数理解析研究所講究録
第588巻 1986年 25-28

Reflexion Principle on Second order Arithmetic

(九大工)　倉田令二朗

I 発表した内容は間違い [新井氏の注意]

昨年11月19日、シンポジウムにおいて

$$\begin{tikzcd}
(RFN)_{(ACA)_0} \arrow[r] & BI \arrow[r] \arrow[dr] & ATR \arrow[r] & WO(<\Gamma_0) \arrow[dl] \\
TI(\varphi 1 \varepsilon_0) \arrow[u] & & TI(<\Gamma_0) \arrow[ll] &
\end{tikzcd}$$

を示し、これからFriedman-Simpsonの結果

$$(ACA)_0 \vdash BI \leftrightarrow RFN_{(ACA)_0}$$

が示せるとしたが、これは間違い。しかも少しばかりの間違いではなく全面的な間違いであることが新井敏康氏の注意——詳細な説明をとてくまった——によってあきらかとなった.

破綻の根源は次の点にあった。FriedmanのRFN$_{(ACA)_0}$とは

ω-RFN$_{(ACA)_0}$のこと　すなわち

$$\varphi(X) \to \exists \text{ countable } \omega\text{-model } M \text{ of } (ACA)_0 \text{ s.t. } X \in \cancel{X}^{M} \to M \models \varphi(X)$$

であるが筆者はHenkin-completenessの証明法によって

$$(ACA)_0 \vdash \omega\text{-}RFN_{(ACA)_0} \leftrightarrow RFN_{(ACA)_0}$$

が成立つと思いこんでしまったのである.

1) まずRFN$_{(ACA)_0}$は大へん弱く

$$(ACA)_0 \vdash \mathrm{Ind} \leftrightarrow \mathrm{RFN}_{PC} \longleftrightarrow \mathrm{RFN}_{(ACA)_0}$$

が成立つ。こゝに $\mathrm{Ind} := \varphi\text{-}\mathrm{Ind}$ for all formula φ

$PC :=$ second order logic with equality

実際 $\mathrm{RFN}_{(ACA)_0} \vdash \mathrm{Ind}$ は自明，$\mathrm{Ind} \to \mathrm{RFN}_{PC}$ は cut elimination と partial truth definition による．$\mathrm{RFN}_{PC} \to \mathrm{RFN}_{(ACA)_0}$ は $(ACA)_0$ が finitely axiomatizable であることから出る．

2) したがって $(\mathrm{RFN})_{(ACA)_0} \to \mathrm{BI}$ の証明と称したその証明は間違い．上記の思い込みにより自己暗示にかかりウソの証明をデッチ上げ皆様に多大の迷惑をかけた（一時間にわたってまるまるウソの話を聞かされたのだから）

3) $(ACA)_0 \vdash \omega\text{-}\mathrm{RFN}_{(ACA)_0} \leftrightarrow \mathrm{BI}$

は正しい．なお $\leftarrow$ の部分について新井氏自身の証明がある．

4) $\mathrm{BI} \to WO(<\Gamma_0)$ のみならず $\mathrm{BI} \to WO(\Gamma_0)$ (in $(ACA)_0$)

これも新井の証明がある．

5) 上のことより $\mathrm{BI} \to \mathrm{Con}(ACA)$ (in $(ACA)_0$)

だから $\mathrm{RFN}_{(ACA)_0} \to \mathrm{BI}$ in $(ACA)_0$ ではありえない．

以上の点に関し新井氏に感謝する

II Reflection Principle on $(ATR)_0$

以下では PA上の Reflection-Principle に関する結果のアナロジーとして Friedman McAloon Simpson の結果（PATRAS Logic Symposion 1982）（FMSという）を拡張する．

PA 上の Reflection Principle に対し　次が成立つ

(1) $PA \vdash \Sigma_n\text{-}RFN_{(PA)} \leftrightarrow PH_n \leftrightarrow \Delta_n\text{-}WFP(\varepsilon_0) \leftrightarrow \Pi_n\text{-}TI(\varepsilon_0)$

ここに PH_n は Paris Harrington Principle のある拡張 (van der Tweer (1978), Kurata (1984-Saitama)

Δ_n-WFP (well-founded Principle): $\mathbb{N}$ 上の $\prec_{\varepsilon_0}$ に関し無限降下 Δ_n -function は存在しない

<u>Arithmetical transfinite recursion</u>

$ATR := WO(\prec) \to \exists X\,((Y,n) \in X \leftrightarrow \varphi(Y, X{\restriction}n))$

ここに $X{\restriction}n = \{(Y,m) \in X \,;\, m \prec n\}$, $\varphi(Y, X)$ は arithmetical,

ATR は "$e \in \mathcal{O}^X \to H_e^X$ exist" と同値.

$(ATR)_0 := (ACA)_0 + ATR$

$PA\text{-}\Sigma_n\text{-}RFN_{(ATR)_0} := Pr_{(ATR)_0}(\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner) \to \varphi(x)$ for Σ_n-formula φ of PA.

$[X]^{<\omega} :=$ set of all finite subset of X

$C \subseteq [X]^{<\omega}$ が d-closed とは $t \in C$ ならば initial segment of t (set t を単増列とみて) も C に属すること.

d-closed partition of $[X]^{<\omega}$ とはペア (C_0, C_1) であって $C_i \subseteq [X]^{<\omega}$, C_i は d-closed $(i=0,1)$, $C_0 \cup C_1 = [X]^{<\omega}$. $C_0 \cap C_1 = \phi$ を要しない.

$RT(2, <\omega)$ Ramsey theorem for $(2, <\omega)$

$\Leftrightarrow$ For all d-closed partition of $[\omega]^{<\omega}$, $\exists$ infinite set $X \subseteq \omega$ such that $[X]^{<\omega} \subset C_0$ or $[X]^{<\omega} \subseteq C_1$ (X is homo for $(C_0\,C_1)$)

(2) $(ACA)_0 \vdash ATR \leftrightarrow RT(2,<\omega) \leftrightarrow$ clopen set of $[\omega]^\omega$ is Ramsey

$\leftrightarrow$ open set of $[\omega]^\omega$ is Ramsey (FMS)

ここに $[\omega]^\omega$ は ω の無限部分集合の全体, ふつうの Baire topology を入れる

$X \subseteq [\omega]^\omega$ is Ramsey とは $A \in [\omega]^\omega$ があって $[A]^\omega \subseteq X$ or $[A]^\omega \cap X = \phi$

Minimization of $RT(2,<\omega)$

M : finite set とする

d-closed partition of $P(M)$ とは (C_0, C_1) $C_i \subseteq P(M)$, C_i は d-closed $(i=0,1)$ and $C_0 \cup C_1 = P(M)$

$X \subseteq M$ is homogeneous for d-closed partion $(C_0 C_1)$ of $P(M)$ とは

$P(X) \subseteq C_0$ or $P(X) \subseteq C_1$ のこと

n-dense set

finite set X が 0-dense $\Longleftrightarrow$ $|X| \geqq 2$, $|X| \geqq \min X$

X が $(n+1)$-dense $\Longleftrightarrow$ $P(X)$ の任意の d-closed Partition に対し

X の n-dense homogeneous finite set が存在すること

$D : = \forall n \exists$ n-dense finite set

(3) $PA\text{-}\Sigma_1\text{-}RFN_{(ATR)_0} \leftrightarrow D$ (in PA) (FMS)

f-large set $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対し finite set X が f-large とは

$f(\min X) \leq |X|$ のこと

$D_n := \forall n \, \forall \Delta_n$-function f $\exists$ (n-dense and f-large set)

$PA \vdash PA\text{-}\Sigma_n\text{-}RFN_{(ATR)_0} \leftrightarrow D_n \leftrightarrow \Delta_n\text{-}WFP(\Gamma_0) \leftrightarrow \Pi_n\text{-}TI(\Gamma_0)$