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{V})$.

$f(x) \leq \alpha \to X_\alpha \subset X_{f(x)}$ であるから．$\{x \mid x \notin X_\alpha\} \in \mathcal{V}$ となり．$X_\alpha \in \mathcal{V}^+$ に反する．$\therefore \underset{\alpha<\lambda}{\Delta} X_\alpha \in \mathcal{V}^+ \subset \mathcal{U}^+$.

次に (3) $\to$ (1) を示す。$X = \{x \mid f(x) \in x\} \in \mathcal{U}$ とする。$\forall \alpha < \lambda\ (X_\alpha = \{x \mid f(x) > \alpha\} \in \mathcal{U}^+)$ とする。$\alpha < \beta \to X_\beta \subset X_\alpha$ だ

から、$\underset{\alpha}{\triangle} X_\alpha \in U^+$。 $x \in \underset{\alpha}{\triangle} X_\alpha$ とすると、$f(x) \in X_\alpha$ for $\alpha \in x$
つまり、$\forall \alpha \in x (f(x) > \alpha)$ となり、$f(x) \in x$ に反する。 ⊠

Proposition 1.3.

(i) U is weakly normal $\longrightarrow$ U is a p-point.

(ii) U is a p-point $\wedge$ $U \supset C_{\kappa,\lambda}$ = the club. filter on $P_\kappa\lambda$ $\longrightarrow$
$\longrightarrow$ U is weakly normal.

(Proof). (i) f: unbounded (mod. U) とする。即ち、
$\forall \alpha < \lambda \, (X_\alpha = \{x \mid f(x) > \alpha\} \in U^+)$ である。$\alpha < \beta$ なら、$X_\beta \subset X_\alpha$
だから、仮定により (1.2. により) $X = \triangle X_\alpha \in U^+$。

$X \cap f^{-1}(\{\beta\}) = \{x \mid \forall \alpha \in x (f(x) > \alpha) \wedge f(x) = \beta\} \subset \{x \mid \sup(x) \leq \beta\}$。

(ii) f を $P_\kappa\lambda$ 上の regressive function とする。
$\forall \alpha < \lambda (\{x \mid f(x) > \alpha\} = X_\alpha \in U^+)$ とすると、f は unbounded (mod. U) であり、U は p-point だから、$\exists X \in U^+ \, \forall \alpha \, \exists \beta < \lambda (X \cap f^{-1}(\{\alpha\}) \subset P_\kappa\beta)$ となる。 しかし、$U \supset C_{\kappa,\lambda}$ から、X は stationary で、$\exists \alpha < \lambda \, \exists Y \subset X$ (Y is stationary $\wedge$ $Y \subset f^{-1}(\{\alpha\})$) となって矛盾する。 ⊠

§2. $C_{\kappa,\lambda}$ を含まない weakly normal filter の存在.

Prop. 1.3. (ii) の逆が成立しない場合を示し、$\lambda = \kappa$ の時と、$\lambda > \kappa$ の時で状況が異なることを示す.

Lemma 2.1. $\mathcal{U}$を κ-complete filter on κ, $\mathcal{U}_\alpha$ を weakly normal filter on $P_\alpha\lambda$ とする。$\mathcal{U}$ を次のように定める。

$X \in \mathcal{U} \longleftrightarrow \{\alpha<\kappa \mid X \cap P_\alpha\lambda \in \mathcal{U}_\alpha\} \in \mathcal{U} \wedge X \subset P_\kappa\lambda$

この時, $cf(\lambda) \neq \kappa$ ならば, $\mathcal{U}$ は weakly normal.

(この lemma は, [ ] の proposition 2.4. の拡張になっている. また, $cf(\lambda) = \kappa$ の時, $\mathcal{U}$は weakly normal にならないことを, 最近になって証明した.)

(proof) (i) $cf(\lambda) > \kappa$ の時. f を $P_\kappa\lambda$ 上の regressive function とする. $\forall\alpha<\kappa\ \exists\gamma_\alpha<\lambda\,(\{x \mid f(x) \le \gamma_\alpha\} \in \mathcal{U}_\alpha)$ であるから, $\gamma = \sup_{\alpha<\kappa} \gamma_\alpha$ とすれば, $\{x \in P_\kappa\lambda \mid f(x) \le \gamma\} \in \mathcal{U}$ で, $\gamma<\lambda$ なことは, $cf(\lambda) > \kappa$ から得られる。

(ii) $cf(\lambda) < \kappa$ の時. $\mathcal{U}_\alpha$ は weakly normal だから, $\exists\gamma_\alpha<\lambda\ (\{x \in P_\alpha\lambda \mid f(x) \le \gamma_\alpha\} \in \mathcal{U}_\alpha)$ $\{\lambda_\xi \mid \xi<\delta<\kappa\}$ を λ の cofinal increasing sequence とする。$\forall\alpha<\kappa\ \exists\xi_\alpha<\delta\ (\gamma_\alpha \le \lambda_{\xi_\alpha})$ より, $\{x \in P_\alpha\lambda \mid f(x) \le \lambda_{\xi_\alpha}\} \in \mathcal{U}_\alpha$. $\delta<\kappa$ だから, $\exists\xi<\delta\,(A = \{\alpha<\kappa \mid \xi_\alpha = \xi\} \in \mathcal{U})$. $\alpha \in A$ の時, $\{x \in P_\alpha\lambda \mid f(x) \le \lambda_\xi\} \in \mathcal{U}_\alpha$ だから, $\{x \mid f(x) \le \lambda_\xi\} \in \mathcal{U}$. ☒

Lemma 2.2 $\lambda^{<\kappa} = \lambda$, $A \subset \kappa$ とする。この時, $\exists C$: c.ub $\subset P_\kappa\lambda\ \forall\alpha \in A - \lim(A)\ (C \cap P_\alpha\lambda \notin \mathcal{U}_\alpha)$.

(このCとしては, strongly closed unbounded, i.e.

C は closed unbounded で $\forall X \subset C(|X|<\kappa \longrightarrow \bigcup X \in C)$, なものがとれる。また, $\lim(A)=\{\alpha \mid \alpha$ is a limit point of $A\}$ である)

(proof). $\{x_\xi \mid \xi<\lambda\}$ を $P_\kappa\lambda$ の enumeration とする。α_ξ を, the least element of $A>|x_\xi|$ とする。$\forall x_\xi\ \exists y_\xi \supset x_\xi(|y_\xi| \geq \alpha_\xi)$

$C=\underset{\xi<\lambda}{\triangle}\langle \hat{y}_\xi \mid \xi<\lambda\rangle$ は strongly closed unbounded となる

([ ] の Theorem 2.1. 参照。$\hat{y}_\xi=\{x\in P_\kappa\lambda \mid y_\xi \subset x\}$).

$\alpha \in A-\lim(A)$ とすると, $\exists x_\xi \in P_\alpha\lambda\ (\alpha=\alpha_\xi)$.

$C\cap P_\alpha\lambda \in \mathcal{U}_\alpha$ とすると,

$\{x\in P_\alpha\lambda \mid x\in C,\ \xi\in x\}\in \mathcal{U}_\alpha$ だから,

$\{x\in P_\alpha\lambda \mid x\in \hat{y}_\xi\}\in \mathcal{U}_\alpha$. しかし, $x\in\hat{y}_\xi \longrightarrow x\supset y_\xi \longrightarrow$

$|x|\geq|y_\xi|\geq\alpha_\xi=\alpha$ で $x\in P_\alpha\lambda$ に矛盾する.

$\therefore C\cap P_\alpha\lambda \notin \mathcal{U}_\alpha$ ☒

この proof で, 実際は, $C\cap P_\alpha\lambda$ は unbounded in $P_\alpha\lambda$ でない。$\bigcup C=\lambda$ ですらない事がわかる。

Corollary 2.3. $\lambda^{<\kappa}=\lambda$, $A\subset\kappa$, $|A|=\kappa$ とする。

$\exists C$: strongly closed unbounded $\subset P_\kappa\lambda\ \forall\alpha\in A-\lim(A)$

($C\cap P_\alpha\lambda$ is not unbounded in $P_\alpha\lambda$.)

Theorem 2.4. $\exists\mathcal{U}$: weakly normal filter ($C_{\kappa,\lambda}\notin\mathcal{U}$)

(proof) 例えば, κ を the least measurable limit of strongly compact cardinals とすれば良い。☒

Theorem 3 は, $\forall U$: normal ($U \supset C_{\kappa,\lambda}$) である事と比べると興味深い.

§3. RK-ordering on fine measures on $P_\kappa\lambda$

次の事が知られている. ([ ])

(i) f を least unbounded function (mod. U) とする時, f is injective on a set of measure one なら, U は minimal である.

(ii) $cf(\lambda) < \kappa$ or λ is regular の時, normal measure on $P_\kappa\lambda$ は minimal.

weakly normal filter に関係して, 次の事がわかる.

Proposition 3.1. $\forall U \exists V \le_{RK} U$ (V is weakly normal)

(proof). $f: P_\kappa\lambda \longrightarrow \lambda$ を $[f]_U = \sup j''\lambda$ となる function とする。ここで $j: V \longrightarrow M \simeq V^{P_\kappa\lambda}/U$ である. $g: P_\kappa\lambda \longrightarrow P_\kappa\lambda$ を $g(x) = x \cap f(x)$ で定める. U が fine であり、f の定義から, $\{x \mid \alpha \in g(x)\} \in U$ が、すべての $\alpha < \lambda$ に対して成り立つので, $V = g_*(U)$ ($X \in V \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} g^{-1}(X) \in U$) も fine measure である. $\{x \mid F(x) \in x\} \in V$ とすると、$\{x \mid F(g(x)) \in f(x)\} \in U$ f の定義から $\exists \alpha < \lambda$ $\{x \mid F(g(x)) \le \alpha\} \in U$. したがって. $\{x \mid F(x) \le \alpha\} \in V$ となるので V は weakly normal. ☒

また，$f_*(U)$ が fine measure になる為には，すべての $\alpha<\lambda$ について $\{x \mid \alpha \in f(x)\} \in U$ でなければならないことから次の事は明らかである．

Proposition 3.2　U, V が normal measure の時は，$U \simeq_{Rk} V$ とはならない．

(proof)　$V = f_*(U)$ とすると，$\{x \mid f(x) \supset x\} \in U$．$V \simeq U$ とすれば，$U = f^{-1}_*(V)$． ☒

Open problem 3.3　(i) $\kappa \leq cf(\lambda) < \lambda$ の時，normal measure on $P_\kappa\lambda$ は minimal か？

(ii) U, V は fine measure で $U, V \ni C_{\kappa,\lambda}$ とする．$U \not\simeq V$ が言えるか．($\lambda = \kappa$ の時は Yes.)

最近，$cf(\kappa) < \lambda$ の時，U が minimal ならば weakly normal であることがわかったが，すべての weakly normal measure が minimal かどうかはわかっていない。

References

[1] Y. Abe, Some results concerning strongly compact cardinals. J. Symbolic Logic (to appear)

[2] D. M. Carr, The minimal normal filter on $P_\kappa \lambda$, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 86 (1982), 316–320

[3] A. Kanamori, Weakly normal filters and irregular ultra-filters, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 220 (1976), 393–399

[4] J. Ketonen, Strong compactness and other cardinal sins, Ann. Math. Logic. vol. 5 (1972), 47–76

[5] T. K. Menas, On strong compactness and supercompactness, Ann. Math. Logic. vol. 7 (1974), 327–359