数理解析研究所講究録
第 588 巻 1986 年 108-127

双対空間と算法

東京大学教養学部
難波完爾 (Kanji Namba)

1. 双対位相空間

ここでは位相空間の双対空間の概念の一般的記述と，その具体例が数学の個々の分野，特に公理的理論体系の中でどの様に用いられて来たかを中心に述べてみようと思う．

位相空間の近傍系による記述は，集合 X とその各点 x に対して，x の近傍系 $U(x)$ が対応していて

$$u \in U(x) \to x \in u$$

$$u, v \in U(x) \to \exists w \in U(x)(w \subset u \cap v)$$

$$y \in u \in U(x) \to \exists v \in U(x)(v \subset u)$$

なる性質を満足している．しかし，これでは今少し対称性がはっきりしない．そこで X の開集合，即ち

$$\forall x \in u\, \exists v \in U(x)(v \subset u)$$

なる u の全体 O_X に着目して，新しい近傍系を x^* と記すことにする．即ち，開集合 u に対して

$$u \in x^* \equiv x \in u$$

によって x^* を定めるのである．この様にすれば，共通部分

の定義

$$x \in u \cap v \equiv x \in u \wedge x \in v$$

に対応するものは

$$u \cap v \in x^* \equiv u \in x^* \wedge v \in x^*$$

である．これは x^* が一つの filter であることを意味しているのである．それは共通部分の方の性質は見ての通りであるが

$$u \in x^*,\ u \subset v \to v \in x^*$$

については $u = u \cap v$ であるから

$$u = u \cap v \in x^* \to u \in x^* \wedge v \in x^* \to v \in x^*$$

となって同値性の中に含まれているのである．

さて，近傍系のもう一つの性質は

$$y \in u \in x^* \to u \in y^*$$

であるが，これは y^* の定義より明らかである．いいかえると，「点 x が集合 u に含まれる」という代りに「近傍 x^* が集合 u を含む」といい替えたものになっているのである．共通部分に対する"点"の性質が有向（directed）という性質になっているのである．この様なものは点の有する性質をもつであろうから理想点（ideal point）と呼ぶのである．集合としては ideal の代りに，その双対の用語である filter の用語で呼ばれるものである

さて，filterの性質，即ち

$$u \cap v \in p \equiv u \in p \wedge v \in p$$

を有するpでϕに対応しないもの，常に$x \notin \phi$であるから，$\phi \notin p$となるものの全体をX^*と記する．$x \in X$に対するx^*は当然この性質を有する．即ち

$$* : X \subset X^*$$

である．そこで今度は$u \in O_X$に対して

$$p \in u^* \equiv u \in p$$

と定めるのである．当然

$$(u \cap v)^* = u^* \cap v^*$$

であって$*$は共通部分$\cap$と可換である．そして

$$u^* \in p^* \equiv p \in u^*$$

とすればp^*はX^*におけるpの近傍系である．

そこで，X^*に開集合の基として

$$O^* = \{u^* \mid u \in O_X\}$$

を入れた位相空間(X^*, O^*)を考えれば，これはもとの空間を稠密な部分空間として含むcompactな空間である．

その証明は，よく知られている通り，次のようである．即ち開集合族

$$\{u_\nu^* \mid \nu \in \Lambda\}$$

の任意有限個でX^*が覆われないものとする．そこで

$$p = \{u \mid \nu_1, \cdots, \nu_k \in \Lambda,\ u_{\nu_1}^* \cup \cdots \cup u_{\nu_k}^* \cup u^* = X^*\}$$

と定義すれば，仮定より $\phi \notin p$，$X \in p$ であるから $p \neq \phi$ となる．さて，$u, v \in p$ とすると

$$u_{\nu_1}^* \cup \cdots \cup u_{\nu_k}^* \cup u^* = X^*$$

$$u_{\tau_1}^* \cup \cdots \cup u_{\tau_m}^* \cup v^* = X^*$$

となる $\nu_1, \cdots, \nu_k ; \tau_1, \cdots, \tau_m \in \Lambda$ が存在するから，共通部分を考えると，$(u \cap v)^* = u^* \cap v^*$ を用いて

$$u_{\nu_1}^* \cup \cdots \cup u_{\nu_k}^* \cup u_{\tau_1}^* \cup \cdots \cup u_{\tau_m}^* \cup (u \cap v)^* = X^*$$

を得る．これは

$$u \cap v \in p \equiv u \in p \wedge v \in p$$

を意味している．又任意の u_ν に対して，仮定より

$$u_{\nu_1}^* \cup \cdots \cup u_{\nu_k}^* \cup u_\nu^* \neq X^*$$

であったから，$u_\nu \notin p$ である．これは

$$p \notin \bigcup_{\nu \in \Lambda} u_\nu^*$$

を意味している．即ち X^* は compact である．

自明なことかも知れないが compact 性の鍵は，与えられた共通部分で閉じた集合族が"十分"大きな元をもつことである．例えば

$$N' = \{\{n\} \mid n \in N\} \cup \phi$$

は二個の元の共通部分について閉じている．その上の自明でない p で

$$\{n\}\cap\{m\}\in p \equiv \{n\}\in p \wedge \{m\}\in p$$

となるものは，$\{\{n\}\}$の形のもののばかりで$\{n\}^* = \{\{n\}\}$となり

$$X^* = \{\{\{n\}\} \mid n\in N\} \subset \bigcup_{n\in N} \{n\}^*$$

となるから，この場合X^*はcompactではない．

さて，単調性

$$u\subset v \to u^*\subset v^*$$

については，$u\in p \equiv u\cap v\in p \to v\in p$より導かれるから，集合族が和について閉じているなら

$$u^*\cup v^* \subset (u\cup v)^*$$

である．そこで，$[a] = \{u : a\subset u\}$とすれば

$$u\in[a]\wedge v\in[a] \equiv u\cap v\in[a]$$

であることは

$$a\subset u\wedge a\subset v \equiv a\subset u\cap v$$

と同値であるから，共通部分と交換可能ということは，$\in$よりもむしろ$\subset$の方に近い性質である．勿論

$$[u\cup v]\in(u\cup v)^*, \quad [u\cup v]\notin u^*\cup v^*$$

である．さらにpに対して交換可能性の条件

$$u\cup v\in p \equiv u\in p \vee v\in p$$

を付加するなら，これは"点"とか"分岐"に近い意味を有するであろう．即ち

$$x\in u\cup v \equiv x\in u \vee x\in v$$

からの類推である．点は極小な集合を決定する．∩と交換する極大な$\mathfrak{p}$はこの性質，即ち∪と交換することはよく知られている．$\mathfrak{p}$が大きくなるにしたがって，$\mathfrak{p}$はより"小さい"ものまで含むということである．一般には∪と交換するものは極大なものの他にも存在するのである．"方向"等という概念に当るかも知れない．

一般に，含むという二つの述語∈，⊂について $x \in u$ は函数値 $u(x)$ に対応し，$u \subset v$ には函数の合成 $u \circ v$ に対応しているように思う．$x \in u$ の正しさ即ち真偽値が，例えば，ある位相空間の開集合である様な場合には再び

$$y \in \langle x \in u \rangle = u(x)(y)$$

が考えられ，これは

$$u(x, y) = u(x)(y)$$

によって直和の上の函数と考えられるのである．

2. 函数

先ず一変数の函数について述べる．O_X，O_Y をそれぞれ X，Y 上の共通部分∩の算法で閉じている集合の族とする．函数

$$f : O_X \longrightarrow O_Y$$

について，∩についての単調性

$$f(u \cap v) \subset f(u) \cap f(v)$$

および，$u \neq \phi \rightarrow f(u) \neq \phi$ なる場合を考える．(X, O_X) の双対

空間を考え，$p \in X^*$ に対して $f(p) \in Y^*$ を

$$v \in f(p) \equiv \exists u \in p\,(f(u) \subset v)$$

によって定める．$\phi \notin f(p)$，$\phi \neq f(p)$ は p の性質より明らかであるので，$\cap$ との交換可能性について示す．

$$u, v \in f(p) \rightarrow f(u_1) \subset u \wedge f(v_1) \subset v$$

となる $u_1, v_1 \in p$ があるから，$u_1 \cap v_1 \in p$ および

$$f(u_1 \cap v_1) \subset f(u_1) \cap f(v_1) \subset u \cap v$$

によって，$u \cap v \in f(p)$ となるのである．

この様な函数の代表的例は

$$f : X \rightarrow Y$$

による像 $f(u) = \{ f(x) \mid x \in u \}$ である．よく知られている通り

$$f(u \cap v) \subset f(u) \cap f(v)$$

であって，一般には等号は成立しないのである．特に

$$f(u \cup v) = f(u) \cup f(v)$$

であり，p が $\cup$ と交換するならば，$f(p)$ も $\cup$ と交換，即ち

$$u \cup v \in f(p) \equiv u \in f(p) \vee v \in f(p)$$

が成立するのである．それは逆像 $f^{-1}(u) = \{ x \mid f(x) \in u \}$ について

$$f^{-1}(u \cup v) = f^{-1}(u) \cup f^{-1}(v) \in p \equiv f^{-1}(u) \in p \vee f^{-1}(v) \in p$$

であるから $f(f^{-1}(u)) \subset u$ によって所要の性質を得るのである．

特に，集合 X，Y の間の函数 f については，X，Y を離散

位相空間と考えれば，すべての函数は連続であるから

$$f : X^* \longrightarrow Y^*$$

は連続函数となるのである．連続性は

$$f(p) \in u^* \subset Y^*$$

とすると，その意味は $u \in f(p)$ で，その定義は

$$v \in p \ , \quad f(v) \subset u$$

となる v が存在することであるから

$$q \in v^* \to v \in q \to f(v) \in f(q) \to f(q) \in f(v)^* \subset u^*$$

が示されるのである．ともあれ連続函数はその compact 化まで自動的に拡張出来るということである：

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{f} & Y^* \\ \cup & & \cup \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

$X^* - X$ はいわゆる境界値の全体である．特に X が離散的な場合は X 自身 X^* の稠密な開集合である．

この様に一変数の場合は自然であるが，多変数の場合には今少し自由さがあるように思う．

二つの集合 X，Y の compact 化と直積については自然に

$$X^* \times Y^* \quad , \qquad (X \times Y)^*$$

なる空間が考えられる．前者は後者の一部であるが，両者は必ずしも一致しないのである．

さて$p \in X^*$, $q \in Y^*$として

$$u \times v = \{(x,y) \mid x \in u \wedge y \in v\}$$

$$p \times q = \{u \times v \mid u \in p \wedge v \in q\}$$

とおく．そうすると直積と共通部分に関して

$$(u_1 \times v_1) \cap (u_2 \times v_1) = (u_1 \cap u_2) \times (v_1 \cap v_2)$$

なる性質があるので，$p \times q$は自然に$(X \times Y)^*$の元を生成するのである．このことは$X \times Y$の近傍系をXの近傍系とYの近傍系の直積とするときの双対空間については成立することを意味している．しかし，同一の位相を生成する近傍系でもそのとり方によってその双対空間は異なるのである．例えばX上の離散位相は

$$\mathcal{P}_1(X) = \{\{x\} \mid x \in X\} \cup \{\phi\}$$

$$\mathcal{P}(X) = \{u \mid u \subset X\}$$

のいずれでも生成されるが，Xが無限のときは，前者に対応するものはcompactでないが，後者に対応するものはcompactである．

そこで例えば，X, Y, $X \times Y$の部分集合の全体を考えると$p \in X^*$, $q \in Y^*$が極大元であっても$p \times q$は極大元とは限らない．

例1．$N = \{0, 1, 2, \cdots\}$とし，pをN^*上のnon-principal ultrafilterとする．このとき$p \times p$は$(N \times N)^*$の極大元ではない．

$$f(n,m)=\begin{cases}0 & n\leq m\\ 1 & m<n\end{cases}$$

とおく．もし $p\times p$ が極大元ならそれは $\cup$ と交換可能であるから，

$$N\times N=f^{-1}(\{0\})\cup f^{-1}(\{1\})\in p\times p$$

それ故 $f^{-1}(\{0\})\in p\times p$ または $f^{-1}(\{1\})\in p\times p$ である．例えば

$$u,v\in p \qquad u\times v\subset f^{-1}(\{0\})$$

とすると，u，v ともに無限であるから

$$n\in u,\ m\in v,\ m<n$$

なる n,m が存在し $f(n,m)=1$ となって矛盾である．

そこで積として

$$w\in p\times q\ \equiv\ \{x\in X\mid\{y\in Y\mid(xy)\in w\}\in q\}\in p$$

と定義するのである．これが $\cap$ と可換であることは

$$\{x\in X\mid\{y\in Y\mid(xy)\in u\}\in q\}\in p$$
$$\{x\in X\mid\{y\in Y\mid(xy)\in v\}\in q\}\in p$$

を仮定すると，二式の共通部分をとって，p，q が $\cap$ と可換であることより

$$\{x\in X\mid\{y\in Y\mid(xy)\in u\cap v\}\in q\}\in p$$

を得る．即ち

$$u\cap v\in p\times q\ \equiv\ u\in p\times q\wedge v\in p\times q$$

を得るのである．さらにもし p,q が $\cup$ と可換であれば，二式

の和をとることによって

$$u \cup v \in p \times q \equiv u \in p \times q \vee v \in p \times q$$

を得る．特に p，q が共に ultrafilter ならば $p \times q$ も ultra filter になっている．この場合は

$$\{x \in X \mid \{y \in Y \mid (xy) \in u\} \in q\} \notin p$$

$$\{x \in X \mid \{y \in Y \mid (xy) \in u\} \notin q\} \in p$$

は同値になっているのである．

3．束縛記号

ここで少し束縛記号との関連について記しておこう．集合 u が性質 $P(x)$ について

$$u = \{x \in X \mid P(x)\}$$

の様な形で定義されているとき，∩と交換可能な p に対して $u \in p$ のことを p の意味で"すべて"と考え，その意味の記号を導入して

$$p\forall x\ P(x)$$

又は $p\forall x \in X\ P(x)$ のように記することにしよう．これは自然言語での順序にしたがった．この双対の束縛記号は p の意味で"存在"ということで，それを $p\exists x$ と記することにする この両者は

$$\neg p\forall x\ P(x) \equiv p\exists x \neg P(x)$$

で結ばれている．∀なる記号を用いたのは all が and と交換

すること

$$\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x) \equiv \forall x\,(A(x) \wedge B(x))$$

によって特徴づけられていると考えている訳である。

ともかく，∩と交換可能なフィルターと∩と交換可能なイディアルは．

$$u \in F \equiv X - u \in I$$

によって結ばれている．補集合の作用素－が∪と∩を結びつけているのである．de Morgan の法則である．

$\{\phi\}$ に対応するものが存在記号∃，その双対が∀．

有限集合のイディアルに対応するものが無限個の存在，有限個を除いてすべて，測度0のイディアルに対応する解析での a.e. 等はこの様な例であって，一般の束縛記号は双対空間のすべての点に対応しているのである．

特に∪，∩の両方と交換する極大フィルター等の九，即ち素フィルターは∀，∃の両方の性質を有しているのである．例えば一点で生成されるいわゆる主フィルターはこの例で

$$\forall x = a\, A(x) \equiv \exists x = a\, A(x) \equiv A(a)$$

によっていわゆる再生核をなすのである．つまり∃と積分，$x = a$ とデルタ函数 $\delta(x, a)$ の対比で

$$\int f(x)\,\delta(x, a)\,dx = f(a)$$

が $\exists x(x=a \wedge A(x))$ の対応物であるというのである．積分の双対である概念，これを仮りに“巾分”と呼べばこの再生核も同様に重要な概念に違いない．そしてすでに我々の名染のものであろうが自分にはよく解らない．示されれば万人に理解出来るといったもののはずである．

さて，もとにもどって $\mathfrak{p}\forall x$ の意味は

$$\mathfrak{p}\forall x\, P(x) \equiv \{x \in X \mid P(x)\} \in \mathfrak{p}$$

であった．又 $\mathfrak{p}\exists x$ は

$$\neg \mathfrak{p}\forall x\, P(x) \equiv \mathfrak{p}\exists x \neg P(x)$$

によって定めたのであった．即ち

$$\mathfrak{p}\exists x\, P(x) \equiv \{x \in X \mid \neg P(x)\} \notin \mathfrak{p}$$

である．そこで $\mathfrak{p}\forall x\, P(x)$ を仮定すると $\phi \notin \mathfrak{p}$ より

$$\{x \in X \mid P(x)\} \in \mathfrak{p} \rightarrow \{x \in X \mid \neg P(x)\} \notin \mathfrak{p}$$

となる．このことは一般的性質

$$\mathfrak{p}\forall x\, P(x) \rightarrow \mathfrak{p}\exists x\, P(x)$$

を意味している．この逆方向が成立する $\mathfrak{p}$ が極大フィルターに対応している訳で，以下にその説明をする．

ところで，選択公理 (axiom of choice) によればすべてのフィルターは極大フィルターに拡張出来る．したがって，もとの集合族が $\cup$ について閉じていれば極大フィルター $\mathfrak{p}$ は $\cup$ とも交換する．即ち“存在”記号としての性質も有するはずで

ある．そこで$\mathfrak{p}$を極大フィルターとすれば

$$\mathfrak{p}\cup\{u\} \qquad \mathfrak{p}\cup\{X-u\}$$

のいずれかは有限交叉性を有する．平凡であるが，両者を否定すると，

$$u_1\cap\cdots\cap u_n\cap u=\phi$$

$$v_1\cap\cdots\cap v_m\cap X-u=\phi$$

となる $u_1,\cdots,u_n,v_1,\cdots,v_m\in\mathfrak{p}$ が存在する．これより $X=(X-u)\cup u$ との共通部分をとって

$$u_1\cap\cdots\cap u_n\cap v_1\cap\cdots\cap v_m=\phi\in\mathfrak{p}$$

を得ることになり矛盾である．即ち，極大性によって

$$u\in\mathfrak{p}\vee X-u\in\mathfrak{p}$$

であるが，これは $u=\{x\in X\mid P(x)\}$ とすると

$$\mathfrak{p}\forall x\, P(x)\vee\mathfrak{p}\forall x\neg P(x)$$

を意味している．$\mathfrak{p}\forall x\neg P(x)\equiv\neg\mathfrak{p}\exists x\, P(x)$ であるから

$$\mathfrak{p}\exists x\, P(x)\longrightarrow\mathfrak{p}\forall x\, P(x)$$

となり，同値性

$$\mathfrak{p}\forall x\, P(x)\equiv\mathfrak{p}\exists x\, P(x)$$

を得るのである．$\mathfrak{p}$が理想的な一つの点という立場からすれば，Xの双対空間X^*まで述語$A(x)$を延長して$A(\mathfrak{p})$と書きたいところであろう　一般のフィルター即ちX^*の点では$A(\mathfrak{p})$とも$\neg A(\mathfrak{p})$とも決定出来ない場合，即ち

$$\{x \in X \mid P(x)\} \notin p,\ \{x \in X \mid \neg P(x)\} \notin p$$

も多いのである．X^* として極大フィルターのみをとると自然に X^* まで任意の述語が延長出来るのである．この場合は

$$(X, O_X)$$

の O_X が共通部分∩，和集合∪，補集合－について閉じている場合，即ちブール代数となる場合である．ultraproduct による模型の構成とか non-standard な解析などの視点である．一般には O_X はブール代数とは限らないので束縛記号はそのままでは点上の値とはならないのである．

4．束縛記号の算法

束縛記号が X の極大フィルター等を含む X^* の元であるという立場からすれば，$\mathbb{R}$ とか $\mathbb{C}$ の具体的算法は自動的に $\mathbb{R}^*$，$\mathbb{C}^*$ に延長できる．しかし，加法とか乗法は二変数の函数であるので，こういったものの基本的性質，例えば可換性，結合律等が成立するかどうかは必ずしも自明ではないであろう．実は極大元の間では可換性は成立しないのである．

先ず函数 $f(p,q)$ の定義としては

$$u \in f(p,q) \equiv \{x \mid \{y \mid f(x,y) \in u\} \in q\} \in p$$

を用いるのが自然であろう．この場合 p, q の順は大切な意味をもっており一般には交換可能ではないのである．即ち

$$u \in f(p,q) \equiv p\forall x\, q\forall y\, (f(x,y) \in u)$$

例 2. p を non-principal とし $N\in p$ とし $q=\sqrt{2}p$ とする.

$$u=\{n+m\sqrt{2}\mid n,m\in N,\ n<m\}$$

とすると $u\in p+\sqrt{2}p$, $u\notin\sqrt{2}p+p$ である. つまり $p+\sqrt{2}p\neq\sqrt{2}p+p$ である.

この説明であるが $n,m\in N$ ならば

$$n+m\sqrt{2}\in u\equiv n<m$$

であるから, $n\in N$ ならば $\{\sqrt{2}m\mid n<m\}\in\sqrt{2}p$ が p が non-principal であることから導かれる. 即ち

$$p\forall x\ \sqrt{2}p\forall y\,(x+y\in u)$$

である. 逆に $m\in N$ を固定すると $\{n\mid n<m\}\notin p$ であるから

$$\sqrt{2}p\forall y\neg p\forall x\,(x+y\in u)$$

$\neg p\forall x=p\forall x\neg$ 等の性質によって

$$p\forall x\ \sqrt{2}p\forall y\,(x+y\in u)\equiv\neg\sqrt{2}p\forall y\ p\forall x\,(x+y\in u)$$

即ち

$$u\in p+\sqrt{2}p\equiv u\notin\sqrt{2}p+p$$

で当然 $p+\sqrt{2}p\neq\sqrt{2}p+p$ である.

一般に, 同一の p に対しても非可換であることは次のような性質に着目してみればよい. X 上の極大フィルター p に対して, それが non-principal ならば, 連続な集合列で $u_\nu\in p$,

$$X=u_0\supset\cdots\supset u_\nu\supset\cdots\qquad(\nu<\kappa)$$

$$\bigcap_{\nu<\kappa}u_\nu=\phi$$

このとき $f : X \longrightarrow \aleph$ を

$$f(x) = \nu \equiv x \in \bigcap_{\tau < \nu} u_\tau - u_\nu$$

によって定めると

$$p\forall x\, p\forall y\, (f(x) < f(y))$$

であるけれども

$$\neg p\forall y\, p\forall x\, (f(x) < f(y))$$

となるので常に非可換になる述語が存在するのである．勿論 *principal* な元に対しては常に交換可能である．しかし対称な関係，即ち $P(x,y) \equiv P(y,x)$ なる関係に対しては常に

$$p\forall x\, p\forall y\, P(x,y) \equiv p\forall y\, p\forall x\, P(y,x)$$

であったから，対称性を用いて $p\forall x$，$p\forall y$ の交換可能性を得るのである．

さて，結合法則については一般に成立するのである．

$$u \in p+(q+r) \equiv p\forall x\, q\forall y\, r\forall z\, (x+(y+z) \in u)$$

$$u \in (p+q)+r \equiv p\forall x\, q\forall y\, r\forall z\, ((x+y)+z \in u)$$

勿論，X の中での結合法則を仮定しての話である．だから，例えば $q = p+p$ とすると $p+q = q+p$ の様な交換性は成立するのである．

例えば $[0\ 1]$ の様な compact な集合 u が p の元になる場合 p の標準部分

$$st(p) = \bigcap_{u \in p} \overline{u}$$

が X の元として定まるとき，p を近準点と呼ぶ，即ち

$$st\,;\,X^* \longrightarrow X$$

は近準的点からの準同型写像であるから，$st(p+q)=st(p)+st(q)$ 等となっている．だから一般には $p \neq p+p$ である．$st(p)=0$ の場合でも，例えば，すべての $n \in N$ に対して

$$\left(\tfrac{1}{n}\ \tfrac{1}{n}\right) \cap 1+\sqrt{2}Q \in p$$

となる p を考えると $st(p)=0$ であるけれども

$$p\forall x\,(x \in 1+\sqrt{2}Q) \qquad , \neg p\forall x\ p\forall y\ (x+y \in 1+\sqrt{2}Q)$$

なので $p \neq p+p$ である．おそらくは 0 で生成される主フィルター，それを再び 0 と記すると，0 の外のすべての元について $p \neq p+p$ であろうと思う．その他，体の公理のほとんどのものは成立しないと思う．その具体的反例はそれでもやはりある程度の意味をもっていると思う．極大なフィルターというのは X^* の点であるが，"極限"のとり方のすべてという意味をもっているからであり，その"とり方"の各々が総体として一つの位相を共った代数系となっているからである．

さて，ここで直積と双対空間にもどってみる．

$$(p,q) \in X^* \times Y^* \longmapsto p \times q \in (X \times Y)^*$$

の定義は

$$u \in p \times q \equiv \{x \in X \mid \{y \in Y \mid (x\,y) \in u\} \in q\} \in p$$

であった 算法 $\times\,:\,X^* \times Y^* \longrightarrow (X \times Y)^*$ が埋込みであることは

その定義より明らかであろう．又，その像が $(X\times Y)^*$ の中で調密であることも，主フィルターの積が再び主フィルターであること，及び主フィルターの全体が双対空間の中で極大な稠密開集合になっていることから解る．しかし，その像は $(X\times Y)^*$ と一致しないことは注意しておく必要があるであろう．

例3． $D=\{(nn)\mid n\in N\}$ を考え，D 上の non-principal ultra filter r は $(N\times N)^*$ の元であるが $N^*\times N^*$ の元の像ではない．それは $p, q\in N^*$ が共に non-principal ならば

$$\{m\mid (nm)\in D\}=\{n\}$$

であるから

$$p\forall n\neg q\forall m((nm)\in D)$$

即ち $D\notin p\times q$．$D\in r$ であったから $r\neq p\times q$．上の証明は q が non-principal であれば成立する．q が principal で k で生成される場合もやはり p が non-principal なら $D\notin p\times q$ である．p, q が共に principal なら $p\times q$ は principal で r は non-principal でこの場合も当然一致しない．

$p\forall x$ と $q\forall y$ は一般に交換しないことはすでに述べて来たところであるが，例えば，可測基数（measurable cardinal）が存在する場合，q の完備数 $ch(q)$ が可測基数に等しいときなど

$$\bar{\bar{p}} < ch(q)$$

が成立するときは，すべての述語に対して

$$\mathfrak{p}\forall x\, \mathfrak{q}\forall y\, P(x,y) \equiv \mathfrak{q}\forall y\, \mathfrak{p}\forall x\, P(x,y)$$

が成立する．しかし，この様な $ch(\mathfrak{q}) = \kappa$ は非常に大きく，通常解析学で用いられる集合族の基数

$$\aleph_0,\ 2^{\aleph_0},\ 2^{2^{\aleph_0}} \cdots$$

等のすべてより大きい．いわゆる強い意味で到達不可能な基数，実はその最小元のようなものよりも大きい，になっている．しかし，この様な基数の存在が現代数学と全く関係ないかというと必ずしもそうではないと思う．例えば

補解析集合の射影となる集合

等のルベーグ可測性は一般には導かれないが，この様な基数の存在からは導かれることが，R.M.Solovay等によって知られているのである．

References

1] W. Comfort, S. Negrepontis; The theory of ultrafilters, Springer

2] K. Gödel; The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 24.

3] T. Jech; Set Theory, Academic Press.

4] S. Shelah; Proper Forcing, Lect. Notes. in Math. 940, Springer-Verlag.

5] R. Solovay; A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Ann. Math. 92, 1-56.