数理解析研究所講究録
第588巻 1986年 9-19

アーベル群の$\mathbb{Z}$-双対について

江田 勝哉（筑波大学）

アーベル群Aの$\mathbb{Z}$-双対A^*とは、Aから整数群$\mathbb{Z}$への準同型写像のなす群$\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z})$のことです。$A^*$は直積$\mathbb{Z}^A$の部分群ですが必ずしも自由アーベル群や直積$\mathbb{Z}^I$と同型となるとは限りません。$\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z})$は$\mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z})$と共にHomological Algebraでよく現われますがコンパクト・アーベル群の研究と関連して次のexact列にでてきます。詳しくは、Reidの講義録[R]を見て下さい。

Gをコンパクト・アーベル群、$\hat{G}$をポントリアギン双対とすると

$$0 \to \mathrm{Hom}(\hat{G},\mathbb{Z}) \to \mathcal{L}_G \xrightarrow[\exp]{} G \to \mathrm{Ext}(\hat{G},\mathbb{Z}) \to 0$$

但し、$\mathcal{L}_G = \mathrm{Hom}^T(\mathbb{R},G)$, $\exp(\theta) = \theta(1)$。

ちなみに、Shelahが独立であることを証明した、"$\mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z})=0 \to A$がfree"という命題は"弧連結コンパクト・アーベル群はcircle群の直積"という命題と同値です。ところで$\mathbb{Z}$-双対になりうるアーベル群はそれ程知られていません。それは非可算のtorsionfreeアーベル群についてはp-群におけるような構造定理がうまくいっていないからかもしれません。非可算のtorsionfree

アーベル群は1974・75年のShelahの結果以来◇.MAその他の集合論の手法を使った研究がありますが、これらはアーベル群Aの部分群の列 $H_\alpha \subseteq H_{\alpha+1}$ を使って研究するものですが A^* を考えるとそれは H_α^* のinverse limitということになります。けれども、inverse limitというのはどこの世界でも扱いにくいもので（inverse limitの要素というのは、場合によっては選択公理を使わないと捕まえられなかったりするわけですから当然とも言えます）inverse limitの $\mathbb{Z}$-双対を計算することは一般にはできません。こういった事情もあって A^* 及び A^{**} はよくわかっていないのだと思います。

ここでは、$\mathbb{Z}$-双対についての最近までの結果を紹介します。又、集会の発表の際、可能性として述べたNonarchmedian functional analysisにおけるChaseのlemma及びその応用ができましたので、それについても述べます。

1967年の講義録でReidはReid class $\mathcal{R}$ を定義しました。（勿論、Reid classという名前は後で他の人がつけたのですが。）$\mathcal{R}$ は $\mathbb{Z}$ を含み直和と直積で閉じた最小のclassです。Reid classに属する群Aが非可測濃度（つまり最小の可測基数 M_c 未満）ですと A^* も $\mathcal{R}$ に属し、A^{**} が自然な写像でAと同型となります。自然な写像 $A \longrightarrow A^{**}$ が同型のときAを反射的といいます。非可測

濃度の仮定は、J. Łoś の定理と関係しています。

定理（Łoś）$\overline{\overline{I}} < M_c$（最小可測基数）のとき

$$\mathrm{Hom}(\textstyle\prod_{i\in I} A_i, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(A_i, \mathbb{Z})$$ である。

この定理の濃度条件は前にお話ししたように（数解研講究録 480、[E_1, E_2]）のように落とすことができて、$\mathrm{Hom}(\prod_{i\in I} A_i, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{Hom}(\prod A_i/F, \mathbb{Z})$、但し $\mathcal{F}$ は I 上の可算完備 ultrafilter 全体で $\prod A_i/F$ は ultraproduct です。このため $A \in \mathcal{R}$ で $\overline{\overline{A}} > M_c$ ですと A は反射的でなくなります。筆者は "$A\in\mathcal{R} \to A^*\in\mathcal{R}$" が一般には成立しないのではないかと思っているのですが、今のところよくわかりません。（[E_4] 参照）以下の話は、非可測濃度に制限し、最後に可測基数にふれます。Reid の講義録のあと10年あまり Reid class の群 $\bigoplus_N \prod_N \cdots \mathbb{Z}$ といったものがすべて非同型かどうかわかりませんでした。"これらがすべて非同型であることを示せ" というのが Reid の問題の1つです。1979年に B. Zimmerman-Huisgen [Z]、独立に1980年に A.V. Ivanov が次を証明しました。

定理1.（B. Zimmerman-Huisgen, A.V. Ivanov）
$\bigoplus_N \prod_N \cdots \mathbb{Z}$ の型がちがうものは非同型である。

又、その後 Dugas と共に Zimmerman はこれを超限回くりかえしても必ず非同型な群が現われることを示しました。

定理2 (M. Dugas and B. Zimmerman-Huisgen [D-Z])
$\bigoplus_{\kappa_1} \cdots \prod \kappa_\alpha \cdots \mathbb{Z}$ は非同型。但し $\prod$ の添字は非可測基数。

このように $\mathcal{R}$ の群が色々あることがわかりました。Reid は次の問題も出していました。"非可測濃度のアーベル群 A について、A^* は反射的か" 又もっと強く "A^* は $\mathcal{R}$ に属するか。" 第2の問題は、非可測濃度の $\mathcal{R}$ の群に type を定義することにより、筆者が次のことを示しました。

定理3 [E_3]. $C(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ を有理数全体の空間 $\mathbb{Q}$ から離散群 $\mathbb{Z}$ への連続関数のなす群とする。このとき $C(\mathbb{Q},\mathbb{Z})^*$ は $\mathcal{R}$ に属さない。

筆者はこの後に Reid の第一の問題を知りました。$C(\mathbb{Q},\mathbb{Z})^*$ は $\mathcal{R}$ に属さないのですから $C(\mathbb{Q},\mathbb{Z})^*$ が反射的にならない可能性があったのです。その前から $C(X,\mathbb{Z})$ には興味をもっていたのですが、$C(X,\mathbb{Z})^*$, $C(X,\mathbb{Z})^{**}$ を計算しようと思いました。初めは全くわからなかったのですが気がついてみれば簡単で次のことがわかるのです。0-次元ハウスドルフ空間 X について $\beta_N X$ を X の N-コンパクト化、$k_N X$ を X の k_N 化、つまり X の任意のコンパクト部分空間への制限が clopen であるものが $k_N X$ の clopen 集合。

定理4 [E-O]. $X = \beta_N X$ とする。$C(X,\mathbb{Z})$ が反射

的であることと、$k_N X = X$ で X の任意のコンパクト部分集合の濃度が非可測であることが同値である。さらに X の任意のコンパクト部分集合の濃度が非可測であるとき $C(X,\mathbb{Z})^*$ が反射的であることと $k_N X = \beta_N(k_N X)$ であることが同値である。

これから $C(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ が反射的であるとわかりますので勿論 $C(\mathbb{Q},\mathbb{Z})^*$ は反射的です。けれども非可測濃度の空間で $k_N X$ が N-コンパクトにならないものをつくればよいのです。空間 $\omega_{1}2$ は k-空間でないことがよく知られているのでこれに目をつけたのですが $k_N(\omega_{1}2) = \omega_{1}2$ かどうかわかりませんでした。(ずっと後で大田春外さんが Noble の結果を使って、これが成立することを示しましたので、これも反例にはなりません。) そこで位相空間論の人たちに"N-コンパクト空間 X が非可測濃度であれば $k_N X$ は N-コンパクトか"という問題を出しました。結局、大田さんが次の反例を示しました。それは、ちょっとしゃくなのですが筆者が既に知っている物だったのです。しかし、この物を位相空間としてとらえたのは大田さんが初めてだったのではないでしょうか。

定理5 [E-O]. S を ω_1 の stationary 部分集合で $\omega_1 - S$ も stationary なものとする。ω_1+1 の部分空間 $X_0 = S \cup \{\omega_1\}$ は N-コンパクトで $k_N X_0$ は N-コンパクトで

ない。よって $C(X_0, \mathbb{Z})^*$ は反射的でない。

これで Reid の $\mathbb{Z}$-双対についての問題は一応決着がついたわけですが、同じ頃 Eklof-Mekler-Shelah の共同研究で CH の仮定のもとで A^* が反射的でなく、$A^* \leq \mathbb{Z}^N$ となるものをつくっています。$C(X_0, \mathbb{Z})^* \leq \mathbb{Z}^N$ は成立ません。

さて静大の清沢毅光さんが大田さんから話を聞いて同じような定理が Nonarchimedian functional analysis [Rooij] にあることを教えて下さいました。体 K 上のノンアルキメディアン付値について non sphericall complete の場合なのですが見れば見る程結果が似ているのです。対象は $C(X, \mathbb{Z})$ の代わりに $BC(X, K) = \{f : f \in C(X, K), \exists M\ \forall x\ |f(x)| \leq M\}$ です。そして "free, direct product, direct sum …" を "base をもつ、Banach product, Co-sum …" でおきかえて読みますと色々な同じ事が成立します。そこでこれらは同じ定理ではないか、つまり適当な setting で証明すれば、アーベル群の場合と、ノン・アルキメディアン・バナッハ空間の場合を系として導けるのではないかと思っているのですが、これは成功していません。Rooij の本をパラパラ読んでいて気がついたのですが Łoś の定理に対応するものはあるのですが Chase の Lemma に対応するものがないのです。制

限された形で"Kがdensely valuatedの場合 $l_\infty(I)$ から $c_0(I)$ へのlinear bounded operatorはコンパクトである"があります。Kがdensely valuatedでない場合はコンパクトでないものがあるのでChaseのlemmaはdensely valuatedのとき成立する可能性があります。Rooijの証明は前のいくつかの定理を使うので直接証明を試みるとChase'sのlemmaに対応するものもえられます。アーベル群のときと同じように可算完備ブール代数上に構造をもつK-バナッハ空間に対して成立します。つまり、

定理：Kをノン・アルキメディアン体でdensely valuatedとする。$(\mathfrak{S}, \rho)$ を可算完備ブール代数 $\mathbb{B}$ 上のK-バナッハシーフ、$\oplus_{j\in J} M_j$ をco-sumとする。任意の有界線型作用素 $T: \hat{\mathfrak{S}} \longrightarrow \oplus_{j\in J} M_j$、任意の $\varepsilon > 0$ について可算完備ultrafilter $F_1 \cdots F_n$ と有限集合 $J_0 \subseteq J$ が存在し $\| \pi_{J-J_0} T | K_{F_1 \cdots F_n} \| < \varepsilon$ 但し

$\pi_{J-J_0}: \oplus_J M_j \longrightarrow \oplus_{J-J_0} M_j$ 標準射影、

$x \in K_{F_1 \cdots F_n} \longleftrightarrow 1 \leq {}^\forall i \leq n \ \exists b \in F_i \ (\rho_b^1(x) = 0)$。

なお、Łośの定理に対応するvan der Putの定理は、アーベル群のときと同じように $\hat{\mathfrak{S}}$ について成立します。この上記の定理の直接の系として例えば"Mを実数空間上のノルム有界K-値ボレル関数を測度0で割った

K-バナッハ空間とするとき $M=\oplus_{n=1}^{\infty} M_n$ (右辺は c_0-sum
が成立するのはほとんどすべての n について $M_n=0$ の
ときだけとなる。" これは atomless 完備ブール代数で
濃度が非可測なら可算完備 ultrafilter がないことか
らすぐ言えます。[E_3] では Reid Class の階層定理
に Chase の lemma を使っています。そこで K-Banach
space についても Reid Class を定義して階層定理を証
明することを考えました。階層定理の主要部分は
Zimmerman の図式によるのですが、ノルムのない場合は
いわば $\| \cdots \| = 0$ の形であるので初めのうち中々
うまくいかないのではないかと思っていたのですが、次の
Lemma で切り抜けられます。この lemma はたぶんよく
知られたものでしょう。

Lemma: A が $B \oplus C$ の complemented subspace と
同型であり $\| \pi_C \circ i \|$ が十分小さいとき、A は B
の complemented subspace と同型となる。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & B \oplus C \arrow[dl, "\sigma"] \\ A & \end{tikzcd}$$

ところがまだ気になることがあるのです。添字集合
が M_c 以上でも Reid class の type が M_c 未満のとき
[E4] では階層定理がしているのですが、その場合
現われる ultraproduct については上の lemma では切り

抜けられないです。そのためアーベル群のときの[E4]に対応するところまでは今のところいっていないわけです。

最後に、何度も顔を出す可測基数について述べたいと思います。3,4年前までアーベル群論において大きな基数が現われるのはŁośの定理についての可測基数と、Indecomposable群の存在についての強到達不能数ぐらいでした。(後者は1974年のShelahの論文の中で、全く基数の議論と無関係な証明を与えましたので、結局、前者だけということでした。) 最近、7ヨ$0^{\#}$, normal ultrafilter 弱コンパクト基数、強コンパクト基数、超コンパクト基数などが現われてきました。[D, D-G, G-S, W] [D]と[D-G]の中でラディカル$R_{\mathbb{Z}}$が基数条件を満たすことが強コンパクト基数の存在から導かれ、可測基数の非存在から$R_{\mathbb{Z}}$が基数条件を満たさないことが導かれていました。最近、阿部吉弘さんと話しているとき、この性質とJ. L. Bellによる$\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$-コンパクト基数の存在が同値となることに気がつきました。集合論において大きな基数のことが色々な意味で小さい濃度$\aleph_1, \aleph_2, \cdots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}$等と関係している事実を考えると、大きな基数での代数系その他の性質を研究することは将来性のあることのように思います。そこでさしあたって可測基数の関係した問題をいくつかまと

めておきます。

1) 直積 $\mathbb{Z}^I$ の直和因子は必ずある $\mathbb{Z}^J$ と同型か。
　($\overline{\overline{I}}<M_c$ では成立することが知られています。)

2) $X=\beta_N X$ で $C(X,\mathbb{Z})$ が反射的なら $C(X,\mathbb{Z})$ は非可測濃度か。(これは大田さんの指摘した問題で、定理4で位相空間の性質としての同値条件があります。これは実コンパクトの場合、Hušek の問題に対応しています。)

3) 自由アーベル群で rank M_c のものは $\mathbb{Z}$-dual になりうるか?

4). $\mathcal{R}$ の群の $\mathbb{Z}$-双対は $\mathcal{R}$ に属するか。

5) X が 0-次元ハウスドルフ空間で $C(X,\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}^I$ なら X の離散部分空間 D があって、$D\subseteq X\subseteq\beta_N D$ となるか。($\overline{\overline{X}}<M_c$ のときは X が離散であることが成立している。)

References

[D] M. Dugas, On reduced products of abelian groups, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 73 (1985) 41-47.

[D-G] M. Dugas - R. Goebel, On radicals and products, Pacific Journal of Math. 118(1985) 79-104.

[D-Z] M. Dugas - B. Zimmerman-Huisgen, Iterated direct sums and products of modules, LNM 874, 179-193, Berlin-New York, 1981.

[数解研 講究録]480，代数の無限積と可測基数.

[E_1] On a Boolean power and direct product of abelian groups, Tsukuba J. Math. 6 (1982) 187-194.

[E_2] On a Boolean power of a torsion free abelian group, J. Algebra, 82(1983) 84-93.

[E_3] On Z-kernel groups, Archiv Math. 41 (1983) 289-293.

[E_4] Z-kernel groups of measurable cardinalities, Tsukuba J. Math. 8 (1984) 95-100.

[E-O] K. Eda - H. Ohta, On abelian groups of integer-valued functions, their Z-duals and Z-reflexivity, a preprint.

[G-S] R. Goebel - S. Shelah, Semi-rigid classes of cotorsion-free abelian groups, J. Algebra 93 (1985) 136-150.

[R] G. A. Reid, Almost free abelian groups, Lecture Notes, 1966-67, Tulane University.

[Rooij] A. C. M. van Rooij, Non-archimedean functional analysis, Pure and Applied Math. 51, Dekker, New York- Basel, 1978.

[Z] B. Zimmerman-Huisgen, On Fuchs' problem 76, J. Reine Angew. Math. 309, (1979) 86-91.